L'ENSEIGNEMENT
MATHÉMATIQUE

GENÈVE

IMPRIMERIE ALBERT KÜNDIG

L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

MÉTHODOLOGIE ET ORGANISATION DE L'ENSEIGNEMENT
PHILOSOPHIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES
CHRONIQUE SCIENTIFIQUE — MÉLANGES — BIBLIOGRAPHIE.

REVUE INTERNATIONALE

PARAISSANT TOUS LES DEUX MOIS

DIRIGÉE PAR

C.-A. LAISANT
Docteur ès sciences,
Examinateur d'admission à l'Ecole polytechnique de Paris.

H. FEHR
Docteur ès sciences,
Professeur à l'Université de Genève.

AVEC LA COLLABORATION DE

A. BUHL
Docteur ès sciences
Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.

Organe officiel de la Commission internationale de l'Enseignement mathématique.

DOUZIÈME ANNÉE
1910

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS

GENÈVE
GEORG & Cie, ÉDITEURS
10, CORRATERIE, 10

1910

NOTE SUR LES USAGES DU PAPIER QUADRILLÉ

§ I. — Applications classiques.

Le papier quadrillé est formé comme on le sait par le tracé de 2 réseaux orthogonaux de parallèles équidistantes. Si l'on prend 2 d'entre elles comme axes de coordonnées et le côté d'un des carrés du quadrillage comme unité de longueur, on peut aisément placer à l'œil un point dont les 2 coordonnées sont connues et cela avec une approximation de un dixième. La plupart des applications du papier quadrillé sont basées sur ce fait. Ce sont donc simplement des constructions de géométrie analytique à 2 dimensions [1].

De ce nombre sont les constructions classiques de courbes données par leurs équations. On a par exemple tracé ci-contre la parabole $y = x^2$ (fig. 1), en construisant certains points de coordonnées simples. Les constructions de graphiques ou d'abaques [2] sont également facilitées par l'emploi du papier quadrillé, principalement les constructions de graphiques dans lesquelles une des variables ne prend que des valeurs entières. (Statistiques annuelles, mensuelles, etc...)

Dans la construction des courbes algébriques, il est souvent avantageux, au lieu de chercher les coordonnées exactes des points de la courbe, de chercher à placer par rapport à la courbe des points voisins et dont les 2 coordonnées soient entières de façon à avoir des calculs simples. Si, par exemple [3],

[1] Les dimensions les plus habituelles du papier quadrillé sont voisines de $^1/_2$ cm. On trouve suivant les marques : 0,491 cm., 0,493 cm., 0,496 cm., 0,499 cm., 0,535 cm., etc. Il y a d'ailleurs des quadrillages plus serrés : 0,396 cm., etc., ou plus larges, 0,789 cm. Il existe enfin pour les constructions plus précises du papier dit millimétrique bien connu des physiciens et dont nous n'aurons pas l'occasion de parler ci-dessus.

Note de la Rédaction. — L'usage du papier millimétrique s'est également répandu dans les sections scientifiques des établissements secondaires. Il est indispensable à la résolution graphique des équations.

[2] *Nomographie* de M. M. d'Ocagne.

[3] Le lecteur est prié ici, comme dans toute la suite de la Note, de vouloir bien refaire au fur et à mesure les diverses figures sur du papier quadrillé.

on veut construire le folium de Descartes $x^3 + y^3 - 15xy = 0$ il sera commode de remarquer (fig. 2) que les points A et B sont à l'intérieur de la boucle et CDEFGH sont à l'extérieur, tous ces points étant d'ailleurs très voisins de la courbe. Ce dernier procédé, appliqué avec un peu d'habileté, est certainement le plus rapide pour la construction des courbes.

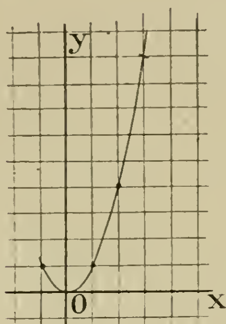


Fig. 1.

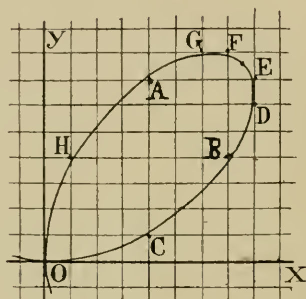


Fig. 2.

La résolution des équations par des intersections de courbes est une application bien connue des tracés graphiques. Par exemple, pour résoudre une équation de la forme $x^2 + px + q = 0$, on construira une fois pour toutes la parabole $y = x^2$ avec grand soin, et on la fera couper par la droite $y + px + q = 0$. Les abscisses des points d'intersection seront les racines cherchées. De même, on résoudra une équation du 3me degré: $x^3 + px + q = 0$ par le tracé d'une parabole cubique $y = x^3$ et d'une droite: $y + px + q = 0$. Sans vouloir insister davantage sur ces exemples classiques, citons cependant comme dernière application à des équations algébriques la résolution de l'équation :

$$x^6 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

par l'intersection de la même parabole cubique $y = x^3$ et de la conique:

$$y^2 + pxy + qy + rx^2 + sx = 0 \ .$$

Le papier quadrillé sert de façon simple à l'évaluation des aires limitées par un contour quelconque. Reprenons par

exemple la boucle du folium de Descartes construit précédemment (fig. 3) et prenons pour unité de longueur le double du côté du quadrillage, pour avoir une approximation suffisante, ce qui donne une aire 4 fois plus grande que l'aire demandée. Traçons 2 contours polygonaux utilisant uniquement des lignes du quadrillage et aussi voisins que possible de la courbe donnée et comptons le nombre des carrés contenus dans chaque polygone. Nous aurons ainsi l'aire de chacun d'eux et il suffira d'en prendre la demi-somme pour avoir approximativement l'aire cherchée. Ici, on pourra par exemple

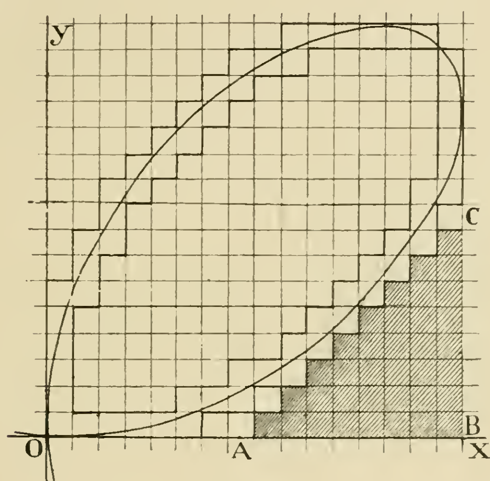


Fig. 3.

remarquer que le polygone recouvert de hachures a une aire égale à $\frac{8 \cdot 9}{2}$. On trouve ainsi que l'aire du polygone qui suit extérieurement la courbe est 175, l'unité d'aire étant la surface de l'un des carrés. Pour avoir la demi-somme cherchée, il suffit de compter le nombre des carrés compris entre les 2 polygones, en comptant 2 carrés pour un, de façon à avoir la moitié de cette aire. On trouve ainsi $29\frac{1}{2}$ et par suite, pour l'aire cherchée, $145\frac{1}{2}$. Il est d'ailleurs plus avantageux de compter le nombre de carrés qui existent entre l'un des 2 po-

lygones et la courbe même, en estimant à l'œil les fractions de carrés, mais ce procédé demande une certaine habitude. Remarquons que ici l'aire considérée est exactement 150.

§ 2. — Points entiers.

Nous appellerons pour abréger *point entier du plan* tout point dont les deux coordonnées sont des nombres entiers, positifs ou négatifs, et point commensurable tout point dont les 2 coordonnées sont des nombres commensurables, l'unité de longueur étant le côté du carré qui sert de base au quadrillage et les axes de coordonnées étant 2 perpendiculaires du quadrillage. Nous nous occuperons presque exclusivement des points entiers. Nous allons voir comment la considération de tels points facilite la construction d'un grand nombre de figures planes, en étudiant auparavant les propriétés les plus élémentaires des droites passant par des points à coordonnées commensurables.

Remarquons d'abord que, étant donné n points commensurables, on peut toujours, avec un rapport d'homothétie convenable, les rendre entiers, en prenant un côté de quadrillage assez petit. Aussi suffira-t-il de prouver, dans certains cas, l'existence de points commensurables répondant à des conditions données, pour en déduire l'existence de points entiers répondant aux mêmes conditions.

Au point de vue qui nous occupe les droites du plan peuvent être rangées en plusieurs catégories : 1° les droites qui ne contiennent aucun point commensurable. Ex. : $x = \sqrt{3}$. 2° les droites qui contiennent un point et un seul à coordonnées commensurables. Ex. : $y = x\sqrt{3}$. 3° les droites qui contiennent 2 et par suite une infinité de points à coordonnées commensurables. Nous supposerons d'ailleurs qu'il y ait au moins un de ces points à coordonnées entières. Il est alors visible qu'une telle droite contient une infinité de points à coordonnées entières. Si, en effet, nous supposons que le point entier de cette droite soit l'origine, et le point commensurable le point $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ le point entier ad, bc fait partie de la même droite et par suite les points $m.\ ad$, $m.\ bc$ en font

également partie. On verrait aisément qu'il y a sur une telle droite 2 points tels que A, B par exemple (fig. 4) qui sont entiers et à la distance minima, tout autre point entier de la droite étant à une distance de A représentée par m. AB [m étant un entier positif ou négatif]. Il est souvent commode de définir une droite telle que celle-ci par un point entier, A, par exemple, et par les coordonnées a, b du point B voisin par rapport à A, pris pour origine; a et b sont donc des nombres premiers entre eux et $\frac{b}{a}$ est le coefficient angulaire de la droite. Les droites que nous aurons à considérer seront le plus souvent définies ainsi. Par exemple la droite de la figure précédente est la droite A (3, 1).

On voit que 2 droites A(a, b) et A(— a, — b) sont identiques. Si l'on change le signe d'un des 2 nombres a ou b,

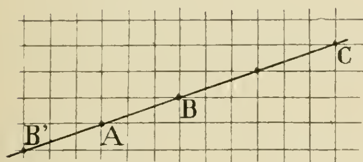


Fig. 4.

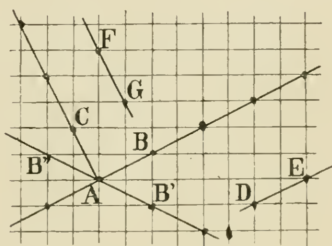


Fig. 5.

et d'un seulement, on obtient une droite symétrique de la première par rapport à l'un des axes de coordonnées. Exemple : AB : AB″ etc... (fig. 5). Il est facile de voir que la droite A (— b, a), ici AC, est perpendiculaire sur AB.

Ce qui précède donne immédiatement la solution des 2 problèmes suivants: *Mener par un point entier une parallèle ou une perpendiculaire à une droite donnée.* On a par exemple, sur la figure, mené par D la parallèle DE à AB, et par F la perpendiculaire FG à AB.

Nous allons généraliser ceci en considérant des quadrillages à bases différentes. Nous appelons base d'un quadrillage, un quelconque des segments tels que AM (fig. 6) qui sert de côté à un des carrés du quadrillage, et qui représente la

distance de 2 parallèles voisines. Considérons maintenant le quadrillage ayant pour base un segment quelconque AB, dont les deux extrémités sont entières, c'est-à-dire le quadrillage tracé en pointillé. On voit que tous les points entiers, ou si l'on veut tous les sommets du nouveau quadrillage, sont des sommets de l'ancien, mais que la réciproque n'est pas vraie. On peut montrer que tout point commensurable de l'un des quadrillages est un point commensurable de l'autre. Nous nous contenterons de l'établir sur un cas particulier en considérant par exemple le point entier α du premier quadrillage et montrant qu'il est commensurable dans le second. Le lecteur généralisera sans peine cette démonstration : AB est partagé par les verticales du premier quadrillage en un nombre entier de segments égaux : ici 2 : AN et NB. Les coordonnées de N sont donc commensurables, dans le quadrillage de base AB. Il en sera de même pour les coordonnées de P où la verticale de α coupe BK. D'ailleurs ici P est entier dans le nouveau quadrillage. Dans ce nouveau quadrillage, α partage dans un rapport commensurable le segment P à extrémités commensurables. Il a donc des coordonnées commensurables.

Remarquons que malgré la propriété qui précède, les longueurs AM et AB qui servent de bases aux deux quadrillages peuvent être incommensurables. C'est d'ailleurs le cas ici :

$$AB = AM\sqrt{5}\ .$$

La considération de quadrillages à bases différentes va nous permettre de résoudre le problème suivant : *Mener par un point entier une droite faisant avec une droite donnée un angle* V, *tel que* tg V *soit commensurable.* [Il sera dans la pratique commode de définir par exemple l'angle V par l'angle d'une droite quelconque AP avec une horizontale AH du quadrillage (fig. 7)]. La direction AP est ici définie par les coordonnées 3, 2 du point P. Soit AB la droite donnée et M le point par lequel doit être menée la droite cherchée. Construisons le quadrillage de base AB et soit N le point de ce quadrillage de coordonnées 3, 2. On voit immédiatement que la droite cherchée est la parallèle MM′ menée par M à AN.

Un cas particulier assez intéressant de ce qui précède est le suivant: Mener par un point une droite faisant 45° avec une droite donnée. Exemple. Les deux directions 2, 1 et 1, 3 font 45°. (CD et CE). Les exemples qui précèdent et que l'on pourra généraliser aisément montrent comment il est possible d'effectuer un grand nombre de constructions sur papier quadrillé. La seule précaution à prendre est de profiter de l'arbitraire, qui existe habituellement sur le choix des données, pour introduire le plus grand nombre possible de points entiers dans l'énoncé. On arrive ainsi à vérifier rapi-

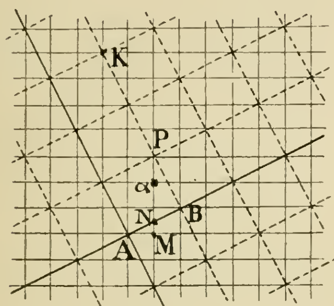


Fig. 6.

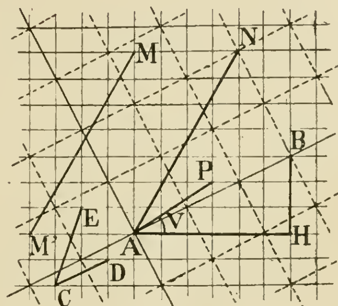


Fig. 7.

dement des énoncés compliqués de géométrie. Malheureusement toutes les figures ne se prêtent pas à de pareilles constructions. Par exemple il est impossible de construire un triangle équilatéral dont les 3 sommets soient entiers (car si ceci avait lieu la tangente trigonométrique de l'angle de 2 côtés serait commensurable). Les courbes quelconques contiennent rarement des points entiers. Signalons comme cas simple souvent utilisé le cercle dont le centre est un point entier et de rayon 5, cercle qui contient 12 points entiers[1].

Nous ne continuerons pas davantage la théorie des points entiers, nous contentant d'énumérer quelques résultats particuliers faciles à établir:

---

[1] Le triangle dont les sommets ont pour coordonnées 10, 0; 0, 10; —6, —8 a en particulier les pieds des hauteurs, l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit et du cercle des 9 points, les milieux des côtés qui sont des points entiers. Le point de Lemoine et le centre de gravité sont commensurables et deviendraient entiers par une homothétie convenable.

L'aire d'un polygone dont les sommets sont des points entiers est représentée par un nombre entier ou par la moitié d'un nombre entier (l'unité d'aire étant l'aire du carré de base du quadrillage).

Le lieu des points du plan équidistants de 2 points entiers ne contient des points entiers que si les 2 points donnés sont de même parité, c'est-à-dire si les 2 coordonnées de l'un des 2 points par rapport à l'autre, sont de même parité.

Un cercle défini par 3 points commensurables contient une infinité de points commensurables. En particulier, il est coupé en un point commensurable, par toute droite à coefficient angulaire commensurable, qui passe par un point commensurable de ce cercle.

La distance d'un point commensurable à une droite, définie par 2 points commensurables, n'est commensurable que s'il existe sur la droite 2 points commensurables à distance commensurable. Pour préciser ceci, remarquons que en général cela n'a pas lieu pour une droite quelconque. Ceci aurait lieu par exemple pour une droite de direction 3, 4 car $3^2 + 4^2 = 5^2$. Si maintenant on prend une droite quelconque, et par exemple 2 points entiers consécutifs A et B sur cette droite, à une distance δ (δ étant en général incommensurable) on peut évaluer aisément la distance d'un point quelconque M (fig. 8) à AB. d étant cette distance, $d \cdot \delta$ est un nombre entier (double de l'aire MAB) ici 7. Donc d est le quotient par δ de cet entier ; ici $d = \frac{7}{\sqrt{5}}$.

Dans tout ce qui précède, nous avons laissé systématiquement de côté une notion qui se rattache simplement à celle des points entiers : la notion d'entiers imaginaires [1]. On appelle ainsi tout nombre $a + bi$ dans lequel a et b sont des entiers positifs ou négatifs, i ayant la signification connue : ($i^2 = -1$). Les affixes de ces nombres sont tous les points entiers du plan. Nous ne traiterons pas cette question nous bornant à citer un seul théorème qui concerne les quadrillages de bases différentes :

Les affixes des multiples, réels ou imaginaires, d'un nom-

---

[1] *Théorie des Nombres* de M. Cahen.

bre, réel ou imaginaire, a, *sont les sommets d'un quadrillage ayant pour base le segment OA qui joint l'origine au point A, affixe de* a.

§ 3. — Applications diverses des propriétés des points entiers.

Les applications à l'arithmétique de la théorie des points entiers sont très nombreuses. Nous serons obligés de faire un choix parmi elles, et de donner simplement quelques exemples de ces diverses applications.

Etant donné la courbe $f(x, y) = 0$ ou plus généralement $f(x, y, a) = 0$ représentée par une équation homogène, a désignant par exemple une longueur de la figure, tout point

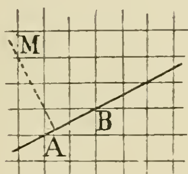


Fig. 8.

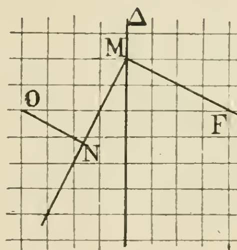


Fig. 9.

entier de cette courbe donnera une solution en nombres entiers de l'équation $f(x, y, a) = 0$. Un point commensurable de coordonnées $\frac{x}{k}$, $\frac{y}{k}$ donnera une solution en nombres entiers de $f(x, y, ka) = 0$. Citons un exemple de ce genre d'applications : Prenons une droite fixe Δ qui sera une ligne verticale du quadrillage et 2 points O et F, symétriques par rapport à Δ, et entiers. Prenons un point M commensurable variable sur Δ, menons MN, perpendiculaire en M à FM, (fig. 9) et abaissons enfin ON perpendiculaire sur MN. Il est facile de voir que les coordonnées de N sont commensurables. Le lieu de ce point est d'ailleurs une strophoïde. On aura donc des solutions en nombres entiers de l'équation

$$x(x^2 + y^2) = ka(x^2 - y^2) .$$

La plupart de ces applications concernent le carré de la distance de 2 points entiers, nombre qui est un entier, somme de deux carrés. Prenons par exemple la parabole $y^2 = 4\,px$, p étant un nombre entier. On aura des points entiers de cette parabole en posant $y = 2mp$ et par suite $x = m^2p$. Soit F le foyer de cette parabole (fig. 10), Δ sa directrice, et M un point entier de cette conique. On a $\overline{MF}^2 = \overline{MN}^2$ qui donne une solution en nombres entiers de $a^2 = b^2 + c^2$, car $\overline{MF}^2$ est une somme de 2 carrés. Dans le

Fig. 10.

Fig. 11.

cas de la figure on a : $p = 1$, $x = 4$, $y = 4$ d'où l'égalité : $5^2 = 3^2 + 4^2$.

Prenons 2 points M et N (fig. 11) sommets d'un quadrillage de base AB. Le carré de leur distance est le produit par $\overline{AB}^2$ d'une somme de 2 carrés, ici 3^2 et 2^2 car NP = 3. AB et MP = 2. AB. Mais d'autre part le carré de cette distance est la somme des carrés de MQ et NQ. Si l'on remarque enfin que $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$, on voit que l'on a démontré le théorème :

Le produit d'une somme de 2 carrés par une somme de 2 carrés est encore une somme de 2 carrés.

Dans le cas de la figure on a : $7^2 + 4^2 = (2^2 + 1^2)(3^2 + 2^2)$

La considération des points entiers, équidistants de 2 points entiers donnés, montrerait qu'un nombre peut être de plusieurs façons une somme de 2 carrés. Nous allons étendre ceci à une somme de 4 carrés. Prenons 2 couples de points diamétralement opposés dans un même cercle AB et

CD (fig. 12). On peut par exemple les obtenir en prenant à l'aide de quadrillages de base arbitraire un rectangle quelconque : ici le rectangle 2,1 du quadrillage de base 3,1. Soit M un point entier quelconque du plan. L'égalité connue :

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{MD}^2$$

montre qu'un nombre peut s'écrire de plusieurs façons sous forme d'une somme de 4 carrés, car chaque terme, tel que $\overline{MA}^2$, est une somme de 2 carrés. On a ici l'égalité : $1^2 + 6^2$

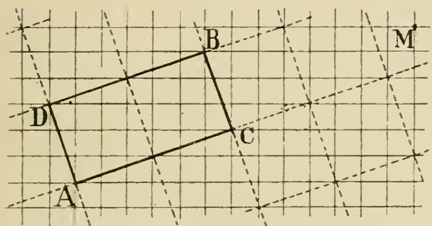


Fig. 12.

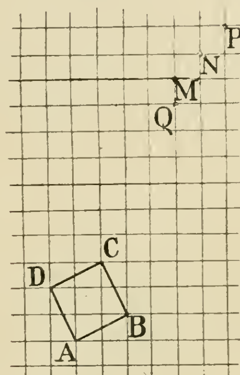


Fig. 13.

$+ 8^2 + 13^2 = 3^2 + 4^2 + 7^2 + 14^2$. Cette représentation des sommes de 4 carrés permet de résoudre diverses questions. Par exemple si l'on veut trouver 2 sommes de 4 carrés égales et portant sur 8 entiers consécutifs on voit qu'il suffira de partir du carré ABCD (fig. 13). Les points M, N, P, etc... répondent à la question. On a pour le point M : $2^2 + 5^2 + 7^2 + 8^2 = 3^2 + 4^2 + 6^2 + 9^2$. Si l'on prend un point tel que Q pour lequel un même carré se retrouve dans les deux membres on aura des égalités concernant les sommes de 3 carrés. Ici : $2^2 + 6^2 + 7^2 = 3^2 + 4^2 + 8^2$ [1].

[1] On obtiendrait de pareilles égalités en considérant le quadrillage « cubique » des points entiers de l'espace : le plan, lieu des points équidistants de 2 points donnés, contient parfois des points entiers pour lesquels on a des sommes de 3 carrés. On peut étendre certaines des propriétés du plan à de tels points entiers mais non toutes. En particulier la représentation par imaginaires du plan ne se retrouve pas dans l'espace. Signalons encore l'impossibilité d'obtenir des quadrillages « cubiques » à bases différentes, si l'on veut que les 3 directions d'un tel quadrillage soient distinctes de celles du premier.

§ 4. — Applications diverses du papier quadrillé.

On peut employer le papier quadrillé pour étudier commodément certaines questions. Quelques dessins industriels (canevas, dallages, carrelages...) utilisent le carré du quadrillage comme point, pour tracer de façon grossière certaines courbes. En géographie on peut citer la méthode « des carreaux » pour l'agrandissement des cartes (Un procédé analogue permettrait de tracer des projections homographiques d'une figure donnée. Par exemple, une amplification d'ordonnée dans le rapport 2, fera correspondre à un carré de la première figure 2 carrés superposés de la seconde, etc...). On peut encore se servir du papier quadrillé pour étudier



Fig. 14.

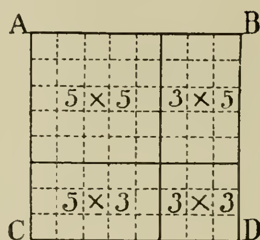


Fig. 15.

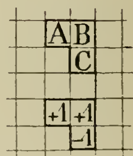


Fig. 16.

les propriétés des déterminants, des carrés magiques, du triangle arithmétique de Pascal, les mouvements des pièces d'un échiquier, etc.. ou encore pour établir certains théorèmes d'arithmétique : Exemple : *La somme des* n *premiers nombres impairs est* n^2. Dans la figure (fig. 14) les polygones successifs contiennent un nombre impair de carrés et l'on voit ainsi que la somme des 5 premiers impairs est 5^2.

Le carré de la somme de 2 nombres entiers a *et* b *est égal à la somme des carrés des 2 nombres augmentée du double produit de ces nombres.* On voit (fig. 15) que si l'on prend $a = 5$ et $b = 3$ le carré ABCD est formé de 4 parties qui contiennent respectivement 5×5 ; 3×5 ; 5×3 ; 3×3 carrés, ce qui donne la propriété.

Donnons un exemple plus compliqué de ces démonstra-

tions figurées. Supposons que toutes les cases d'un quadrillage contiennent des entiers tels, que la somme des nombres de cases horizontales donne le nombre situé au-dessous de la seconde : les 3 nombres A, B, C (fig. 16) donnent A + B — C = O (Le lecteur fera sans peine des applications de ceci au cas du triangle arithmétique de Pascal). Représentons encore ceci par les coefficients 1, 1 et — 1 mis sur les 3 cases considérées (Sur la figure on a pris 3 nouvelles

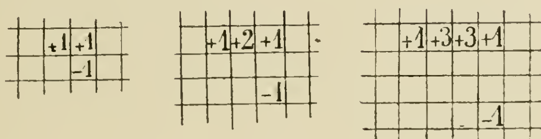


Fig. 17.

cases au-dessous des premières). Ceci posé, en n'introduisant ainsi que des totaux nuls on pourra affecter certaines cases de coefficients, toutes les cases marquées donnant un total égal à 0. Par exemple, sur la figure 17, les diverses parties de la figure répondent à cette condition et l'on voit aisément apparaître les coefficients du binome. Ne voulant pas allonger outre mesure cette Note nous laissons au lecteur le soin d'énoncer le théorème correspondant et d'en déduire des propriétés du triangle de Pascal [1].

A. SAINTE LAGUË (Douai).

---

[1] Le lecteur trouvera un très grand nombre de ces démonstrations figurées dans la *Théorie des Nombres* de LUCAS.

SUR LES SINGULARITÉS DES FONCTIONS ANALYTIQUES UNIFORMES

Dans ma thèse *Sur la continuité des fonctions de variables complexes* (*Annales de Toulouse*, 2me série, tome VII), j'ai montré, par des exemples, que l'*étendue* de l'ensemble des points singuliers joue un rôle essentiel dans la façon dont se comporte une fonction analytique uniforme aux environs des points singuliers.

Une conséquence inattendue et très importante, c'est que la *continuité* ou la *discontinuité* de l'ensemble des points singuliers n'a pas l'influence qu'on voulait lui attribuer : deux ensembles, l'un *continu* (d'un seul tenant, d'après la terminologie de M. Jordan), l'autre *partout discontinu* (purement ponctuel, d'après M. Painlevé), ayant même étendue, donnent lieu aux mêmes circonstances.

Il est bien entendu que nous excluons de nos considérations les fonctions à *espaces lacunaires* et prenons le mot *point singulier* dans un sens restreint (défini dans ma thèse, deuxième partie).

Dans cette note, je me propose de faire voir qu'en se donnant *a priori* la façon de se comporter d'une fonction analytique uniforme aux environs des points singuliers, il s'ensuit, pour l'*étendue* de l'ensemble des points singuliers, des conditions précises.

§ 1. — I. Supposons qu'on impose à une fonction analytique uniforme $f(z)$ les deux conditions suivantes :

1° La fonction $f(z)$ est *partout continue* (donc continue aussi sur l'ensemble des points singuliers);

2° La dérivée $f'(z)$ est bornée.

On démontre, avec ces hypothèses (voir, par exemple, dans ma thèse, le chap. III de la deuxième partie), que l'en-

semble des points singuliers a nécessairement une *aire* non nulle, ou d'une façon plus précise encore : l'aire de l'ensemble est *partout* non nulle.

II. Supposons maintenant qu'on impose à la fonction $f(z)$ seulement la condition d'être *partout continue*.

On démontre, dans ce cas (thèse : chap. III de la première partie) que la *longueur* de l'ensemble des points singuliers est *partout infinie*.

III. Supposons, en troisième lieu, qu'on impose à la fonction $f(z)$ la condition d'être *bornée* dans le voisinage des points singuliers.

On démontre (thèse : premier chapitre de la seconde partie) que la longueur de l'ensemble des points singuliers est *partout non nulle*.

IV. Enfin, pour être certain qu'une fonction analytique uniforme devient *infinie* dans le voisinage de tout point singulier, il *suffit* que l'ensemble des points singuliers ait une *longueur nulle* (thèse : chap. I de la deuxième partie).

§ 2. — Un autre résultat remarquable est relatif aux intégrales

$$J = \int_c f(z)\,dz$$

prises suivant les contours fermés C, ne passant que par des points réguliers z, mais contenant des points singuliers dans la région enfermée. Dans les cas où l'intégrale J a un sens, le contour C peut passer même par des points singuliers.

On démontre (pour les cas I et II, au moyen d'un théorème de Morera[1], pour le cas III voir une note des *Comptes Rendus*, 12 juillet 1909) que *les intégrales* J *ne peuvent pas être toutes nulles* : en d'autres termes, elles caractérisent les singularités contenues dans C.

Il semble que cette proposition souffre une exception dans le cas IV. Mais cela tient au fait qu'en imposant à la fonction

[1] C'est le théoreme démontré dans la premiere partie de ma these : chapitre I. Lorsque j'ai donné ce théorème, dans ma thèse, je le croyais nouveau. Grâce à une obligeante communication de M. le prof. E. Landau, j'ai appris qu'il avait été donné bien avant moi par Morera (*Rendiconti del R. Istituto Lombardo*, série 2, t. 19, 1886).

la condition d'être infinie, on ne lui impose, au fond, qu'une condition purement négative : *la fonction n'est pas bornée*. En précisant le genre d'infinitude qu'on impose à $f(z)$, la proposition ci-dessus devient applicable. Par exemple, on peut imposer à $f(z)$ la condition de devenir, dans le voisinage de tout point singulier, infinie comme

$$\frac{A}{z-a}$$

pour $z = a$. Dans ce cas on démontre que les intégrales

$$\int_c f(z)\,dz$$

ne peuvent pas être toutes nulles.

D. Pompeiu (Jassy, Roumanie).

SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES EN BELGIQUE

L'Enseignement mathématique ayant publié, dans le cours de ces derniers temps, plusieurs articles sur l'organisation de l'enseignement mathématique dans divers pays, il m'a paru intéressant de donner également une rapide esquisse de cette question pour la *Belgique*. Je me bornerai toutefois aux *enseignements moyen* et *supérieur*.

I. — **L'enseignement moyen. — Degré inférieur.**

L'enseignement moyen comprend lui-même *deux degrés :* le degré inférieur et le degré supérieur.

De nombreuses écoles moyennes de l'Etat sont chargées du *degré inférieur*. « Le législateur, en créant ces écoles moyennes, a eu principalement en vue de fournir aux jeunes gens qui se destinent aux carrières commerciales, industrielles et agricoles d'ordre moyen ou aux arts et métiers, une éducation et une instruc-

tion plus complètes que celles de l'école primaire, mais moins développées que celles des cours d'humanités modernes, avec orientation bien marquée vers les nécessités pratiques de leur situation probable dans l'avenir. Donner une instruction franchement pratique et directement utilisable : voilà la principale mission qu'imposent à ces écoles, aujourd'hui plus que par le passé, les conditions de la vie économique et surtout l'âpre concurrence que font à notre pays ses voisins, sur le terrain commercial, industriel et agricole. » C'est dans ce but également que certains de ces établissements, outre les cours d'intérêt général, ont été dotés de sections spéciales : commerciale, industrielle et agricole. Beaucoup comportent également une section préparatoire dont le programme est le même que celui des écoles primaires. L'enseignement comprend *trois années ;* en ce qui concerne les mathématiques, on consacre à leur étude régulièrement 4, 4, 5 heures par semaine.

L'étude de l'arithmétique se répartit sur les *trois années*. Elle comprend d'abord une *partie théorique* ayant pour objet les matières suivantes : Numération décimale. — Opérations fondamentales (avec raisonnement) sur les nombres entiers, les fractions, les nombres décimaux. — Principes et caractères de divisibilité élémentaires. — Nombres premiers. — P. g. c. d. et p. p. c. m. par les deux méthodes.

Pour ce qui est de la *partie pratique*, elle se rapporte aux objets ci-après : étude détaillée du système métrique — règle de trois — intérêt simple — tant pour cent et pour mille ; applications : tare, gain, perte — escompte en dehors et en dedans — partages proportionnels et règle de société — moyennes, mélanges et alliages — méthode des parties aliquotes, monnaies étrangères et leur conversion — problèmes variés sur les objets suivants : intérêts composés (usage des tables), échéance moyenne, rentes sur l'État, obligations et actions de société, Caisse d'Épargne et de Retraite sous la garantie de l'État, notions très sommaires sur les annuités (usage des tables), les assurances et les mutualités. — Carré et racine carrée — cube et racine cubique. Il est recommandé au professeur de choisir des démonstrations simples, mais rigoureuses ; il évitera soigneusement de remplacer par de simples vérifications les véritables démonstrations qui doivent découler des définitions et des principes. Il adoptera la voie de l'induction pour amener les élèves à comprendre les définitions, les principes et les règles, et à les découvrir par eux-mêmes lorsque la matière ne présente pas trop de difficultés. Il procédera donc au moyen d'exemples et passera du concret, du particulier, à l'abstrait et au général. Les exercices du calcul mental, les problèmes et autres exercices d'applications, marcheront constamment de pair avec l'enseignement théorique. Le professeur atta-

chera la plus haute importance aux applications pratiques ; il ne perdra jamais de vue que si le cours d'arithmétique doit être une véritable gymnastique des facultés de jugement et de raisonnement, il importe surtout que ce cours prépare, d'une manière efficace, les élèves à appliquer le calcul aux nombreux usages de la vie, c'est-à-dire aux besoins des arts et métiers, de l'économie domestique, du commerce, de l'industrie, de l'agriculture, etc. Le professeur proposera fréquemment des problèmes dans lesquels interviennent, à côté de données nécessitant l'emploi du calcul chiffré, d'autres données qui conduisent à des exercices de calcul mental présentant des combinaisons ingénieuses et d'heureuses simplifications basées sur des principes d'arithmétique. Les données des problèmes seront prises dans les limites de la réalité et fourniront aux élèves des notions pratiques d'une grande utilité. Il va sans dire que les problèmes dont la solution exigerait d'assez longues explications, scientifiques ou techniques, ne rentrent pas dans le cadre des études de l'école moyenne. »

L'étude de l'algèbre se répartit sur les *deux dernières années;* elle se rapporte aux objets ci-après : transformation des égalités — formules générales des problèmes d'intérêt, d'escompte, de société, de mélange — rapports et proportions ; applications — résolution de l'équation du premier degré à une inconnue ; problèmes — opérations fondamentales sur les quantités algébriques — fractions algébriques simples — résolution des systèmes d'équations du premier degré à deux et plusieurs inconnues ; problèmes — interprétations des valeurs négatives, infinies, indéterminées.

Quant à l'enseignement de la géométrie, il s'étend aux *trois années :* Définitions et notions préliminaires — divers cas d'égalité des triangles — théorie des perpendiculaires, des obliques et des parallèles ; somme des angles d'un triangle et d'un polygone quelconque — propriétés principales des quadrilatères — propriétés principales du cercle et des figures qui résultent de sa combinaison avec la ligne droite — mesure des angles — problèmes sur les tracés des divers éléments des figures — mesure des surfaces des polygones — carré d'un côté d'un triangle — longueurs proportionnelles — figures semblables — calcul numérique des éléments d'un triangle — problèmes — polygones réguliers — mesures de la circonférence, du cercle, du secteur (d'une manière pratique) — applications — arpentage — description et emploi des instruments : chaîne d'arpenteur, jalons et fiches, équerre d'arpenteur, graphomètre. — Mesure de la superficie des terrains — lever des plans à la chaîne, à l'équerre, au graphomètre, à la planchette et à la boussole — dessin des plans — exercices sur le terrain.

Nivellement : Description et emploi du niveau d'eau, du niveau à bulle d'air, du niveau Lenoir et de la mire — opérations sur le terrain.

Mesure de la surface et du volume des polyèdres et des trois corps ronds (enseignement exclusivement pratique) — applications.

Telle est la matière géométrique étudiée par les élèves au cours de leurs études moyennes.

« La partie théorique du cours comprend essentiellement les propositions de géométrie plane dont on fait de fréquentes applications dans la vie pratique et celles qui servent de bases aux premières. Les questions théoriques pures ont été écartées.

Il ne s'agit pas de procéder, comme à l'école primaire, par voie intuitive, expérimentale; les propositions seront démontrées rigoureusement et solidement enchaînées.

On propose fréquemment aux élèves comme applications, des théorèmes à démontrer, des problèmes généraux à résoudre, des lieux géométriques à trouver. Sans s'interdire absolument ce genre de questions qui aiguisent l'esprit de recherche et font naître le goût des études théoriques, le professeur choisira surtout des exercices d'applications à la vie usuelle, aux arts et métiers, à la mesure des surfaces et des volumes, aux travaux industriels, à l'arpentage, etc. Les problèmes numériques, les constructions graphiques (règle et compas) seront les applications les plus nombreuses.

C'est en associant intimement la théorie et la pratique, c'est en s'efforçant de rendre celle-ci la plus féconde possible que le professeur parviendra à faire du cours de géométrie un puissant moyen d'éducation intellectuelle et une préparation à un grand nombre de professions.

Le professeur aura soin de ne pas employer exclusivement la forme expositive. Il s'efforcera, par une interrogation logiquement conduite, d'associer largement les élèves à son enseignement. La connaissance pratique des formes géométriques, acquise dans les cours primaires, les aidera à saisir la portée des questions du maître, et lorsqu'ils auront pris l'habitude de la réflexion, il leur arrivera fréquemment de trouver le genre de démonstration à appliquer, de déduire du théorème nouvellement étudié les corollaires qu'il comporte, de montrer comment il se lie aux propositions précédemment démontrées. » Comme on le voit par ce rapide aperçu, la Belgique a déjà réalisé depuis quelques années, au moins dans les écoles moyennes, une partie assez notable des réformes préconisées par cette revue.

II. — Enseignement moyen. — Degré supérieur.

L'enseignement moyen du degré supérieur est donné dans les *athénées royaux* et *collèges communaux* d'une part et dans les *collèges libres* d'autre part. Parmi ceux-ci on distingue tout d'abord

quelques institutions laïques des grandes villes qui préparent spécialement les élèves à l'Ecole militaire et aux diverses Facultés. Généralement leurs professeurs, au moins ceux des cours principaux, sont pourvus de diplômes légaux; le programme des études ne s'écarte pas sensiblement de celui des athénées; mais, dans la plupart des cas, on n'y donne aux élèves que les connaissances strictement nécessaires pour l'entrée aux écoles auxquelles ils se destinent.

Les autres établissements libres ont un personnel presque entièrement ecclésiastique. Plusieurs congrégations religieuses possèdent quelques collèges très peuplés où, en général, il y a deux sections sans subdivisions : les humanités anciennes et les humanités modernes. Les autres collèges, dits épiscopaux, ne sont soumis qu'à l'autorité des évêchés; huit d'entre eux seulement subissent l'inspection de l'Etat et de ce fait participent au concours général et ont droit à des subsides. A part ces derniers, tous les établissements suivent, dans ses grandes lignes, le programme des écoles officielles, ce qui leur confère le droit de décerner à leurs élèves le certificat fin d'études exigé pour l'admission aux diverses universités. En général, les professeurs de ces écoles n'ont pas reçu de préparation spéciale; ce sont des prêtres qui enseignent la branche pour laquelle ils ont le plus d'aptitude et qui ont reçu au séminaire des notions de pédagogie et de méthodologie. Les études littéraires y sont très développées et très soignées; pour ce qui est des études scientifiques, on y apportait moins de soin jadis. Mais, dans ces dernières années, de sérieux efforts ont été faits, pour les relever et ils ont été couronnés de succès. Certains collèges se sont adjoints des spécialistes civils; de plus, beaucoup de jeunes prêtres vont compléter leurs études à l'Université catholique de Louvain.

L'enseignement officiel se répartit entre vingt athénées royaux, et neuf collèges communaux. Ces derniers ne diffèrent en rien des autres établissements officiels quant au programme et au recrutement de leur personnel; ils sont soumis à l'inspection de l'Etat, jouissent de subsides financiers et participent au concours général. Mais leurs professeurs sont nommés par les administrations communales des villes où ils sont établis, tandis que ceux des athénées sont nommés par le Roi. Nul ne peut être admis à ces fonctions s'il n'est porteur d'un diplôme de docteur en philosophie et lettres (classique, romane, germanique ou historique), en sciences naturelles, en sciences commerciales, en sciences physiques et mathématiques.

Les *athénées royaux* sont divisés en *deux sections :* les *humanités anciennes* et les *humanités modernes* ou section professionnelle. Chacune de ces deux sections comprend *sept classes* ou années d'études.

Les *humanités anciennes* comprennent : 1° la section des humanités grecques-latines conduisant aux doctorats en droit, en médecine, en pharmacie, en philosophie et lettres, en sciences naturelles; 2° la section des humanités latines conduisant au notariat, au doctorat en sciences mathématiques, aux écoles techniques et à l'Ecole militaire. L'étude du grec y est remplacée par une étude plus approfondie des mathématiques et des sciences naturelles.

Les *humanités modernes* comprennent : 1° La section commerciale et industrielle préparant les élèves aux diverses administrations, au commerce, à la banque, à l'industrie, aux écoles commerciales supérieures ; 2° la section scientifique conduisant à l'Ecole militaire, aux facultés techniques, au doctorat en sciences mathématiques. Les quatre classes inférieures des humanités modernes sont communes aux deux sections; la division ne commence qu'en troisième.

Comme on le voit, cette distribution en sections correspond à peu près à celle des lycées français. En ce qui concerne les langues modernes, une seule est obligatoire dans la section des humanités anciennes : le flamand (car le pays est bilingue) ; deux dans la section scientifique : le flamand et l'allemand ; trois dans la section commerciale : le flamand, l'allemand et l'anglais. Dans les collèges libres il n'existe que les deux grandes sections sans subdivisions. Le baccalauréat est remplacé par un certificat fin d'études délivré aux élèves qui ont obtenu la moyenne générale en rhétorique; ce certificat leur permet l'entrée, sans examen, aux diverses universités.

En ce qui concerne plus particulièrement l'enseignement mathématique, voici par classe et par section le programme suivi :

« HUMANITÉS GRECQUES-LATINES. »

SEPTIÈME. — Exposition de la numération décimale des nombres entiers. Addition et soustraction raisonnées. Définitions et règles (sans démonstration) de la multiplication et de la division des nombres entiers. Petits problèmes sur les nombres entiers. Caractères de divisibilité par 2, 3, 4, 5, 6, 9 et 11 (sans démonstration). Fractions ordinaires, transformations qui n'altèrent pas la valeur d'une fraction. Simplification et réduction au même dénominateur. Définition et règles (sans démonstration) des opérations fondamentales sur les fractions. Problèmes faciles. Nombres décimaux. Numération. Règles (sans démonstration) des opérations fondamentales sur les nombres décimaux. Première étude du système métrique. Applications (3 h.).

SIXIÈME. — Démonstration des règles relatives à la multiplication des nombres entiers ; à la multiplication et à la division des fractions ordinaires et des nombres décimaux (en mettant ceux-ci

sous forme de fractions ordinaires). Le sens et les règles des opérations seront expliqués d'abord au moyen de problèmes concrets. Démonstration des caractères de divisibilité par 2, 4, 5, 8, 3, 9. Problèmes sur l'intérêt simple, l'escompte commercial, les mélanges et les alliages. Règle de trois. Étude détaillée du système métrique (3 h. par semaine).

Cinquième. — Interversion des facteurs d'un produit. Conséquences de ce principe. Changements qu'éprouvent le quotient et le reste d'une division quand le dividende et le diviseur ou l'un d'eux sont rendus un certain nombre de fois plus grands ou plus petits. Division par un produit de facteurs. Démonstration du caractère de divisibilité par 11. Preuves par 9 et par 11 de la multiplication et de la division. Problèmes sur l'intérêt simple, sur les deux escomptes, sur la rente, la tare, les mélanges, les alliages, l'échéance commune, règle de société (applications du tant pour 100 ou pour 1000). Théorie des fractions généralisées. Formules générales relatives aux problèmes d'intérêt, de mélanges. Rapports et proportions (préliminaires). Calcul des surfaces et des volumes (cas les plus simples). Calcul du poids d'un corps (3 h.).

Quatrième. — *Arithmétique*. Démonstration de la règle de division des nombres entiers. Recherche du p. g. c. d. de deux nombres par divisions successives. Un nombre qui divise un produit de deux facteurs et qui est premier avec l'un d'eux divise l'autre facteur. Conséquences de ce principe. Un nombre n'est décomposable qu'en un produit de facteurs premiers. Recherche des diviseurs d'un nombre. Recherche du p. g. c. d. et du p. p. c. m. par décomposition en facteurs premiers.

Algèbre. Transformation des égalités. Étude complète des proportions. Partages proportionnels. Équations. Résolution d'équations et de problèmes numériques du 1er degré à une inconnue, problèmes littéraux. On choisira notamment les problèmes sur l'intérêt, les alliages; on tirera de la formule fondamentale la valeur de l'une quelconque des quantités qui y entrent et on exercera les élèves à formuler l'énoncé des problèmes dont cette valeur est la solution.

Géométrie. Le premier livre. Construction, à l'aide de la règle et du compas, de figures d'après des données numériques (3 h.).

Troisième. — *Algèbre*. Résolution des systèmes d'équations du premier degré à deux et à plusieurs inconnues. Résolution de quelques problèmes généraux assez simples. Applications des formules à des exemples numériques. Interprétation des valeurs négatives, indéterminées, infinies. Cette partie du programme est destinée à préparer les élèves au calcul algébrique et à leur faire comprendre la généralité des résultats.

Calcul algébrique. Opérations fondamentales. Carré et cube d'un binôme. Divisibilité d'un polynôme entier en x par $x - a$;

application à la division de $x^m \pm a^m$ par $x \pm a$; forme du quotient. Fractions algébriques : opérations, simplifications des fractions dans les cas les plus simples.

Géométrie. Propriétés du cercle et des figures qui résultent de sa combinaison avec la ligne droite. Mesure des angles.

Problèmes : tracé des perpendiculaires, des parallèles ; construction des triangles et des circonférences d'après les conditions indiquées. Evaluation des aires planes. Lignes proportionnelles. Figures semblables, propriétés des sécantes, détermination des éléments d'un triangle (hauteurs, médianes, rayons des cercles inscrit et circonscrit), surface en fonction des côtés ; applications numériques. Problèmes sur les longueurs proportionnelles, les figures semblables et équivalentes ; construction d'un rectangle connaissant la surface et la somme ou la différence des côtés ; partage d'une droite en moyenne et extrême raison. — Arpentage : mesure et division des terrains (faire quelques épures soignées avec règle et compas). (3 h.)

Seconde. — *Algèbre*. Carré et racine carrée des nombres et des polynômes. Calcul des radicaux du second degré. Résolution de l'équation du second degré ; propriétés des racines ; décomposition du trinôme du second degré en facteurs. Discussion de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. Equation bicarrée, résolution et discussion. Transformation de

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$$

Problèmes du second degré. Résolution de quelques systèmes faciles d'équations d'un degré supérieur à plusieurs inconnues. Maximum d'un produit de deux facteurs ayant une somme constante. Minimum de la somme de deux facteurs ayant un produit constant (s'appuyer sur $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$) ; applications. Progressions arithmétiques et géométriques ; insertion de moyens proportionnels ; somme des termes. Théorie des logarithmes définis par deux progressions ; usage des tables ; caractéristiques négatives. Intérêts composés et annuités.

Géométrie. Revision du 3me Livre de Legendre. Polygones réguliers. Mesures du cercle et de la circonférence. Détermination de π (méthode des isopérimètres). — Dans l'espace : droites et plans, parallèles, perpendiculaires ; mesure de l'angle dièdre, égalité des trièdres.

Trigonométrie. Définitions des lignes trigonométriques ; formules relatives au triangle rectangle. Usage des tables, calculs numériques, applications. (3 h.)

Rhétorique. — *Algèbre*. Progressions, logarithmes, intérêts composés, annuités, emprunts, rentes viagères.

Géométrie. Revision du 5me livre. Propriétés fondamentales du

prisme, de la pyramide, mesures des volumes et des surfaces de ces corps et des troncs de prisme et de pyramide.

Sphère. Sections planes, plans tangents, intersection de deux sphères, pôle d'un cercle tracé sur la sphère; triangle sphérique, sa mesure. — Surfaces et volumes du cylindre, du cône, du cône tronqué, de la sphère.

Trigonométrie. Formules fondamentales, résolution des triangles quelconques; exercices numériques. Applications topographiques faciles : graphomètre, niveau. (3 h.)

Humanités modernes.

Septième et Sixième. — Même programme que pour les mêmes classes des humanités anciennes. (Chacune 3 h.)

Cinquième. — *Arithmétique.* Revision de la numération. Démonstration des opérations fondamentales sur les nombres entiers (moins la division), sur les fractions ordinaires, les nombres décimaux (en mettant ceux-ci sous forme de fractions ordinaires). Théorie des fractions généralisée. Principes et caractères de divisibilité des nombres. Proportions. Applications nombreuses aux questions d'intérêt simple, d'escompte, de société, de mélange; formules générales relatives à la résolution de ces problèmes. Applications numériques.

Algèbre. Transformation des égalités. Résolution de l'équation du 1er degré à une inconnue. Résolution de problèmes numériques et littéraux. Application des formules trouvées à des exemples numériques (en particulier intérêt, escompte, mélanges et alliages).

Géométrie. Définitions et notions préliminaires. Egalité des triangles. Théorie des perpendiculaires, des obliques, des parallèles; somme des angles d'un triangle et d'un polygone quelconque. Quadrilatère. Applications; constructions avec données numériques au moyen de la règle et du compas. (4 h.)

Quatrième. — *Arithmétique.* Revision des principes et caractères de divisibilité. Théorie du p.g.c.d. par divisions successives. Décomposition des nombres en facteurs premiers. Recherche de tous les diviseurs d'un nombre, du p.g.c.d. et du p.p.c.m. de plusieurs nombres. Détermination du p.p.c.m. à l'aide du p.g.c.d. Démonstration de la règle de division des nombres entiers.

Algèbre. Résolution des systèmes d'équations du 1er degré à deux et à plusieurs inconnues. Résolution de problèmes généraux. Application des formules à des exemples numériques. Interprétation des valeurs négatives, infinies, indéterminées. Opérations fondamentales sur les quantités algébriques; carré et cube d'un binôme. Divisibilité d'un polynôme entier en x par $x - a$; application à la division de $x^m \pm a^m$ par $x \pm a$. Forme du quotient.

Fractions algébriques : opérations et simplification. Carré et racine carrée des nombres et des polynômes algébriques. Calcul des radicaux du second degré. Résolution de l'équation du second degré. Problèmes.

Géométrie. Revision du cours précédent. Propriétés principales du cercle et des figures qui résultent de sa combinaison avec la ligne droite. Mesure des angles. Problèmes. Mesures des aires planes. Relations entre les éléments d'un triangle. Longueurs proportionnelles. Figures semblables. Calcul numérique des éléments des triangles. Problèmes. (4 h.)

Troisième. — *Section scientifique.* Revision du cours de quatrième.

Arithmétique. Théorie générale de la divisibilité des nombres, du p. g. c. d. Théorie des nombres premiers. Théorèmes de Fermat et de Wilson. Conversion des fractions ordinaires en fractions décimales et réciproquement. Approximations numériques. Principales mesures anciennes en usage dans le pays. Principales mesures étrangères; leur réduction en mesures décimales. Opérations sur les nombres complexes. Racine cubique.

Algèbre. Discussion des systèmes d'équations générales du premier degré à une et deux inconnues. Discussion complète de l'équation générale du second degré. Equations réductibles au second degré. Réduction des expressions de la forme

$$\sqrt{a + \sqrt{b}}\,, \qquad \sqrt{a + b\sqrt{-1}}\,.$$

Propriétés des trinômes du second degré. Questions de maximum dépendant du trinôme du second degré. Progressions ; problèmes. Théorie des logarithmes par les progressions. Usage des tables. Application aux questions d'intérêts composés et aux annuités.

Géométrie. Polygones réguliers. Mesure du cercle. Détermination de π. Problèmes. Notions sur la théorie des transversales.

Trigonométrie rectiligne. Relations entre les lignes trigonométriques. Arcs multiples qui correspondent à une ligne trigonométrique donnée. Formules fondamentales. Discussion et transformation de ces formules. Construction et usage des tables trigonométriques. Résolution des triangles. Calculs numériques. Application des formules à la résolution de divers problèmes.

Arpentage. Nivellement. Lever des plans à l'équerre, au graphomètre et à la planchette. (6 h.)

Section commerciale et industrielle. Revision de ce qui a été vu en quatrième en algèbre et géométrie.

Algèbre. Propriétés des racines de l'équation du second degré. Discussion des racines. Résolution de quelques systèmes symétriques d'équations tels que $x + y = a$, $xy = b$; $x^2 + y^2 = a$, $xy = b$; $x^2 + y^2 = a$, $x + y = b$. Notions sommaires sur les

exposants fractionnaires et négatifs. Progressions; insertion de moyens entre deux nombres donnés, somme des termes. Logarithmes définis par deux progressions. Logarithmes d'un produit, d'un quotient, d'une puissance, d'une racine. Logarithmes à base 10 : propriétés spéciales, logarithmes à caractéristique négative; usage des tables.

Opérations financières à long terme. Intérêts composés, taux équivalents, taux proportionnels. Escompte. Relations entre l'escompte et l'intérêt. Intérêts anticipés. Echéance commune. Echéance moyenne. Annuités constantes et certaines. Problèmes fondamentaux. Valeur actuelle. Annuité anticipée. Annuité différée. Perpétuité. Nombreux exemples numériques. Usage des tables d'intérêt composé.

Géométrie. Polygones réguliers; généralités. Inscrire à une circonférence les polygones réguliers de 4, 6, 8, 10, 5 côtés; calculer le côté, l'apothème et la surface en fonction du rayon. Longueur de la circonférence et aire du cercle; aire du secteur circulaire.

Arpentage. Lever des plans à l'équerre, à la planchette, au graphomètre, à la boussole. Nivellement. Exercices sur le terrain.

Seconde. — *Section scientifique.* Revision du cours de troisième avec de nombreuses applications.

Arithmétique. Théorie des différents systèmes de numération, des opérations fondamentales sur les nombres entiers dans un système quelconque. Caractère de divisibilité par un diviseur de $B^n + 1$. Méthodes abrégées pour effectuer la multiplication, la division, l'extraction de la racine carrée.

Algèbre. Emploi des coefficients indéterminés. Application de la méthode des coefficients indéterminés à la théorie de la division, à la recherche de la racine d'un polynôme, à la recherche des relations qui doivent exister entre les coefficients d'une expression algébrique pour qu'elle satisfasse à certaines conditions; à la résolution des équations du premier degré. Maximum d'un produit $x^m y^n$ quand $ax + by$ est constant. Maximum ou minimum d'une fonction du second degré à deux variables. Fractions continues; propriétés des réduites, fractions continues périodiques. Analyse indéterminée du premier degré. Théorie des arrangements, permutations, combinaisons avec et sans répétition. Binôme de Newton. Formation des puissances d'un polynôme, etc. Puissances et racines des monômes, supérieures à celles du second degré. Calcul des radicaux, exposants fractionnaires ou négatifs, équations exponentielles. Théorie des logarithmes par l'équation exponentielle. Concordance des deux définitions, module. Logarithmes népériens.

Géométrie plane. Divisions et faisceaux harmoniques et anharmoniques. Pôles et polaires. Théorèmes de Pascal et de Brianchon pour le cercle. Nombreux exercices sur la géométrie.

Géométrie dans l'espace. Du plan et des lignes droites considérées dans l'espace. Mesure de l'angle dièdre, propriétés principales de l'angle solide, trièdres supplémentaires. Propriétés principales des polyèdres, leur volume et leur surface convexe. Théorie de la similitude et de la symétrie : plans, axes et centres de symétrie. Triangles sphériques. Propriétés principales du cylindre, du cône, de la sphère; surface convexe et volume de ces corps et des segments. Polyèdres réguliers. (6 h.

Section commerciale et industrielle. Revision du cours de troisième. — *Algèbre.* Nombre de permutations de *n* lettres. Nombre des arrangements et nombre des combinaisons simples de *m* lettres *n* à *n*. Formule du binôme de Newton pour un exposant entier positif (avec démonstration) et pour un exposant fractionnaire ou négatif (sans démonstration). Opérations financières à long terme. Problèmes généraux relatifs aux emprunts remboursables par annuités constantes. Théorie de l'amortissement de ces emprunts et rentes sur l'Etat. Caisse d'amortissement. Système ordinaire de l'amortissement progressif.

Géométrie. Théorie des plans; droites perpendiculaires, obliques parallèles à des plans; plans parallèles; angles dièdres; plans perpendiculaires; angles trièdres et leurs propriétés (sauf trièdres supplémentaires); somme des faces d'un angle solide convexe. Prismes, parallélipipède; propriétés, volume. Pyramide : section parallèle à la base, volume. Volume du tronc de pyramide et du tronc de prisme triangulaire. Exercices numériques sur le calcul des volumes. Polyèdres semblables : définition, rapport des surfaces et rapport des volumes (sans démonstration). Description sommaire des polyèdres réguliers convexes.

Trigonométrie. Principales formules de la géométrie non étudiées en troisième. Relations fondamentales entre les éléments des triangles rectilignes quelconques; résolution de ces triangles. Applications numériques et topographiques. (3 h.

Rhétorique. — *Section scientifique.* Revision approfondie des théories principales de l'arithmétique, de l'algèbre et de la trigonométrie avec de nouvelles applications de ces théories. Théorie élémentaire des déterminants à deux et trois lignes. Définitions. Déterminants de divers ordres, théorèmes et propriétés élémentaires du calcul des déterminants. Application à la résolution d'un système de *n* équations du premier degré.

Trigonométrie sphérique. Les formules relatives aux triangles. Résolution des triangles déterminés par des côtés et des angles donnés et quelques autres cas plus simples. Excès sphérique. Rayons sphériques des cercles inscrits et circonscrits. Distance de deux points sur la sphère terrestre. Réduction d'un angle à l'horizon. Volume du parallélipipède et du tétraèdre en fonction des arêtes et des angles. Exercices.

Géométrie analytique. Principes de l'homogénéité. Construction des expressions algébriques. Problèmes déterminés. Coordonnées rectilignes, leurs transformations, coordonnées polaires. Diverses formes de l'équation de la droite, intersection de deux droites, angles de deux droites, équations des bissectrices des angles de deux droites. Construction et discussion des équations du second degré à deux variables. Invariant et discriminant. Théorie générale des tangentes, du centre, des diamètres, des axes, des asymptotes, des foyers, des pôles et polaires. Simplification de l'équation générale du deuxième degré à deux variables. Formes particulières de l'équation lorsque la courbe est assujettie à certaines conditions. Notations abrégées. Propriétés particulières des courbes du second degré, démonstrations analytiques et géométriques. Construction et discussion des lieux géométriques représentés par des équations en coordonnées polaires. Problèmes. Sections du cône. Théorèmes généraux sur les coniques. Intersection et similitude de deux coniques.

Géométrie descriptive. Notions préliminaires. Théorèmes et problèmes relatifs au point, à la ligne droite et au plan. Rabattements et rotations dans les cas les plus simples. Polyèdres les plus simples; sections et développement. (8 h.)

Section industrielle et commerciale. Revision du cours de seconde. — *Algèbre.* Opérations financières à long terme. Emprunts par obligations. Tableaux d'amortissement et formules relatives à ces emprunts. Complications dans le service des titres. Emprunts avec lots. Emissions publiques d'obligations. Amortissement des emprunts dont le service est fait par annuités variant en progression. Opérations viagères sur une seule tête. Symboles de commutation et usage des tables numériques pour le calcul des primes. Notation universelle.

Géométrie. La sphère et les figures qui y sont tracées, sauf la théorie des triangles polaires. Surfaces et volumes du cylindre, du cône et du tronc de cône de révolution. Surface de la sphère et de la zone sphérique. Volume de la sphère. Exercices numériques. (2 h.)

Pour la section des humanités latines, le programme est le même que pour la section scientifique.

A signaler tout particulièrement l'étude détaillée des principales questions d'algèbre financière, des opérations viagères, d'assurances et de rentes dans un pays essentiellment industriel, où les questions de mutualité et de retraite sont à l'ordre du jour et se développent avec une rapidité remarquable. Pour les élèves de la rhétorique, des humanités anciennes surtout, l'attrait est d'autant plus grand que la plupart d'entre eux, au moins les magistrats et les avocats, devront s'occuper ultérieurement de ces questions. Mais l'intérêt est bien plus attachant encore pour les élèves de la

section commerciale, au moment où les Belges, guidés par leur Roi, dirigent leurs regards vers la mer, et où la nation vient d'être dotée d'une magnifique colonie, le Congo belge, dont on peut tirer le plus grand espoir pour l'avenir. Aussi, cette section, désertée jadis, se peuple de plus en plus et beaucoup de nos jeunes gens renoncent aux études techniques, pour suivre les cours des nombreuses sections commerciales supérieures. Sous peu, grâce à l'initiative d'un souverain éclairé et tenace, notre pays sera doté d'une école coloniale mondiale.

La réforme des études dans cette section est toute récente ; elle date de 1904 ; on peut attendre de son auteur, M. Klompers, actuellement directeur général de l'enseignement moyen, d'autres réformes non moins importantes. Sous l'impulsion de M. Klompers encore et de M. Ploumen, inspecteur de l'enseignement scientifique, l'étude des mathématiques dans la section scientifique a pris dans ces dernières années une autre direction et s'inspire des idées modernes. Les méthodes actuelles se rapprochent, quant au fond, des procédés en usage dans les lycées français ; les questions du concours général ont quelques analogies avec celles du baccalauréat et de l'Ecole Centrale. Les représentations graphiques s'allient aux discussions minutieuses dans des questions où interviennent les diverses matières étudiées et la théorie de l'équation du second degré, toujours si neuve dans ses multiples applications, est mise largement à contribution. Du reste, les professeurs ont soin de donner à l'interprétation du programme son extension la plus large, et la longue énumération ci-dessus ne peut donner qu'une idée assez vague de son étendue. L'étude de la géométrie gagnerait certainement beaucoup à puiser aux mêmes sources, en s'inspirant des principes modernes, et il n'est pas douteux qu'avec de tels promoteurs cette réforme ne devienne bientôt un fait accompli. D'ailleurs, dans beaucoup d'athénées, on enseigne déjà les éléments de la théorie de l'homothétie, de l'inversion, des formes projectives et perspectives, de l'involution, de la géométrie des triangles, des imaginaires, etc.

D'un autre côté, une commission spéciale, ayant à sa tête M. Mansion, professeur à l'Université de Gand, est chargée d'élaborer un nouveau plan d'études ; on attend avec impatience les résultats de ses délibérations. L'année dernière, le corps professoral a été consulté au sujet de l'opportunité de l'introduction des éléments de la théorie des dérivées dans l'enseignement moyen ; cette idée a été favorablement accueillie par la grande majorité du personnel, et on peut espérer sa prochaine réalisation. De plus, M. Mansion et plusieurs de ses disciples sont partisans de la création d'une rhétorique supérieure qui, pour les mathématiques, serait analogue à l'année de mathématiques spéciales des lycées français, et qui permettrait de donner à l'enseignement universi-

taire une ampleur beaucoup plus grande que celle que lui confère sa situation actuelle.

Comme on le voit, l'enseignement belge n'aura bientôt plus rien à envier à celui des autres nations, du moins au point de vue mathématique; dans certains domaines même, notre pays a devancé les autres peuples en réalisant des réformes importantes. Singulière coïncidence! C'est au moment où, grâce aux efforts persévérants de quelques hommes de valeur et sous l'égide de l'*Enseignement mathématique*, le monde savant est saisi d'un projet d'entente internationale à ce sujet, que l'on voit chaque pays réaliser dans sa sphère d'action quelques-unes des réformes préconisées. Et je salue l'aurore du jour tout proche où, sur le terrain mathématique, l'enseignement ne connaîtra plus de frontières, chaque pays conservant son caractère distinctif, mais puisant aux mêmes sources vivifiantes les idées directrices et les principes généraux. Et si à cela on pouvait ajouter un idiome mathématique unique par l'emploi d'une langue scientifique universelle, judicieusement choisie, quel beau rêve on aurait réalisé! Mais ce n'est qu'un rêve! L'avenir se chargera peut-être de son exécution?

III. — Enseignement supérieur.

L'enseignement supérieur est confié aux *Universités* de Gand, Liège, Bruxelles et Louvain. Les deux dernières sont des établissements libres, l'une catholique, l'autre libérale; les deux autres sont des établissements de l'Etat. Le programme est le même pour les quatre Universités, et elles ont le droit de conférer des diplômes légaux. Elles comprennent quatre facultés: philosophie et lettres, droit, médecine, sciences; à cette dernière sont rattachées les écoles spéciales ou faculté technique. Nul ne peut suivre les cours d'une faculté s'il ne présente le certificat fin d'études délivré par l'un des établissements d'instruction moyenne dont il a été question ci-dessus ou s'il ne subit, devant la faculté, un examen équivalent. Toutefois, les élèves des écoles spéciales doivent subir un examen portant sur le programme des trois années de la section scientifique et le certificat mentionné ne peut les en dispenser. Chacune des Universités de l'Etat a une faculté technique ayant un caractère spécial; à Gand, c'est l'école du génie civil (ponts et chaussées), à Liège, l'école des Mines et l'Institut électrotechnique Montefiore. Toutes deux ont en outre une section des Arts et Manufactures délivrant des diplômes d'ingénieur-mécanicien, ingénieur-chimiste, ingénieur industriel. Les deux autres Universités délivrent des diplômes analogues et possèdent les deux genres d'études.

En ce qui concerne le *doctorat en sciences physiques et mathé-*

matiques, qui nous intéresse plus particulièrement, son programme se répartit sur *quatre années:*

Candidature. Première épreuve : Géométrie analytique plane et de l'espace. Géométrie descriptive. Algèbre supérieure et éléments de la théorie des déterminants. Calcul différentiel et calcul intégral (1re partie). Statique analytique. Physique expérimentale. Travaux pratiques de physique.

Deuxième épreuve : Logique, psychologie, philosophie morale. Géométrie projective. Calcul intégral (2me partie), éléments du calcul des variations et des différences. Cinématique pure. Astronomie physique. Eléments de chimie minérale. Cristallographie et travaux pratiques.

Doctorat. Première épreuve : Analyse supérieure. Dynamique. Physique mathématique générale. Astronomie sphérique et éléments d'astronomie mathématique. Eléments du calcul des probabilités avec théorie des moindres carrés.

Deuxième épreuve : Méthodologie mathématique et éléments de l'histoire des sciences physiques et mathématiques. Une épreuve approfondie sur les matières comprises dans *l'un des cinq groupes suivants* au choix du candidat : A. Analyse supérieure. B. Géométrie supérieure. C. Compléments de mécanique analytique et mécanique céleste. D. Astronomie mathématique et géodésie. E. Physique expérimentale et physique mathématique.

Ces candidats doivent présenter et défendre publiquement une dissertation, manuscrite ou imprimée, sur une ou plusieurs questions se rapportant au groupe de matières choisi pour l'examen approfondi. Les aspirants qui se destinent à l'enseignement moyen devront faire deux leçons publiques, l'une sur les mathématiques, l'autre sur la physique expérimentale. Les sujets de ces leçons sont désignés d'avance par le jury et choisis dans le programme des athénées.

Les deux épreuves de la candidature *d'ingénieur* (grade légal) comportent le même programme que celui de la candidature en sciences physiques et mathématiques, sauf la logique, psychologie et morale, la géométrie projective et la cristallographie ; mais il y figure en plus : la géométrie descriptive appliquée (coupe des pierres), la chimie organique, la graphostatique et la dynamique. Les trois autres épreuves se rapportent à des matières d'ordre technique.

Ce qui est à remarquer dans le programme de doctorat, c'est l'introduction des éléments de l'histoire des mathématiques et de la méthodologie mathématique. Et dans ce dernier cours, à l'Université de Gand du moins, on traite une foule de questions non développées dans les autres cours : les éléments de l'arithmétique supérieure, la géométrie non euclidienne, etc. Mais, d'un autre côté, pas de séminaires comme dans les Universités allemandes ; les

élèves sont saturés de théorie, mais de pratique point ou presque pas. Cela tient beaucoup à ce que les cours de la candidature sont les mêmes que ceux des candidats ingénieurs ; de plus, le nombre restreint d'athénées exigeant peu de professeurs, la faculté mathématique ne compte que très peu d'élèves. De même, la spécialisation ne se produit en réalité que la dernière année ; les futurs docteurs ont donc très peu de matériaux pour la rédaction de leur thèse ; c'est ce qui explique le petit nombre de thèses remarquables écrites par les jeunes professeurs belges. Sans doute, ils ont les éléments pour produire ultérieurement; mais, beaucoup sollicités par leurs fonctions absorbantes, éloignés des centres universitaires dans des milieux peu favorables à leur développement scientifique, se voient faute de loisirs et de moyens, obligés d'abandonner des études parfois si heureusement commencées. La création d'une rhétorique supérieure, préconisée par M. Mansion, remédierait à cet état de choses; en débarrassânt la candidature de certains cours, on pourrait donner aux autres branches plus d'ampleur et les études du doctorat pourraient être plus étendues et plus approfondies. Encore une fois, j'ai la plus entière confiance dans la réalisation prochaine de ces réformes. On aura bientôt le plaisir de les voir porter leurs fruits.

J'espère que ce rapide aperçu permettra au lecteur de se former une idée de l'enseignement mathématique belge. Pour être complet, il y aurait lieu de citer encore l'Ecole des Mines de Mons, qui fournit à la riche et industrielle province de Hainaut un grand nombre d'ingénieurs distingués. C'est une école provinciale subsidiée par le haut commerce et la grande industrie. Mentionnons, pour mémoire, le magnifique essor qu'a pris dans ces dernières années l'enseignement professionnel donné aux ouvriers dans de nombreuses écoles industrielles du dimanche. Nos braves travailleurs y complètent leur instruction technique et fournissent à notre industrie d'excellents ouvriers et chefs d'atelier. C'est un spectacle réellement édifiant que de voir ces figures mâles et énergiques sacrifier une bonne partie de leurs loisirs hebdomadaires et ces mains calleuses délaisser les grossiers outils pour le tire-lignes du dessinateur. N'est-ce pas là l'explication de la renommée universelle dont jouissent l'industrie et le commerce de ma patrie ?

J. Rose (Chimay).

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sur les opérations entre nombres décimaux approchés.

1. — Dans la Note que l'*Enseignement mathématique* (p. 66, tome X, 1908) a consacrée à *une page élémentaire de Lagrange*, on recommande un procédé pour la multiplication de deux nombres décimaux approchés, que moi-même j'ai recommandé et justifié en 1904 (dans le *Periodico di Matematica*).

J'ai aussi donné, par la même occasion, un critérium pour obtenir le quotient de deux nombres décimaux approchés, sans une approximation illusoire; et ce critérium, que je justifie, consiste précisément à arrêter le diviseur quand le quotient a un chiffre de plus que celui des deux nombres (sur lesquels on opère) qui en a le moins. Cependant, à propos de la multiplication, il est nécessaire d'observer que la règle donnée par l'*arithmétique élémentaire* ordinaire, pour placer la virgule dans le produit, ne peut plus servir et qu'il faut donc une règle différente.

2. — Supposant connus les éléments de l'*algèbre,* j'ai trouvé plus opportun (*Periodico di Matematica*, 1895) d'appeler *ordre* d'un chiffre décimal « le nombre donnant le rang qu'il occupe en « comptant à partir du chiffre qui suit l'unités et attribuant à ce nombre « le signe + ou le signe —, suivant que l'on compte vers la gauche ou vers la droite. »

L'ordre d'un chiffre sera ainsi l'exposant de la puissance de 10 par laquelle le chiffre lui-même devrait être multiplié pour passer de sa valeur absolue (au sens de l'arithmétique élémentaire) à sa valeur relative. De cette définition, qui n'est peut-être pas nouvelle, dérivent d'importantes simplifications pour le calcul des nombres décimaux.

3. — Pour la règle en question (§ 1), il suffit d'observer que le dernier chiffre du premier produit partiel (qui correspond au premier chiffre, à gauche, du multiplicateur) a pour ordre la somme des ordres du dernier chiffre du multiplicande et du premier chiffre du multiplicateur.

```
   0,682
57,893784
---------
  34,10
    4774
     5456
      6138
       2046
---------
39,48
```

Ainsi, dans l'exemple ci-contre, les ordres du premier chiffre du multiplicateur et du dernier chiffre du multiplicande étant + 1 et — 3, l'ordre du dernier chiffre du premier produit partiel sera 1 + (— 3) = — 2.

4. — Pour placer la virgule dans le quotient, arrêté grâce au critérium indiqué (§ 1), il ne s'en suivra aucune règle nouvelle, mais de la définition précédente (§ 2) il résulte une règle beaucoup plus simple que celle de l'*arithmétique élémentaire* et qui peut s'appliquer plus opportunément, même quand la division est effectuée par le procédé ordinaire.

En effet, il suffit d'observer que l'ordre du premier chiffre du quotient doit être égal à l'ordre (connu) du dernier chiffre du premier produit partiel diminué de l'ordre du dernier chiffre du diviseur.

```
(I)  7,25738 : 0,34          (II)  0,067    : 612,3
     68       -------               6123    ---------
     --        21,3                 ----     0,000109
      45                             577
      34                             55107
      ---                            -----
      117                             2593
      102
      ---
       15
```

Ainsi, dans l'exemple ci-dessus (I), — 2 étant l'ordre du dernier chiffre du diviseur et — 1 l'ordre du dernier chiffre du premier produit partiel, l'ordre du premier chiffre du quotient sera — 1 — (— 2) = + 1. De même, dans l'exemple (II), on aura — 5 — (— 1) = — 4 par l'ordre du même premier chiffre du quotient.

5. — Un autre exemple des simplifications sus-mentionnées (§ 2) est donné par la recherche de la caractéristique du logarithme d'un nombre plus grand ou plus petit que l'unité, puisqu'elle est évidemment toujours égale à l'ordre du premier chiffre significatif du nombre lui-même. Ceci est, en substance, la règle donnée par Caillet (*Tables des logarithmes et co-logarithmes des nombres et des lignes trigonométriques*, Vannes, 1890).

On a encore d'autres simplifications notables dans l'usage de la règle à calcul et dans l'exposition de toute la théorie des approximations numériques.

Livourne, avril 1909. G. Pesci.

Notations rationnelles pour le système vectoriel[1].

9. — *Remarques de* M. Cargill-G. Knott (Edimbourg).

MM. Burali-Forti et Marcolongo estiment avoir établi le *système minimum* d'analyse vectorielle, applicable à une classe étendue de problèmes physiques. La meilleure manière de juger de la valeur de leur assertion est l'examen de leurs ouvrages, *Elementi di calcolo vettoriale* et *Omografie vettoriali* récemment parus. Le premier de ces ouvrages est étroitement lié au projet présenté dans l'*Enseignement mathématique*. L'*Omografie vettoriali* introduit un certain nombre de fonctions et opérateurs nouveaux qui ne se trouvent pas dans le système appelé Système minimum. Au reste, cette *Omografie* n'est pas autre chose que la fonction vectorielle linéaire d'Hamilton, sans laquelle aucun progrès ne peut s'accomplir dans les applications physiques. Les auteurs introduisent dans leur *Elementi* une fonction K_σ qui appartient à l'*Omografie* et n'a pas de place dans leur système minimum ; ils prouvent ainsi l'insuffisance de ce système pour leur propre usage élémentaire.

Il n'est réellement pas facile de comprendre exactement ce qu'ils entendent par un système minimum. Est-ce un système basé sur le plus petit nombre possible d'axiomes, postulats ou définitions? Ou bien le terme minimum s'applique-t-il au nombre de symboles d'opérations et de symboles de fonctions distincts qui doivent être introduits en plus de ceux généralement acceptés en mathématiques? Pour trouver une réponse à ces questions, comparons leur système, tel qu'il se présente dans leur projet, avec les systèmes d'Hamilton et de Gibbs.

Les vecteurs et les scalaires sont théoriquement communs à tous; mais le vecteur d'Hamilton a une signification plus étendue, comprenant le « quadrantal versor », parce que les « quadrantal versors » se composent, suivant la loi du parallélogramme qui est la loi fondamentale distinguant les vecteurs des autres quantités orientées ou non orientées.

Le produit complet de vecteurs, **ab**, **abc**, etc., n'est admis que par Hamilton.

Les fonctions $\mathrm{V}\mathbf{ab}$, $\mathrm{S}\mathbf{ab}$; $\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$; $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$; sont pratiquement identiques.

Il me semble que, sous ce rapport, la distinction faite par MM. Burali-Forti et Marcolongo entre les « symboles d'opérations » et les « symboles de fonctions » est purement artificielle. Par exemple, ils emploient sin **ab** pour indiquer le sinus de l'angle compris entre **a** et **b**, symbole de fonction; mais alors même que cette quantité est une partie tout aussi importante de $\mathrm{V}\mathbf{ab}$ que toute

[1] Voir l'*Ens. math.*, XIe année, 1909, n° du 15 janvier, p. 41-45; n° du 15 mars, p. 124-134; n° du 15 mai, p. 211-217; n° du 15 juillet, p. 381; n° du 15 novembre, p. 459-466.

autre quantité comprise, ils utilisent pour cette fonction généralisée le « symbole d'opération » $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

L'opérateur différentiel vectoriel ∇, que Tait a si puissamment développé avec la méthode de calcul d'Hamilton, n'est que partiellement représenté, dans le système de Gibbs, par ∇, $\nabla.$, $\nabla\times$ et dans le projet de « système minimum » par *grad*, *div*, *rot*. De plus, ces expressions doivent être déterminées comme opérateurs ou fonctions, tandis que dans le système d'Hamilton la seule définition ∇ embrasse le tout.

Le i et le $e^{i\varphi}$ que MM. Burali-Forti et Marcolongo introduisent pour les rotations dans un plan sont des cas particuliers du *verseur* d'Hamilton, ce dernier étant un élément important de son système. Ces expressions n'ont aucune relation logique avec la méthode vectorielle des analystes italiens et leur introduction est une confession implicite de faiblesse inhérente à leur système.

La fonction vectorielle linéaire Φ de Hamilton est utilisée par Gibbs, mais ne se trouve pas dans le « système minimum ». Les auteurs se rendent compte de cette omission en développant la théorie dans leur volume supplémentaire *Omografie vettoriali*. A part des changements superficiels de notations et la particularisation de certaines fonctions, il n'y a rien d'essentiel dans ce livre qui ne se trouve déjà dans les traités d'Hamilton et de Tait. Leurs notations $\frac{du}{dP}$ et $\frac{d\mathbf{u}}{dP}$ sont simplement $S(\ )\nabla.u$ et $S(\ )\nabla.\mathbf{u}$ et sont par conséquent complètement traités dans le système d'Hamilton sans qu'il soit nécessaire d'introduire ou de définir de nouveaux opérateurs.

Nous voyons donc que, en ce qui concerne l'économie de définition ou de symbolisme, le projet présenté par MM. Burali-Forti et Marcolongo n'est en rien supérieur à celui de Gibbs. Nous voyons également que ce qui, dans le système d'Hamilton, s'obtient au moyen des symboles caractéristiques S, V, ∇, Φ exige dans le « système minimum » 11 (ou tout au moins 9) symboles d'opérations et de fonctions, savoir : $\times$, $\wedge$, grad, rot, div, Δ, Δ', α, grad α, $\frac{du}{dP}$, $\frac{d\mathbf{u}}{dP}$. Pour prouver cette assertion, je donne ici les expressions équivalentes :

$S\mathbf{ab} = -\,\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	$\mathbf{ab}$ } seulement dans Hamilton.
$V\mathbf{ab} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$	$\nabla\mathbf{u}$ }
$\nabla u = \text{grad}\ u$	$\Phi = \alpha$
$V\nabla\mathbf{u} = \text{rot}\ \mathbf{u}$	$\Phi\nabla = \text{grad}\ \alpha$
$S\nabla\mathbf{u} = \text{div}\ \mathbf{u}$	$St\nabla.\mathbf{u} = -\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{t}$
$\nabla^2 u = -\,\Delta u$	
$\nabla^2\mathbf{u} = -\,\Delta'\mathbf{u}$	$St\nabla.u = -\frac{du}{dP}\mathbf{t}$

Δ et Δ' peuvent être supprimés puisqu'ils peuvent être exprimés au moyen de *grad*, *rot* et *div*.

$$\nabla^2 u = \nabla\nabla u = S\nabla(\nabla u)$$
$$= - \text{div grad } u \ .$$

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla\nabla\mathbf{u} = \nabla S\nabla\mathbf{u} + V\nabla V\nabla\mathbf{u}$$
$$= - \text{grad div } \mathbf{u} + \text{rot rot } \mathbf{u} \ .$$

Dans le calcul d'Hamilton, ce sont des *identités* obtenues par des transformations évidentes.

Toutes ces complications de *grad*, *rot* et *div* proviennent de ce que bien des auteurs d'analyse vectorielle négligent le produit complet de vecteurs. C'est ce fait que je me propose d'examiner avec quelques détails.

L'introduction d'un vecteur comme symbole d'une quantité susceptible des opérations généralisées de multiplication et de division est due à Hamilton. Avant le développement de son calcul, la seule loi reconnue pour les vecteurs était la loi intitulée : loi du parallélogramme, loi de la composition et décomposition des vitesses et des forces. Ayant défini le vecteur comme une quantité satisfaisant à la loi du parallélogramme, l'analyste doit examiner la signification qu'il faut attacher à un produit ou à un quotient de vecteurs. Cette signification doit être obtenue par le moyen géométrique le plus simple, tenant compte de l'interprétation analytique des procédés généralisés de multiplication et de division. Comme un produit de deux longueurs n'est pas une longueur, il n'y a pas de raison pour admettre *a priori* que le produit de deux vecteurs est un vecteur. Cela donne évidemment une quantité d'une certaine espèce. Ecrivons-la $\mathbf{ab} = p$. Si ces expressions doivent obéir aux lois admises pour les opérations algébriques, on pourra écrire $\mathbf{a} = p\mathbf{b}^{-1}$, $\mathbf{b} = \mathbf{a}^{-1}p$ et donner une interprétation du résultat. Il est géométriquement évident que le « bivecteur », le « produit vectoriel » appelé « extérieur » et le « produit scalaire » ou « intérieur » ne sont pas des produits dans le sens analytique complet. Les analystes qui considèrent l'une de ces trois notions comme produit fondamental, font une restriction dès le début, ils limitent ainsi arbitrairement le procédé même dont ils veulent faire usage.

Il peut sembler, à première vue, que l'omission du produit complet, le vrai produit aie peu d'importance puisqu'on peut, en considérant les applications simples, faire un grand nombre d'opérations en se limitant aux fonctions qui se rencontrent très fréquemment $V\mathbf{ab}$, $S\mathbf{ab}$, $V\mathbf{a}V\mathbf{bc}$, etc., dans lesquelles les vecteurs ne sont que par groupes de deux. Mais à mesure que nous avançons vers des applications plus compliquées, nous sommes ame-

nés à considérer des combinaisons de plus en plus complexes. De tels développements sont possibles et ne le sont que si nous admettons dès le début le produit complet de deux ou plusieurs vecteurs ainsi que la loi associative. Mais si nous limitons arbitrairement nos procédés et nos opérations comme le font MM. Burali-Forti et Marcolongo et bien d'autres, l'expérience nous prouve qu'il faut introduire de nouvelles fonctions et de nouveaux opérateurs par des définitions indépendantes.

Considérons par exemple l'opérateur différentiel vectoriel ∇. Toute sa puissance ne peut être complètement développée dans un système d'analyse vectorielle qui ne tient pas compte de la notion de produit complet de deux ou plusieurs vecteurs. MM. Burali-Forti et Marcolongo le reconnaissent lorsqu'ils disent : « Le symbole ∇ qui est bien approprié aux quaternions n'est pas applicable dans le système minimum », c'est-à-dire nullement *leur* système minimum. Mais il faut introduire les notions géométriques et physiques importantes qui y sont rattachées ; d'où la nécessité de l'introduction par des *définitions* de trois nouvelles fonctions *grad*, *rot*, *div*, et d'une discussion compliquée de leurs rapports et propriétés. Dans le système d'Hamilton, ces propriétés sont la conséquence naturelle du fait que ∇ est un opérateur vectoriel se comportant exactement comme un vecteur. Dans bien des cas ce sont de pures identités obtenues par les transformations les plus simples.

Une fois que l'existence du produit complet de vecteurs est admise, il est évidemment possible de multiplier la différentielle d'un vecteur par un autre vecteur. Si nous utilisons la forme trinôme de ∇, c'est-à-dire $i_1 d_1 + i_2 d_2 + i_3 d_3$ où d_1 d_2 d_3 sont des différentielles dans l'espace prises suivant les vecteurs unités perpendiculaires i_1 i_2 i_3, il est facile de comprendre l'effet de ∇ sur une fonction scalaire. C'est le gradient ou *grad*. Mais ∇ est un opérateur *vectoriel* et doit avoir une action sur un vecteur. Dans la forme développée

$$\nabla \mathbf{u} = i_1 d_1 \mathbf{u} + i_2 d_2 \mathbf{u} + i_3 d_3 \mathbf{u}$$

chaque terme est le produit de deux vecteurs et *n'introduit rien de nouveau dans l'analyse vectorielle complète.*

Nous pouvons également considérer la notation de Tait, qui définit ∇ par l'équation $du = -Sd\rho\nabla . u$, où du est la variation de u amenée par la variation de ρ, variable vectorielle dont u est une fonction scalaire. Multipliant par un vecteur unité quelconque et formant trois expressions semblables, nous obtenons par addition l'équation correspondante pour une fonction vectorielle $d\sigma = - Sd\rho\nabla . \sigma$. L'interprétation complète de ∇ se déduira facilement de ces équations. *Aucune définition supplémentaire n'est néces-*

saire; tout se déduit naturellement des principes fixes du calcul. L'opérateur ∇ entre dans les expressions, analytiquement, comme un vecteur, sa partie différentielle scalaire agissant sur la quantité variable *in situ*, que cette quantité soit scalaire ou vectorielle. ∇u, $V\nabla\sigma$, $S\nabla\sigma$, notations concises, parfaites, pour grad, rot, div, s'en déduisent immédiatement ainsi que leur interprétation. *Elles n'ont pas besoin d'être définies.* La loi associative nous permet d'écrire ∇^2 pour $\nabla\nabla\sigma$ lorsqu'on opère sur un vecteur aussi bien que sur une fonction scalaire; et ∇^2 est un opérateur scalaire, parce que le carré d'un vecteur est une quantité scalaire. Voir les transformations pour $\nabla^2 u$ et $\nabla^2\mathbf{u}$ données ci-dessus.

Les formes généralisées *grad-rot-div* équivalentes à Δ et Δ' que MM. Burali-Forti et Marcolongo présentent comme fondamentales, sont des formes plus compliquées pour exprimer ∇^2, à propos duquel ils disent: « Il n'est pas permis d'indiquer avec un même symbole (c'est-à-dire ∇^2) deux fonctions qui diffèrent non seulement par le champ d'application, mais aussi par leurs propriétés. » Cependant ∇^2 n'est ni plus ni moins que l'opérateur de Laplace changé de signe. Si nous prenons le vecteur

$$\mathbf{u} = i_1 u_1 + i_2 u_2 + i_3 u_3 ,$$

où $u_1\, u_2\, u_3$ sont les composantes de $\mathbf{u}$ et que nous lui appliquons ∇^2, nous aurons immédiatement

$$\nabla^2\mathbf{u} = i_1\nabla^2 u_1 + i_2\nabla^2 u_2 + i_3\nabla^2 u_3 .$$

Dire que l'opérateur de gauche diffère par ses propriétés des opérateurs de droite est un non sens; nous pourrions tout aussi bien dire que dans la différentielle ordinaire

$$d\mathbf{u} = i_1 du_1 + i_2 du_2 + i_3 du_3 ,$$

le d de gauche a des propriétés différentes des d de droite. Les divers *résultats* obtenus sont dûs non à l'opérateur, mais aux quantités sur lesquelles on opère. De même que d agit conformément à ses lois scalaires, que la quantité sur laquelle il opère soit scalaire ou vectorielle; de même ∇ agit conformément à ses propres lois vectorielles quelque soit le caractère de la quantité sur laquelle il opère.

Comme exemple probant de la concision et de la simplicité de l'emploi de ∇ dans le calcul d'Hamilton, nous pouvons prendre la transformation de $\nabla^2 V\sigma\tau$ où σ et τ sont 2 fonctions vectorielles du vecteur ρ, par rapport auxquelles ∇ est l'opération du différentiel vectoriel

$$\begin{aligned} \nabla^2 V\sigma\tau &= \nabla(\nabla_1 V\sigma_1\tau + \nabla_2 V\sigma\tau_2) , \\ &= \nabla_1^2 V\sigma_1\tau + \nabla_2\nabla_1 V\sigma_1\tau_2 + \nabla_1\nabla_2 V\sigma_1\tau_2 + \nabla_2^2 V\sigma\tau_2 , \\ &= - V\tau\nabla^2\sigma + 2S\nabla_1\nabla_2 \cdot V\sigma_1\tau_2 + V\sigma\nabla^2\tau . \end{aligned}$$

Dans ces expressions, l'indice indique sur quel vecteur l'opérateur agit momentanément. Le terme du milieu, à droite, est susceptible de bien des transformations et peut facilement être mis sous la forme semi-cartésienne

$$2\mathrm{V} \left\{ (\mathrm{S}i_1\nabla)\sigma(\mathrm{S}i_1\nabla)\tau + \quad \text{etc.} \right\}.$$

Comparons les formules (8) et (8′) de la page 62 de l'*Omografie Vettoriali*. Nous y trouvons également d'autres résultats qui, étant de simples identités lorsque le vrai ∇ est convenablement utilisé, ne nécessitent aucune démonstration.

Je crois que la confusion actuelle de pensée et de notation est due, en partie, à un usage impropre des termes : *Produit vectoriel*, *Produit scalaire*, *Produit interne*, etc. ; car ces fonctions ne sont pas des produits dans le sens analytique complet du terme. Hamilton appelait $\mathrm{V}\alpha\beta$ la partie vectorielle du produit $\alpha\beta$ et il l'écrivait tel qu'il la concevait. Sa notation est, en fait, une notation abrégée du même genre que sin θ, tang θ, log x, cos θ, etc. ; et l'expérience prouve que les notations naissant spontanément d'une méthode sont parmi les meilleures. Le principe à la base de notre notation mathématique est la contraction de mots et de phrases — f et F pour fonction, d pour différentielle, Σ, $\int$ pour sommation (intégration), et ainsi de suite. Un des grands mérites de la notation d'Hamilton est sa formation systématique suivant un plan unique simple. Le ∇ lui-même, qui est simplement Δ retourné pour le distinguer du Δ des différences finies, est une forme correcte pour le symbole de différentiation vectorielle d'une méthode de calcul qui emploie systématiquement les lettres grecques pour désigner les vecteurs. De même Φ, qui est le F grec, est un symbole plus approprié pour représenter une fonction vectorielle, que le α par lequel les analystes italiens le remplacent.

Dans le système d'analyse vectorielle présenté par MM. Burali-Forti et Marcolongo, je ne trouve pas la même unité de méthode. Leurs notations sont d'origines diverses et dans bien des cas manquent de force d'expression. Les auteurs excluent arbitrairement la conception de produit complet de 2 vecteurs et se privent ainsi de l'usage du symbole de différentiation vectorielle dans l'espace. Ils comblent partiellement cette lacune par l'introduction ingénieuse d'au moins cinq opérateurs fonctionnels, grad, rot, div, $\frac{du}{dP}$, $\frac{d\mathbf{u}}{dP}$, opérateurs dont la forme n'indique en aucune façon la relation étroite qui les lie.

Les trois premiers sont sans doute formés d'après les principes de la notation d'Hamilton, mais avec ∇, V, S déjà en usage ils sont superflus. De même l'*Omografie* avec α, $\mathrm{V}\alpha$, $\mathrm{I}_1(\alpha)$, $\mathrm{I}_2(\alpha)$, $\mathrm{I}_3(\alpha)$, est identique à la fonction linéaire vectorielle d'Hamilton et à ses

invariants vectoriels et scalaires. En réalité, la prétention qu'un tel système est un système minimum dans un sens acceptable quelconque du mot n'est pas soutenable. Il n'y a aucune preuve que l'on puisse faire plus avec ce système qu'avec celui d'Hamilton et ce dernier est visiblement plus systématique dans ses notations, plus sobre dans son symbolisme et plus maniable dans ses opérations.

Hamilton appelait son système *Quaternions;* un grand nombre de mathématiciens entraînés par la conception d'un quaternion comme d'un nombre complexe de 4 termes unitaires ont protesté contre sa présence dans l'analyse vectorielle. Je ne connais aucune analyse vectorielle pratique qui n'utilise les relations hamiltoniennes

$$ij = k = -ji\,, \quad jk = i = -kj\,, \quad ki = j = -ik$$

avec 3 vecteurs unitaires perpendiculaires et qui ne fasse du carré d'un vecteur une quantité scalaire. Le produit effectué de 2 vecteurs $ai + bj + ck$, $ei + fj + gk$, donne une quantité comprenant 4 termes unitaires.

Un système qui admet la notion du produit de 2 vecteurs perpendiculaires, mais nie la possibilité du produit de 2 vecteurs non perpendiculaires, est illogique à la base et n'a aucun droit au nom de rationnel.

10. — *Opinion de* M. Alex. Macfarlane[1] (Chatham, Canada).

Mon opinion personnelle est que les propositions de MM. Burali-Forti et Marcolongo ne paraissent pas devoir contribuer beaucoup à la solution du problème de l'unification des notations ; de plus, ces propositions, si peu nombreuses soient-elles, contiennent plusieurs points défectueux, tels que l'introduction d'un nouveau symbole $\wedge$. Pourquoi augmenter encore l'anarchie existant déjà dans les notations au lieu de les diminuer. Si l'idée de généralisation était toujours présente à l'esprit, le raisonnement permettrait de se servir, dans un sens généralisé, des symboles qui existent en Analyse. Lorsque de tels symboles existent, l'introduction d'un symbole complètement nouveau est une entrave plutôt qu'une aide.

A mon avis, il faut obtenir l'unification ou la conciliation des principes des quaternions avec l'analyse vectorielle avant de pouvoir fixer la notation. Ceux-ci sont à la base du calcul géométrique qui est plus spécialement étudié par l'étudiant praticien.

[1] Voir le rapport présidentiel annuel de l'*International Association for Promoting the Study of Quaternions and allied Systems of Mathematics*, juin 1909, p. 13-14.

Pour lui, il faut avoir une méthode uniforme qui soit en accord parfait avec l'analyse scalaire à laquelle il est déjà accoutumé et qui renferme toutes les armes puissantes composant l'arsenal des quaternions et de l'analyse vectorielle. Il me semble donc que le premier pas doit être unification logique des quaternions et de l'analyse vectorielle entre eux et avec l'analyse scalaire.

Profitons de l'expérience de nos amis les électriciens. Ils ont discuté les principes et les définitions de leur science, puis ils ont fixé toutes les définitions dans une série de congrès; mais malheureusement, même pour leur science si fouillée, ils se sont trop pressés, comme Heaviside l'a montré, le système des unités électriques et magnétiques ne repose pas sur une base parfaitement rationnelle, d'où il s'en suit que les équations de cette science sont embarrassées par l'introduction, d'apparence arbitraire, du symbole *Π*. La circonspection et la discussion ne sont-elles pas bien plus nécessaires pour un sujet aussi vaste et aussi nouveau que celui du calcul géométrique?

II. — *Réponse de* MM. Burali-Forti *et* Marcolongo *à MM. Carvallo (Paris), Cargill-G. Knott (Edimbourg) et A. Macfarlane (Chatham).*

I. — Réponse a M. Carvallo[1].

Le changement de sujet n'implique pas le changement des notations, car les vecteurs et leurs opérations ne changent pas la nature et l'algorithme avec le changement de sujet. (Voir la réponse à M. Wilson.

« Si une loi inéluctable m'imposait une notation, j'adopterais celle de Grassmann, parce que cet auteur me parait avoir compris le premier toute l'étendue du domaine de son calcul. » Voir notre Note V « Per l'unificatione delle notazioni vettoriali », fin du § X et le § XI, où nous proclamions la nécessité d'adopter le système complet de Grassmann.

« Je ne suis donc pas partisan d'un système minimum qu'il faut abandonner quand on s'élève dans la généralité. » Voir notre Note V, § XI, n. 36, où les formations géométriques de Grassmann sont **déduites**, par abstraction, au moyen du système minimum.

Pour saisir d'une manière complète nos propositions, il est indispensable d'examiner non seulement le tableau de notations placé à la fin de notre Note IV et reproduit par l'*Ens. math.*, mais aussi les Notes elles-mêmes publiées dans les *Rendiconti del Circ. mat. di Palermo*.

---

[1] Voir l'*Ens. math.*, XI[e] année, n° 5, p. 381, 1909.

II. — Sur les remarques de M. G. Knott.

« Les vecteurs et scalaires sont théoriquement communs à tous ; mais le vecteur d'Hamilton a une signification plus étendue ». Nous avons adopté, moins la forme, la définition de vecteur que Hamilton même donne dans le Livre I ; néanmoins, selon M. Knott, nous avons donné au vecteur une signification moins étendue que celle d'Hamilton ?! Mais M. Knott continue : « ...comprenant le *quadrantal versor*, parce que les *quadrantal versors* se composent, suivant la loi du parallélogramme qui est la loi fondamentale distinguant les vecteurs des autres quantités orientées ou non orientées. » Les forces appliquées à un point, par exemple, se composent ainsi suivant la loi du parallélogramme : alors, par l'argumentation de M. Knott, on déduit que les vecteurs comprennent aussi les forces. M. Knott a-t-il quelque autre entité à identifier aux vecteurs ! Les bivecteurs de Grassmann, par exemple !

M. Knott trouve que la distinction entre les « symboles d'opération » et les « symboles de fonctions » est *purement artificielle*. Malheureusement cette distinction est si répandue chez les mathématiciens que nous ne pouvons pas personnellement la sacrifier en hommage aux remarques de M. Knott. Mais nous pouvons bien lui faire une concession. Nous voulons *utiliser* « le symbole d'opération $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ » (en réalité le symbole d'opération est simplement $\wedge$) en proposant d'écrire

$$\frac{\text{mod}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})}{\text{mod}\,\mathbf{a}\,.\,\text{mod}\,\mathbf{b}}$$

au lieu de $\sin(\mathbf{a}\,,\,\mathbf{b})$. Prendra-t-on en considération notre proposition ?!

Nous aussi nous avons remarqué[1] que i et $e^{i\varphi}$ sont des versors de Hamilton ; M. Knott veut bien nous le rappeler. « Ces expressions n'ont aucune relation logique avec la méthode des analystes italiens et leur introduction est une confession implicite de faiblesse inhérente à leur système. » Ceci est simplement étonnant ! Nous déduisons i et $e^{i\varphi}$ par notre système et les fils de celui-ci n'ont plus rien de commun avec leur père ! fils ingrats ! Notre système peut donner i et $e^{i\varphi}$ et il est faible, impuissant ?! M. Knott semble ne pas connaître la grande différence qui passe entre *l'algorithme général des quaternions* et celui des *quaternions coaxiaux* !

La correspondance entre nos symboles $\times$, $\wedge$, grad, rot, div, Δ, Δ', et les symboles S, V, ∇ de Hamilton nous est bien connue.

[1] *Per l'unificatione delle notazioni vettoriali* (*Rendiconti Circolo Matem. di Palermo*, T. XXIII-XXVI, Note I-V), Note III, § V.

De plus, nous avons donné cette correspondance en faisant usage des symboles I, I^{-1} de Hamilton[1], car on obtient ainsi des notations avec lesquelles des équivoques ou des déductions incorrectes ne sont pas possibles. M. Knott est-il bien certain que la correspondance pour nos symboles *α (omografia)* grad *α* soit celle qu'il affirme? La réduction avec les symboles I et I^{-1} sera très instructive pour M. Knott[2].

« Toutes ces complications (?!) de grad, rot et div proviennent de ce que bien des auteurs d'analyse vectorielle négligent le produit complet des vecteurs. C'est ce fait que je me propose d'examiner avec quelques détails. » Nous avons déjà exposé[3] tout ce qu'il est nécessaire pour reconnaître que l'examen de M. Knott est loin d'être concluant, car il se réfère à des vecteurs qui ne sont pas les *vrais* vecteurs de Hamilton. Mais la question est, en général, de telle importance que nous croyons nécessaire de répéter quelques-unes des considérations déjà faites.

Dans le Livre I, Hamilton considère le vecteur *non* « comme symbole d'une quantité susceptible des opérations généralisées de multiplication et de division », mais comme une entité géométrique B — A, D — C, ... telle que

$$B - A = D - C$$

seulement dans le cas que (moins la forme)

$$\frac{B + C}{2} = \frac{A + D}{2};$$

c'est-à-dire *comme une entité géométrique caractérisée par* GRANDEUR *et* DIRECTION (*et* SENS).

---

[1] *Per l'unificazione.....*, Note III, nos 15, 16, 17.

[2] La terne orthogonale-destrogira des vecteurs **i**, **j**, **k** soit fixée une fois pour toutes. Les vecteurs **u**, **v**, **w** étant donnés, l'homographie générale α telle que, quel que soit le vecteur **x**,

$$(1) \qquad \alpha\mathbf{x} = (\mathbf{u} \times \mathbf{x})\mathbf{i} + (\mathbf{v} \times \mathbf{x})\mathbf{j} + (\mathbf{w} \times \mathbf{x})\mathbf{k}$$

est déterminée. Réciproquement, α étant donné, les vecteurs **u**, **v**, **w** qui paraissent dans (1) sont déterminés, car

$$\mathbf{u} = K\alpha\mathbf{i}, \qquad \mathbf{v} = K\alpha\mathbf{j}, \qquad \mathbf{w} = K\alpha\mathbf{k}.$$

Donc, par l'*intermédiaire* de **i**, **j**, **k** on peut établir une *correspondance univoque et réciproque* parmi « les homographies générales α » et **u**, **v**, **w**. En variant **i**, **j**, **k**, cette correspondance varie. Par conséquent *une homographie générale α n'est pas une fonction des trois vecteurs* **u**, **v**, **w**; mais elle est fonction d'une terne fixe **i**, **j**, **k** et d'une autre terne variable **u**, **v**, **w**. C'est-à-dire la (1) donne bien *toutes* les homographies, mais *liées invariablement à une terne fixe* **i**, **j**, **k**; en d'autres termes, (1) donne les homographies comme des tachigraphes. Ce fait est fondamental pour établir la correspondance entre la fonction ϕ de Hamilton et nos homographies.

Nous avons obtenu (*Omografie vettoriali*, nos 6, 10) des homographies fonction d'un seul vecteur **u** ou des deux vecteurs **u**, **v**; les homographies $\mathbf{u}\wedge$, H (**u**, **v**). Par ces homographies on peut obtenir des homographies fonctions des trois vecteurs **u**. **v**, **w** mais non toutes les homographies.

[3] *Per l'unificazione.....*, Note III. — BURALI-FORTI, *I quaternioni di Hamilton e il calcolo vettoriale* (*Atti Acc. Torino*, 1908).

u, v étant des vecteurs ($u \neq 0$), Hamilton représente avec les symboles composés

$$\frac{v}{u}\,, \quad vu$$

des *opérateurs vectoriels qui, appliqués* à gauche *aux vecteurs d'une certaine classe* (non à tous les vecteurs), *donnent un vecteur bien déterminé*. Par exemple : $\frac{v}{u}$ est l'opérateur tel que, x étant un vecteur COPLANAIRE AVEC u ET v,

$$y = \frac{v}{u} x$$

est *le* vecteur qui, avec x, forme un triangle directement semblable au triangle formé avec v et u. Voilà le point de départ choisi par Hamilton pour définir les quaternions comme opérateurs vectoriels de la forme symbolique

$$\frac{\text{vecteur}}{\text{vecteur non nul}} .$$

De la définition d'Hamilton il s'ensuit que : si α est un quaternion, α est un opérateur pour les vecteurs x perpendiculaires au vecteur de α (indiqué par $V\alpha$) et *seulement* pour ces vecteurs. On a, en employant nos symboles $\times$ $\wedge$

$$\alpha x = (S\alpha) x + (V\alpha) \wedge x$$

$$S(vu) = - v \times u \,, \qquad V(vu) = v \wedge u$$

$$S\frac{v}{u} = \frac{v \times u}{u^2} \,, \qquad V\frac{v}{u} = - \frac{v \wedge u}{u^2} \,.$$

Avec une précision admirable, Hamilton développe plusieurs propriétés de l'algorithme quaternionnel, et c'est en hommage à la précision des *concepts* et des *notations* que Hamilton trouve nécessaire d'introduire les opérateurs I, I^{-1}.

Il applique (à gauche) le premier à un *quaternion droit* α (ou quadrantal versor) pour obtenir le vecteur u de α. Il applique I^{-1} à un vecteur u pour obtenir le quaternion droit dont le vecteur est u. Les deux conditions

$$I\alpha = u \,, \qquad I^{-1} u = \alpha$$

ont la même signification.

Il résulte que

$$(I^{-1} v)(I^{-1} u) = vu \,, \qquad \frac{I^{-1} v}{I^{-1} u} = \frac{v}{u} \,;$$

c'est-à-dire que les symboles vu, $\frac{v}{u}$ employés *pour mettre en évidence les deux vecteurs qui* DÉTERMINENT *l'opérateur,* coïncident avec les quaternions $(I^{-1}v)(I^{-1}u)$, $\frac{I^{-1}v}{I^{-1}u}$.

A ces faits-ci est due la « symbolical identification » hamiltonienne de $I\alpha$ et $I^{-1}u$ à α et u ; c'est-à-dire l'*identification* SYMBOLIQUE *des vecteurs aux quaternions droits.* Mais il y a un abîme entre « identification symbolique » et « identification absolue ». On peut identifier deux symboles différents pour *abréger l'écriture;* cela peut conduire à des erreurs, mais ce n'est point une erreur logique. Au contraire, l'identification absolue de deux entités différentes est une faute logique que rien ne peut justifier.

Hamilton répète toujours le mot « symbolical identification » qui semble dire « prenez garde ». Précaution inutile ! Les vulgarisateurs de la magistrale œuvre de Hamilton, à la « suppression symbolique » de I et I^{-1}, ont substitué la « suppression absolue » des opérateurs I, I^{-1} ; à la « symbolical identification » des vecteurs aux quaternions droits ont remplacé leur « identification absolue ».

Les vulgarisateurs de Hamilton (et c'est à eux seulement qu'est due la confusion actuelle) ont montré bien peu de déférence à leur maître, avec la suppression absolue, des symboles I, I^{-1} ! Ne point les comprendre n'est pas une raison suffisante pour les supprimer[1].

Revenons aux remarques de M. Knott.

« Ayant défini le vecteur comme une quantité satisfaisant à la loi du parallélogramme, l'analyste doit examiner la signification qu'il faut attacher à un produit ou à un quotient de vecteurs. Cette signification doit être obtenue par le moyen géométrique le plus simple, tenant compte de l'interprétation analytique des procédés généralisés de multiplication et de division. » *Les vecteurs, les bivecteurs* de Grassmann, les *forces* appliquées à un même point, les *quaternions droits,* ont en commun la *loi du parallélogramme.* Les analystes qui définissent un vecteur comme une quantité satisfaisant à la loi du parallélogramme se trompent. Leur faute est démontrée par Hamilton qui donne une exacte et simple définition de vecteur sans avoir recours à la loi du parallélogramme. De même Grassmann n'a point recours à cette loi pour introduire les vecteurs. L'analyste, qui n'aspire point au titre d'*algébriste,* doit examiner quelles sont les opérations *géométriques* qui se rattachent aux vecteurs et suivre l'algorithme algébrique tant qu'il lui est possible *sans détruire la géométrie.* Grassmann a bien renoncé à la division, car les entités géomé-

[1] Voir pour d'autres éclaircissements *I quaternioni di Hamilton...*

triques introduites par lui n'admettent pas la division ; au contraire, il a fait un usage magistral du produit, bien que, pour M. Knott, le produit de Grassmann ne soit pas la multiplication (et le produit quaternionnel est-il une multiplication ?!), Hamilton préfère la notation $\beta\alpha^{-1}$ (multiplication) à la notation $\frac{\beta}{\alpha}$ (division) qui présente une ambiguïté[1] ; avec les notations $\mathbf{vu}, \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{u}}$, il indique, au commencement, non des produits des vecteurs, mais des opérateurs qui sont fonctions de la couple $\mathbf{u}, \mathbf{v}$; ces opérateurs ont la signification absolue des produits et des quotients quaternionnels $(\mathrm{I}^{-1}\mathbf{v})(\mathrm{I}^{-1}\mathbf{u})$, $\frac{\mathrm{I}^{-1}\mathbf{v}}{\mathrm{I}^{-1}\mathbf{u}}$, pour se représenter sous la forme $\mathbf{vu} \,.\, \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{u}}$, depuis la « symbolical identification ».

M. Knott veut bien nous rappeler quelle est la puissance du symbole ∇. Il n'y a là rien de nouveau pour nous. Notre formule[2]

$$\nabla q = -\operatorname{div}(\mathrm{V}q) + \mathrm{I}^{-1}\left\{\operatorname{rot}(\mathrm{V}q) + \operatorname{grad}(\mathrm{S}q)\right\},$$

ou bien

$$\nabla = -\operatorname{div}\mathrm{V} + \mathrm{I}^{-1}\left\{\operatorname{rot}\mathrm{V} + \operatorname{grad}\mathrm{S}\right\},$$

qui peut être choisie pour donner une *définition absolue* de ∇ en opposition à la *définition ordinaire tachygraphique*

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} = k\frac{\partial}{\partial z},$$

dit bien que ∇ peut donner grad, div, rot, c'est-à-dire *peut donner toutes les fonctions qu'il contient.* Qu'y a-t-il là de merveilleux ? M. Knott peut accomplir une chose bien merveilleuse en *démontrant* (mais — bien entendu — en faisant usage de la notation complète de Hamilton, avec I et I^{-1}) comment les quaternions, qui ne sont pas des homographies dans l'espace[3] et qui ont 4 dimensions, peuvent donner les homographies, dans l'espace, à 9 dimensions et leurs dérivées à 27 dimensions ; comment ∇ peut donner une entité qu'il ne contient pas, c'est-à-dire le gradient d'une homographie ; comment on peut définir ∇ de manière absolue sans avoir recours aux fonctions grad, div, rot ; etc.

---

[1] Pour les entités $a, b, c,\ldots$ soit défini la multiplication. On peut définir la division comme *opération à résultat unique* dans le *seul* cas où

(1) $$ab = ba$$

(2) de $ac = bc$ et $c \neq 0$ on tire $a = b$.

conditions qui ne sont pas satisfaisantes pour les formations de Grassmann ((1) et (2)) et pour les quaternions ((1)).

[2] *Per l'unificazione.....*, Note III, n° 17, formules (7) (7').

[3] *I quaternioni di Hamilton...*.

« Je crois que la confusion actuelle de pensée et de notation est due principalement à un usage impropre des termes : Produit vectoriel, produit scalaire, produit interne, etc. ; car ces fonctions ne sont pas des produits dans le sens analytique complet du terme. » La confusion existe pour les algébristes, mais non pour les analystes qui posent l'analyse au service de la géométrie, de la mécanique et de la physique. Nous, nous comptons, avec bien d'autres, au nombre des admirateurs de Möbius, Hamilton, Grassmann. Et nous ne voulons point oublier Gibbs auquel nous devons notre système minimum. Les algébristes, les vrais pères de tous les systèmes *hermaphrodites,* sont des inconnus pour nous.

« Les auteurs excluent arbitrairement la conception de produit complet de deux vecteurs et se privent ainsi de l'usage du symbole de différentiation vectorielle dans l'espace. Ils comblent partiellement cette lacune par l'introduction ingénieuse d'au moins cinq opérateurs fonctionnels, grad, rot, div, $\frac{du}{dP}$, $\frac{d\bar{\mathrm{u}}}{dP}$, opérateurs dont la forme n'indique en aucune façon la relation étroite qui les lie. » Nous ne faisons pas usage d'un opérateur à 4 dimensions, car il nous faut des opérateurs à 9 dimensions. Nous n'introduisons pas 5 opérateurs fonctionnels grad, rot, div, $\frac{du}{dP}$ $\frac{d\mathrm{u}}{dP}$, mais un seul opérateur $\frac{d}{dP}$, défini en forme *absolue,* et duquel les autres sont des fonctions.

« Il n'y a aucune preuve que l'on puisse faire plus avec ce système qu'avec celui d'Hamilton, et ce dernier est visiblement plus systématique dans ses notations, plus sobre dans son symbolisme et plus maniable dans ses opérations. » M. Knott a le devoir de donner la preuve de son assertion. Peut-il, sans avoir recours aux coordonnées x, y, z du point P, développer tout ce qui est contenu dans notre *Omografie,* pp. 67-97 ? Avec les quaternions peut-il donner la rotation à un vecteur au moyen *d'un seul* opérateur linéaire ? Peut-il aborder avec M. Boggio[1], et sans coordonnées, les problèmes les plus élémentaires sur les liquides visqueux ? Saurait-il donner, sans avoir recours aux coordonnées, tout au moins, la partie fondamentale de la géométrie différentielle d'une surface, et de la géométrie différentielle des complexes et des congruences[2] ? Etc., etc.

---

[1] *Sul moto stazionario lento di una sfera in un liquido viscoso.* (*Rendiconti di Palermo,* 1910.)
Sul problema del moto stazionario lente di un liquido viscoso. (*Rendiconti Acc. Lincei,* 1910.)

[2] C. BURALI-FORTI. *Alcune nuove espressioni assolute delle curvature in un punto di una superficie. — Una dimostrazione assoluta del teorema di Gauss relativo all'invariabilità della curvatura totale nella flessione.* (*Rendiconti Acc. Lincei,* 1909.)
Sulla geometria differenziale assoluta delle congruenze e dei complessi rettilinei. (*Atti Acc. Torino,* 1909.)
Omografie vettoriali. Appendice, § 4.

« Un système qui admet la notion du produit de deux vecteurs perpendiculaires, mais nie la possibilité du produit de deux vecteurs non perpendiculaires, est illogique à la base, et n'a aucun droit au nom de rationnel. » Et cela parce que nous faisons usage des quaternions coaxiaux (nombres imaginaires) qui ont un calcul *identique* à celui de l'algèbre, et que nous n'employons pas, en général, de quaternions!

Lorsqu'on veut juger des travaux faits avec conscience, sinon avec science, il est nécessaire de connaître amplement dans leur *esprit* et dans leur *substance* TOUS les arguments analogues. Il n'est pas suffisant, par exemple, d'avoir étudié les *quaternions vulgarisés*, ou de les avoir étudiés dans l'original sans en avoir saisi tout l'esprit et la portée.

III. — Réponse a M. A. Macfarlane.

Dans notre système nous faisons usage des ENTITÉS et des OPÉRATIONS, *communes à tous*,

(1) nombre, point, vecteur ; $+$, $-$, produit par un nombre ,

et des OPÉRATIONS (*communes à tous*, sauf les symboles)

(2) $\times$ (produit interne, scalaire) , $\wedge$ (produit vectoriel)

qui peuvent être définis avec les *seuls* éléments (1) sous forme *géométrique très élémentaire*. Nous avons aussi démontré qu'à l'aide de (1) et (2) *seulement* on peut obtenir : *les formes géométriques de Grassmann*, leurs *transformations linéaires* comprises (nécessaires et suffisantes pour traiter sous forme *absolue* toute question géométrique et mécanique); *les homographies vectorielles; les quaternions* (insuffisants pour traiter sous forme *absolue* plusieurs questions); c'est-à-dire tous les calculs géométriques connus.

En suivant l'avis de M. Macfarlane, il faut joindre aux éléments (1)

(3) quaternions , leurs opérations, S , V , I , I^{-1}

(c'est-à-dire la théorie hamiltonienne presque complète) pour arriver aux (2) avec les formules (notation complète)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\,S(I^{-1}\mathbf{b} \, . \, I^{-1}\mathbf{a}) \,, \qquad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = V(I^{-1}\mathbf{a} \, . \, I^{-1}\mathbf{b}) \,.$$

Les opérations $\times$, $\wedge$ une fois obtenues, le calcul géométrique n'est pas complet (voir notre réponse à M. Knott).

Le point de départ (1) et (2) n'est-il pas plus simple que (1) et (3)? « *L'unification logique des quaternions et de l'analyse vectorielle entre eux et avec l'analyse scalaire* » n'est-elle pas accomplie, et fort simplement, avec (1) et (2)?

Faire des quaternions pour les quaternions est œuvre inutile. Hamilton, dont nous sommes des ardents admirateurs, a apporté à la science bien d'autres contributions que des opérateurs vectoriels. Ceux-ci, comme tous les produits du génie humain, sont susceptibles d'être transformés et perfectionnés.

C. Burali-Forti et R. Marcolongo.

CHRONIQUE

Commission internationale de l'Enseignement mathématique.

Le Comité central, composé de MM. Klein (Gœttingue), Greenhill (Londres) et Fehr (Genève), s'est réuni à *Bâle* le 28 décembre 1909. Il a tenu deux séances, l'une le matin de 9 h. à midi, l'autre l'après-midi de 4 à 8 h. Le Comité a tout d'abord pris connaissance du rapport sur l'organisation et l'état actuel des travaux dans les *dix-huit pays participants*. C'est avec une vive satisfaction qu'il a constaté que dans un grand nombre de pays les travaux sont en bonne voie et donneront lieu à d'intéressants rapports. Les renseignements recueillis feront l'objet d'une *Circulaire N° 2*, qui sera publiée dans le prochain numéro de l'*Enseignement mathématique*.

L'enquête se poursuit activement dans tous les pays avec la collaboration active et dévouée d'un grand nombre de mathématiciens. On peut prévoir, dès maintenant, que d'ici à la fin de cet hiver, toute une série de rapports préparatoires seront terminés.

Tandis que les délégués ont rencontré le meilleur accueil et beaucoup de bonne volonté chez les mathématiciens, il n'en a pas été partout de même dans leurs démarches auprès de leur Gouvernement. Dans plusieurs pays la question de l'appui financier n'est pas encore réglée. Les autorités scolaires ont cependant un intérêt évident à soutenir une œuvre aussi vaste qui ne manquera pas de contribuer au progrès de l'enseignement en général. Il faut donc espérer que, mis au courant des travaux en préparation,

les gouvernements qui n'ont pas encore donné leur adhésion, ne tarderont pas à le faire.

Le Comité central se réunira à *Bruxelles*, vers le milieu du mois d'août 1910. Il compte, en outre, saisir l'occasion de l'Exposition universelle de Bruxelles, pour organiser une réunion, tout au moins partielle, de la Commission internationale. Seraient convoqués à ces séances, les délégués de Belgique et des pays voisins, l'Allemagne, l'Angleterre, la France et la Hollande. Mais il est bien entendu que tous les membres de la Commission qui pourraient y prendre part, seront les bienvenus. Il est même question de faire suivre ces séances d'une série de conférences organisées dans la section d'enseignement de l'Exposition et auxquelles seraient invitées toutes les personnes qui s'intéressent au progrès de l'enseignement scientifique. Nous reviendrons sur ce projet dans le prochain numéro. H. Fehr.

La publication des œuvres d'Euler.

On sait que dans sa dernière réunion annuelle la Société helvétique des Sciences naturelles a décidé d'entreprendre la publication des Œuvres d'Euler. La Commission d'Euler, dont nous avons indiqué la composition dans un précédent numéro (sept. 1909), vient de constituer le *Comité de rédaction* comme suit :

M. F. Rudio (Zurich), président; MM. Krazer et Stæckel (Carlsruhe).

La Commission elle-même sera présidée par M. K. Von der Mühll (Bâle).

Le premier volume sera consacré à l'*Algèbre d'Euler;* il sera publié sous la direction de M. H. Weber (Strasbourg).

Les portraits d'Euler.

M. Eneström (Stockholm) a établi la liste des portraits d'Euler[1] et des différentes reproductions qui en ont été faites; celles-ci se rapportent aux trois tableaux originaux ci-après :

a) Tableau à l'huile de E. Handmann, peint en 1756. (Universitätskunstsammlung, Basel.)

b) Un pastel de E. Handmann, peint en 1753, qui se trouve dans la même collection, à Bâle.

c) Portrait à l'huile, cité par P.-H. Fuss dans sa *collection mathématique et physique* (St-Pétersbourg, 1843), et qui serait peint, d'après lui, par Küttner, mais que l'on attribue généralement à Darbès.

[1] *Ueber Bildnisse von Leonard Euler* (*Bibliotheca mathematica*, t. 7, p. 372-374, 1907).

Ce dernier portrait est bien de Darbès. Il a été peint à St-Pétersbourg vers 1782. Légué à la Société des Arts de Genève par un contemporain d'Euler, le publiciste Etienne Dumont, ce portrait appartient aujourd'hui au Musée des Beaux-Arts de Genève. Il figurera dans les collections du nouveau Musée des Beaux-Arts qui va être ouvert en 1910.

De naissance danoise (1747), Joseph-Frédéric-Auguste Darbès était professeur à l'Académie de Berlin et mourut dans cette ville en 1810.

H. Fehr.

Académie des Sciences de Paris.

Prix décernés. — Dans la séance du 6 décembre, l'Académie a décerné les prix suivants :

Fondation Lecomte (2000 fr.) — M. Ritz, pour ses travaux de physique mathématique et de mécanique.

(2000 fr.) M. Lebeuf, directeur de l'Observatoire de Besançon, pour ses travaux chronométriques et astronomiques, et, en particulier, pour sa participation à la publication des œuvres de Laplace.

Prix Laplace (les œuvres de Laplace). — M. André-Victor-Etienne Vaucheret, sorti premier de l'Ecole polytechnique est entré, en qualité d'élève ingénieur, à l'Ecole des mines.

Prix Félix Rivot (2,500 fr.) — Partagé entre MM. André-Victor-Etienne Vaucheret et Albert-Théodore Hentschel, entrés les deux premiers en qualité d'élèves ingénieurs à l'Ecole des mines, et MM. Benjamen Messiah et Olivier Courtagne, entrés les deux premiers au même titre à l'Ecole nationale des ponts et chaussées.

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Allemagne. — *Centenaire de Kummer.* La Société mathématique de Berlin a décidé de commémorer le centième anniversaire de la naissance de Kummer (29 janvier 1810-1910) en une séance solennelle, fixée au samedi 8 janvier et comprenant une conférence de M. le professeur K. Hensel, de l'Université de Marbourg.

Fondation Wolfskehl. — Nous avons déjà attiré l'attention de nos lecteurs *sur le dernier théorème de Fermat et le critérium de M. Wieferich* (Note de M. Mirimanoff, l'*Enseign. Math.* du 15 nov. 1909, p. 455-459). Les recherches de ce jeune mathématicien apportant une première contribution importante dans ce domaine, depuis les travaux de Kummer, la Société royale des Sciences de Gœttingue a décidé d'accorder à M. Wieferich (Graudenz), à titre

d'encouragement, une somme de 1000 Mk. pour son mémoire inséré dans le *Journal für reine u. angew. Mathematik* (t. 136).

Université de Gœttingue. — Des *cours de vacances* destinés aux professeurs de mathématiques et de physique des écoles moyennes seront organisés pendant les vacances de Pâques 1910. Les conférences sur les mathématiques seront faites par MM. Klein, Landau, Prantl, Runge, Behrendsen.

— M. Dedekind (Braunschwig), ancien professeur de l'Ecole Polytechnique de Zurich, a été nommé Docteur honoraire de cette haute Ecole.

M. Krazer (Carlsruhe), est nommé membre associé de la Société des Sciences de Strasbourg et membre extraordinaire de l'Académie des Sciences de Heidelberg.

Privat-Docents. — Ont été admis en qualité de privat-docents : M. Th. Kalusa, pour les mathématiques pures et appliquées, à l'Université de Kœnigsberg; M. A. Timpe, pour la mécanique, à l'Ecole technique supérieure d'Aix-la-Chapelle.

Angleterre. — M. W. de Morgan a fait don à la Bibliothèque de l'Université de Londres d'une collection de livres, mémoires et manuscrits jadis dans la possession de son père Auguste De Morgan, qui a professé les mathématiques à cette Université pendant trente ans.

Sir Joseph Larmor et Sir J.-J. Thomson ont été nommés Docteurs honoraires de l'Université de Birmingham.

Mlle E. Greene a été nommée *Mathematical Tutor* au Bedford College de l'Université de Londres.

M. A.-J. Kenny a été nommé *Assistant Lecturer* à l'Université de Birmingham.

M. J.-H. Sleeman a été nommé *Lecturer* à l'Université de Sheffield.

M. H.-C. M'Weeny a été nommé Professeur de Mathématiques à l'*University College* de Dublin.

M. A.-W. Conway, Dr Sc., est nommé Professeur de Mathématiques appliquées à l'Université de Dublin.

M. M.-J. Conran a été nommé *Lecturer* pour la Physique mathématique à l'*University College* de Cork.

M. J. Miller, Dr Sc., a été nommé Professeur de Mathématiques au *Glasgow and West of Scotland Technical College.*

Société royale de Londres. — La *médaille Copley* a été attribuée à M. G.-W. Hill, pour ses travaux d'astronomie mathématique, et la *médaille royale* au professeur Love, pour ses recherches sur la théorie de l'élasticité.

Autriche. — MM. Denizot et Krygowski, professeurs extraordinaires, sont nommés professeurs ordinaires à l'Ecole polytechnique supérieure de Lemberg.

M. C. Prey, privat-docent, a été nommé professeur extraordinaire d'astronomie et de géodésie à l'Université de Vienne.

M. R. Saliger, de l'Ecole technique supérieure allemande de Prague, a été nommé professeur de mécanique à l'Ecole technique supérieure de Vienne.

Belgique. — *Université de Bruxelles.* De grandes fêtes ont été célébrées à Bruxelles, du 18 au 21 novembre 1909, à l'occasion du 75me anniversaire de la fondation de l'Université libre. Au cours de ces festivités des conférences ont été faites par d'illustres savants, une entre autres, par M. H. Poincaré ; elle avait pour objet : *Le libre examen en matière scientifique.*

Académie royale de Belgique. — Dans sa séance solennelle de décembre 1909, la Classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique a proclamé les résultats de ses concours annuels ; elle a couronné notamment un mémoire de M. E.-J. Wilczynski, sur la *géométrie infinitésimale de l'espace euclidien réglé.*

Etats-Unis. — MM. T. Pierpont et E.-B. van Vleck ont été nommés docteurs honoraires de la Clark University (Worcester Mass).

France. — *Académie des Sciences.* — Pendant l'année 1910, l'Académie sera présidée par M. Emile Picard.

Ecole polytechnique. — M. Carvallo, examinateur de sortie, est nommé directeur des études, en remplacement de M. Mercadier, nommé directeur honoraire.

Faculté des Sciences de Paris. — M. Marchis, professeur de physique générale à la Faculté des Sciences de Bordeaux, est nommé, à partir du 1er janvier 1910, professeur d'aviation (fondation Basil Zaharoff).

Monument Laplace. — Un monument sera élevé en l'honneur de Laplace, à Beaumont en Auge (Calvados), où l'illustre mathématicien naquit en 1746.

— M. Ernest Lebon a été nommé membre correspondant de la Société Royale des Sciences de Liège.

Hongrie. — M. G. Kowalewski, de l'Université de Bonn, a été appelé à l'Ecole technique supérieure allemande de Prague, en qualité de professeur ordinaire.

Italie. — M. M. Abraham a été nommé professeur de Mécanique rationnelle à l'Institut technique supérieur de Milan.

M. G. Boccardi, professeur extraordinaire d'Astronomie à l'Université de Turin, a été nommé professeur ordinaire.

M. T. Boggio, de Messine, qui avait été provisoirement attaché à l'Institut des Hautes études de Florence, a été nommé professeur extraordinaire de Mécanique rationnelle à l'Université de Turin.

M. C. Severini, professeur extraordinaire de Géométrie analytique à l'Université de Catane, a été nommé professeur ordinaire.

M. E. Soler (de Messine) a été nommé professeur ordinaire de Géodésie théorique à l'Université de Padoue.

Privat-docents. — Ont été admis en qualité de privat-docents : M. E. Laura, pour la Mécanique rationnelle, à l'Université de Turin; M. U. Scarpis, pour l'Analyse algébrique, à l'Université de Bologne; M. F. Sibirani, pour l'Analyse infinitésimale, à l'Université de Bologne.

NOTES ET DOCUMENTS

LA RÉORGANISATION DE L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE DANS LES ÉCOLES SUPÉRIEURES DE JEUNES FILLES EN PRUSSE

D'après des rapports récents.

*Les écoles supérieures de jeunes filles en Prusse subissent en ce moment de sérieuses transformations, qui marquent une étape importante dans l'histoire de l'enseignement allemand. Les prescriptions nouvelles introduites par le décret du 18 août 1908 prévoient en effet un plan d'études permettant aux jeunes filles d'aborder les études universitaires. Nous croyons intéresser les lecteurs de l'*Enseignement mathématique *en résumant, sous le titre ci-dessus, quelques documents qui montrent sur quelles bases la réorganisation a été opérée. Une jeune mathématicienne,* Mlle Renée Masson, *a bien voulu se charger de ce travail. Nous tenons à lui présenter ici l'expression de nos vifs remerciements.* La Rédaction.

I. — Les mathématiques dans le plan d'études des écoles supérieures de jeunes filles avant et après la réorganisation des écoles supérieures prussiennes de jeunes filles.

Résumé du rapport de M. le Dr Gustav Noodt, professeur à la « Viktoria Schule » à Berlin.

Le travail de M. Noodt fait partie des rapports préparatoires dûs à l'initiative de la délégation allemande de la Commission internationale de l'enseignement mathématique. Il a été publié sous le titre : *Ueber die Stellung der Mathematik im Lehrplan der höheren Mädchenschule vor und nach der Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens in Preussen. (Berichte u. Mitteilungen, veranlasst durch die Intern. Mathem. Unterrichtskommission, II.)*

Afin que le lecteur soit bien orienté, M. Noodt donne d'abord le plan d'ensemble ci-après de la nouvelle organisation des écoles supérieures de jeunes filles.

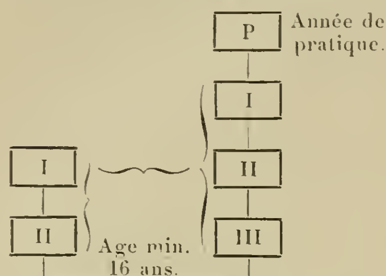
Jusqu'ici les études des jeunes filles étaient d'une trop courte durée pour toutes les branches, et principalement pour les mathématiques. D'après la nouvelle organisation, la durée minimum de fréquentation des écoles supé-

Lycée.

(Instruction générale féminine et préparation à l'enseignement.)

a) Ecole ménagère.

b) Ecole normale supérieure : examen de professorat, âge minimum 20 ans.



Ecole secondaire supérieure.

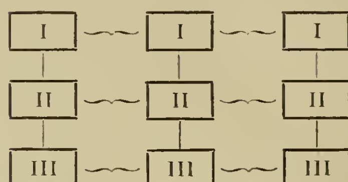
(Maturité pour l'université.)

a) Ecole supérieure réale.

b) Gymnase réal.

c) Gymnase.

Age minimum pour l'examen de sortie, 19 ans.



IV — IV — IV Commencement du grec.

V — V

VI Commencement du latin.

Ecole supér. de jeunes filles.

Degré supérieur (deux langues étrangères).

I

II

III

Age min. 13 ans.

IV Commencement de l'anglais.

Age min. 12 ans.

Degré moyen (une langue étrangère).

V

VI

VII Commencement du français.

Age min. 9 ans.

Degré inférieur (classes préparatoires).

VIII

IX

X Entrée à l'Age de 6 ans.

Remarque : Les traits (|) indiquent la promotion d'une classe dans une classe supérieure ou la mutation dans une autre classe ou école. Les accolades (⁓) indiquent la possibilité d'une instruction en commun pour les branches similaires.

rieures a été élevée à dix années d'études. Pour la préparation à des études universitaires, le minimum est de 13 années d'études, de 12 pour les jeunes gens.

M. Noodt, avant de donner des indications sur la manière de procéder à la réforme, donne un aperçu de la *place qu'occupaient jusqu'ici les mathématiques et les sciences naturelles dans le plan d'étude des écoles supérieures de jeunes filles en Prusse*, écoles qui ne comptaient généralement que neuf années d'études. (Les écoles secondaires supérieures préparant à l'université n'existaient pas.) L'instruction des jeunes filles, et particulièrement leur instruction mathématique, laissait fort à désirer, ainsi que le montre le règlement du 31 mai 1894 concernant, les écoles de jeunes filles, la préparation des maîtresses et l'examen de professorat féminin. Le temps consacré à cet enseignement n'était que de 15 h. par semaine pour 6 classes, alors que les langues allemande et française disposaient chacune de 27 h. Au point de vue des mathématiques, les jeunes filles sortant de ces écoles auraient à peine été capables de suivre l'enseignement de la 3me des écoles supérieures de jeunes gens. Le but de l'enseignement mathématique semblait, non pas le développement de l'esprit, l'éducation de la réflexion, mais uniquement de l'ordre, de la clarté dans la résolution de problèmes expliqués et préparés en classe pour éviter tout effort de l'esprit. Les calculs algébriques étaient rigoureusement exclus. Les sciences naturelles étaient un peu mieux partagées, le programme laissant une plus grande liberté.

Heureusement, malgré la situation inférieure faite aux maîtres des écoles de jeunes filles, il s'est trouvé des maîtres, principalement parmi les mathématiciens, qui ont accepté de se charger de cet enseignement et qui y ont apporté toutes les améliorations compatibles avec les prescriptions du 31 mai 1894. Les connaissances exigées du personnel enseignant féminin étaient également trop rudimentaires.

Passant ensuite à la question des *maîtresses supérieures prussiennes*, M. Noodt montre comment, peu à peu, les exigences augmentèrent et amenèrent la création de cours pour maîtresses supérieures, cours dont la majorité préparent à certains cours universitaires. Il donne un tableau comparatif de l'instruction des candidats aux cours universitaires pour les deux sexes.

Sexe masculin.	*Sexe féminin.*
6 classes inférieures et moyennes dans les écoles supérieures en 9 classes pour jeunes gens (classes préparatoires non comprises).	6 (7) classes moyennes et supérieures dans les écoles supérieures en 6 ou 7 classes pour jeunes filles (classes préparatoires non comprises).
↓	↓
3 classes supérieures dans les écoles supérieures en 9 classes pour jeunes gens.	3 (actuellement 4) années de séminaire.
↓	↓
	Plusieurs années de pratique dans l'enseignement.

Etudes universitaires.

Les connaissances exigées pour l'examen de maîtresse supérieure ne correspondent, pour les mathématiques et les sciences naturelles, qu'à l'examen du 2me degré, donnant le droit d'enseigner dans les classes moyennes des établissements supérieurs d'instruction. Une enquête due à l'initiative de la « Commission allemande de l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles » a été faite auprès des directeurs et directrices des cours de maîtresses supérieures. Il ressort de cette enquête que des cours spéciaux de mathématiques se donnent ou vont se donner dans plusieurs villes, Berlin, Bonn, Göttingue, Königsberg, Münster, Greifswald. Les connaissances exigées pour suivre ces cours sont en moyenne celles du programme de la 3me supérieure du gymnase réal, le nombre des heures consacrées aux mathématiques oscille entre 4 et 12, et le nombre des semestres entre 4 et 6. A Bonn, Göttingue et Königsberg, un certain nombre des cours se font à l'Université.

Depuis novembre 1908, l'examen de maîtresse d'école supérieure donne le droit à l'immatriculation avec la « petite maturité »[1].

Les exigences des nouveaux programmes nécessiteront, de la part des maîtresses supérieures, des connaissances de géométrie descriptive.

En ce qui concerne les mathématiques, les cours pour maîtresses supérieures ne devront aspirer qu'au programme du 2me degré, le 1er degré étant réservé aux jeunes filles, porteurs de la maturité des écoles secondaires supérieures, qui auront fait des études universitaires régulières.

La séance du 6 mars 1909 de la « Commission allemande de l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles » s'est déclarée, à l'unanimité, pour le maintien provisoire des cours de maîtresses supérieures. Des cours de vacances pour maîtresses supérieures, analogues à ceux qui existent pour les maîtres supérieurs, seront nécessaires.

M. Noodt aborde ensuite le chapitre des *progrès amenés dans l'enseignement mathématique par la réorganisation des écoles supérieures de jeunes filles.* Il est heureux de constater que l'importance des mathématiques pour l'instruction des jeunes filles a enfin été reconnue, ainsi que cela se manifeste dans les nouveaux règlements, tant par l'augmentation des heures qui sont consacrées à cette étude, que par le rang de branche principale qui est donné aux mathématiques dans tous les établissements d'instruction de jeunes filles ; le nombre d'heures accordé à cet enseignement reste cependant au-dessous de ce que l'on espérait. Le programme mathématique des écoles supérieures de jeunes filles et des lycées est en majeure partie dû à M. Crantz, professeur au « Askanischen Gymnasium » à Berlin.

Ce programme correspond à peu près aux connaissances exigées dans la classe I des écoles réales en 6 classes de jeunes gens. Sont cependant exclus du programme : l'étude des logarithmes et de la trigonométrie ; en géométrie, les théorèmes d'égalité (l'égalité des côtés dans des triangles équiangles excepté, à cause de ses applications fréquentes), les proportions dans le cercle, ainsi que les constructions à l'aide de l'analyse algébrique.

L'étude proprement dite de l'arithmétique se termine avec la 5me classe, classe dans laquelle les lettres seront introduites pour exprimer des résultats déjà obtenus numériquement et des expressions littérales seront évaluées numériquement par la substitution de nombres donnés.

L'algèbre et la planimétrie commencent dans la classe 4 ; à la sortie de

---

[1] La « petite maturité » se distingue de la « grande » en ce qu'elle doit être renouvelée tous les deux ans et ne donne pas accès aux examens d'Etat.

celle-ci les élèves doivent décider si elles veulent arriver à la maturité pour l'université par le gymnase ou par le gymnase réal de l'école secondaire supérieure, ou, à la sortie de la classe 3, si elles veulent arriver à la maturité pour l'université par l'école réale supérienre.

Afin de montrer les progrès accomplis avec la nouvelle organisation, l'auteur donne quelques citations des instructions méthodiques, citations desquelles, il ressort qu'en mathématique, principalement au début, l'intuition et les applications devront jouer un rôle prépondérant. On développera l'esprit d'initiative et le travail personnel. La notion de fonction, bien qu'elle ne soit pas indiquée explicitement, sera, autant que possible, introduite par l'algèbre et la géométrie.

La scission de l'examen de l'école normale en deux est également un avantage. Le premier examen, roulant sur les connaissances acquises, se fait au bout de trois ans d'études ; le deuxième, examen d'aptitude pédagogique, après la quatrième année, année consacrée à la pratique et au développement des connaissances ainsi qu'à l'acquisition de notions de géométrie analytique, sans que celles-ci donnent lieu à un examen.

M. Noodt passe ensuite à des *considérations et remarques générales* en commençant par *les écoles supérieures de jeunes filles.*

En mathématiques, plus encore que dans toute autre branche d'étude, la compréhension d'un sujet repose sur des connaissances antérieures ; il faudrait donc que seules les élèves parfaitement préparées pour les mathématiques soient admises dans les écoles secondaires supérieures.

L'auteur estime que l'étude de l'arihmétique proprement dite ne peut être menée à bien, même dans des conditions favorables, avec le nombre d'heures très restreint qui lui est accordé. Par exemple, dans la classe 5 (3 h. par semaine), le programme comporte : Fractions décimales, règles de 3 simples et composées avec des nombres entiers et des fractions. Applications tirées de la vie civile, entre autres les calculs de pourcentage et d'intérêt. Calculs simples de surfaces et de volumes. Introduction de lettres dans des résultats déjà obtenus numériquement et évaluation d'expressions littérales par la substitution de valeurs numériques déterminées. Les élèves de cette classe sont précisément à un âge où le développement corporel et mental exigerait un enseignement plus modéré.

Les résultats obtenus depuis quatre ans dans le grand duché de Bade par l'application de nouveaux programmes sont parfaitement satisfaisants. Le nombre des heures consacrées à l'étude des mathématiques y est officiellement de 12 dans les 3 années d'école préparatoire et de 25 dans les 7 autres classes ; le directeur, M. Keim, a porté le nombre des heures à 18 dans les classes préparatoires, au total 43 h. dont 37 officielles, alors que les programmes des écoles prussiennes comportent 30 h. au total dont 9 à l'école préparatoire.

M. Noodt établit un *parallèle entre le programme badois de 1905 et les « instructions de Stuttgart de 1906 »* dues à la Commission de l'enseignement, de la Société des naturalistes et médecins allemands ; commission qui, au moment de l'élaboration de son projet, ignorait la teneur du programme badois. Il ressort de cette comparaison que les deux programmes concordent dans leurs points principaux et sont animés du même esprit de réforme. Le grand duché de Bade a donc l'honneur d'avoir été le premier à élaborer un tel programme et à le mettre en pratique, et cela de la façon la plus complète avec le temps restreint accordé à l'enseignement.

L'auteur considère ensuite les *écoles secondaires supérieures*. Le fait que les éléments de calcul infinitésimal ne sont pas indiqués dans les plans d'étude des écoles secondaires supérieures, n'implique évidemment aucune interdiction d'essais tendant à donner aux élèves les notions de dérivée et d'intégrale au moyen de représentations graphiques et de calcul approximatif d'aires de courbes. Les éléments du calcul infinitésimal deviennent de plus en plus indispensables à tous ceux qui veulent se préparer à la vie intellectuelle de notre époque.

M. Noodt préconise un emploi de méthodes approximatives et graphiques dans le cas où la résolution générale est trop compliquée, comme par exemple dans les classes 3 et 4 pour les équations du 2me degré à plusieurs inconnues. La solution générale des équations du 3me degré (formule de Cardan) est réservée aux sections de gymnase réal et d'école réale supérieure.

L'analyse combinatoire ne fait heureusement partie que du programme des écoles réales supérieures, ainsi que le binôme de Newton à exposant quelconque, éventuellement, seulement de celui du gymnase réal ; même dans l'école réale, il suffira de démontrer graphiquement la possibilité d'existence du binôme à exposant quelconque.

Par contre, il est regrettable que la théorie des maxima et minima si utile pour l'introduction de la notion de fonction, ne fasse pas partie du programme du gymnase et ne soit introduite que dans les 2 dernières classes des 2 autres sections.

Il est reconnu, presque par tous, que l'enseignement de la géométrie descriptive doit être confié non au maître de dessin, mais à celui de mathématiques.

Des dispositions analogues à celles qui existent pour les maîtres supérieurs devraient être adoptées pour les maîtres supérieurs féminins, terme par lequel M. Noodt indique, afin de les distinguer des maîtresses supérieures actuelles, les dames munies de la maturité des écoles secondaires supérieures et ayant fait des études universitaires régulières.

Il donne ensuite *un plan d'étude élaboré par* M. Rodolph Schimmach, à Göttingue, *pour la section supérieure réale des écoles secondaires supérieures :*

Classe V (4 h. par semaine). — 1) Fonctions du 1er degré numériquement et graphiquement. Equations du 1er degré à 1 et plusieurs inconnues (principalement 2). — Carré et racine carrée, calcul numérique et graphique de cette dernière. — Fonctions simples du 2me degré. — Equations simples du 2me degré à 1 inconnue.

2) Etude du cercle et constructions. — Etudes des aires.

Classe IV (5 h. par semaine). — 1) Suite des fonctions et équations du 2me degré à 1 inconnue. — Puissances et racines à exposants réels. — Généralisation de la notion de puissance ; fonctions exponentielles et logarithmiques, numériquement et graphiquement; application des logarithmes au calcul.

2) Similitude et égalité. — Méthode d'Archimède pour la mesure du cercle. Représentation graphique des fonctions trigonométriques.— Problèmes simples de trigonométrie.

Classe III (5 h. par semaine). — Résolution graphique d'équations simples du 2me degré à 2 inconnues ; principales propriétés des sections coniques et leurs intersections par des droites. — Progressions arithmétiques et géométriques ; applications, en particulier au calcul des intérêts

composés et des annuités. — Revision et développement de fonctions déjà considérées ; introduction des notions $\frac{dy}{dx}$, $\int ydx$ dans des cas concrets simples comme x^2 et x^3.

2) Problèmes de trigonométrie et formules trigonométriques fondamentales. — Eléments de la géométrie projective (éléments harmoniques). — Eléments de stéréométrie et étude des projections, exercices simples de dessin appliqué à la stéréométrie ; calcul des corps stéréométriques avec intégration.

Classe II et I (5 h. par semaine par classe). — Etude plus approfondie des fonctions et des courbes ; différentiation et intégration ; applications à l'arithmétique, la géométrie et la physique ; question des maxima. Approximation des fonctions au moyen des polynômes. — Eventuellement des éléments d'analyse combinatoire en vue du calcul des probabilités.

2) Revision et développement de la géométrie analytique, principalement de la géométrie analytique plane. — Etude analytique et synthétique des sections coniques. — Trigonométrie sphérique, en vue de la cosmographie mathématique. — Extension des notions de géométrie descriptive.

3) Revision et application à des problèmes plus étendus. — Récapitulation générale.

M. Noodt consacre quelques lignes à *la section ménagère des lycées*, section qui n'a pas un programme spécial en ce qui concerne les branches scientifiques. Dans les lycées ayant une section normale et une section ménagère, les élèves de la section ménagère suivent comme auditrices les cours de la section normale. L'enseignement mathématique fait complètement défaut dans la section ménagère des lycées.

L'auteur termine par un *coup d'œil général rétrospectif et actuel*. Il souhaite que le nouvel état de chose, tendant à donner aux jeunes gens et aux jeunes filles une instruction équivalente, rende celles-ci toujours plus conscientes de leur propre responsabilité, influençant ainsi, non seulement le travail à l'école, mais la vie de tous par la participation de la femme au travail intellectuel intense de notre époque.

Il regrette que le vœu de la « commission d'enseignement de la société des naturalistes et médecins allemands » demandant un plan d'étude identique pour l'enseignement des deux sexes, n'ait pas été réalisé en ce qui concerne le nombre d'heures attribué à l'enseignement des mathématiques. L'insuffisance des heures constitue un danger pour la réforme, car elle pourrait causer un insuccès qui serait une arme pour les adversaires du mouvement féministe.

On a souvent répété que l'instruction des jeunes gens et des jeunes filles devait être équivalent, mais non semblable ; à ce sujet, M. Noodt fait part d'observations personnelles propres à guider le maître dans son enseignement. Il estime que la jeune fille cherche surtout à savoir, comment telle ou telle vérité géométrique peut être utilisée, tandis que le jeune garçon s'intéresse plus à la cause première et s'habitue plus facilement au développement logique de l'enseignement. Il sera donc rationnel d'attacher une plus grande importance à la méthode inductive chez les jeunes filles, surtout au début.

Il faut également utiliser leur habileté manuelle à la construction de modèles géométriques simples dont le maniement fréquent les amènera inconsciemment à la notion géométrique de fonction.

Pour terminer, M. Noodt exprime le vœu que la tentative d'une instruction mathématique plus développée pour les jeunes filles réussisse et que le sentiment du rôle des mathématiques dans les sciences naturelles et la culture moderne aille en augmentant.

II. — La préparation du personnel enseignant.

d'après le Rapport de la Commission allemande de l'enseignement des Sciences mathématiques et naturelles.

Le second rapport que nous résumons ici, a été publié sous le titre : *Mathematik und Naturwissenschaft an den neugeordneten höheren Mädchenschulen Preussens. Wie erhalten wir die erforderlichen Lehrkräfte?* Denkschrift, verfasst vom Deutschen Ausschuss für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht [1].

Dans sa séance du 6 mars 1909, tenue à Berlin, la Commission allemande de l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles, a étudié la question de la préparation du personnel enseignant, nécessitée par les exigences du nouveau règlement des écoles supérieures prussiennes de jeunes filles. Les remarques méthodiques ont rencontré l'approbation générale, mais le détail des programmes a soulevé nombre de critiques.

Ce qui importe surtout ici, c'est la constitution du personnel enseignant chargé de ce nouvel enseignement. Le nombre de maîtres supérieurs capables qui s'y consacreront est très limité et celui des dames ayant reçu, pour les sciences, une instruction régulière de maîtresse supérieure, quoique destiné à augmenter, est pour le moment également très restreint.

La séance du 6 mars a été, à l'unanimité, pour le maintien provisoire des cours pour maîtresses supérieures.

Les causes des difficultés rencontrées dans ces cours pour l'enseignement mathématique ont été étudiées par la sous-commission. Elles sont multiples. Le but de ces cours est de donner une instruction supérieure se distinguant de celle du séminaire en ce qu'elle embrasse un champ moins étendu et, par conséquent, étudie plus complètement un sujet déterminé. Le fait que, grâce à la faible importance accordée aux sciences dans la pratique ultérieure de l'enseignement, les candidates à ces cours alliaient généralement à une branche des sciences mathématiques, d'autres sujets d'enseignement très différents, nuisait à l'accomplissement de ce but. La nouvelle organisation remédie à cet état de chose.

Les cours universitaires supposent connues les matières enseignées au gymnase classique, connaissances qui, pour les mathématiques et les sciences physiques, font totalement défaut aux maîtresses ayant reçu une éducation de séminaire, alors même que cette éducation donne accès à l'université avec la petite maturité.

Des cours préparatoires de sciences, destinés aux candidates aux études mathématiques et physiques sont donc nécessaires.

L'instruction devrait être développée simultanément pour toutes les branches des sciences et être au moins équivalente à celle du 2me degré des études masculines de maître supérieur. Il faudrait également que l'examen

[1] Voir *Zeitsch. f. Mathem. u. Naturw. Unterricht,* tome 40.

de maîtresse supérieure ait lieu sur 3 branches scientifiques au lieu de 2 et devienne de plus en plus analogue à celui de maître supérieur.

Des cours de sciences (cours de vacances) d'une durée de 15 jours pourraient être institués pour les maîtresses supérieures, à l'instar de ce qui se fait depuis environ 15 ans pour les maîtres supérieurs. Ces cours, dont le but serait nettement l'enseignement dans les nouvelles écoles de jeunes filles seraient donnés par des maîtres supérieurs des écoles de jeunes gens, de préférence à des professeurs de l'enseignement universitaire.

Selon l'avis de la Commission, les cours actuels pour maîtresses supérieures ne peuvent être organisés de façon à préparer à l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles du 1er degré ; par conséquent, l'accroissement du nombre des maîtresses supérieures ayant passé des examens de maturité et fait des études universitaires régulières, devient de plus en plus urgent.

Supplément au rapport. — Après la publication du mémoire de la Commission a paru, le 3 avril 1909, un arrêté ministériel à effet rétroactif, autorisant l'admission, à tous les examens d'enseignement, des personnes ayant reçu une instruction de séminaire et leur ouvrant ainsi l'enseignement dans tous les établissements d'instruction supérieure de jeunes filles.

Il est à craindre que cette admission de personnes insuffisamment préparées n'entraîne un surmenage nuisible, tant au point de vue de la santé, du corps, que de l'esprit. Il faut aussi remarquer qu'avec la nouvelle organisation, l'enseignement des mathématiques, et dans une certaine mesure des sciences naturelles, dans les écoles supérieures de jeunes filles et au séminaire, reste encore au-dessous de ce qui se fait dans le gymnase classique, les programmes du gymnase réal et de l'école supérieure réale étant hors de question.

L'arrêté ministériel consacre donc une infériorité qui n'avait été considérée possible que provisoirement par la Commission. Cela nécessiterait alors non pas un cours préparatoire provisoire, mais bien perpétuel pour les personnes sortant du séminaire et désirant suivre des cours à l'université.

De plus, l'effet rétroactif de l'arrêté du 3 avril, nécessiterait également la création des cours pour maîtresses supérieures actuelles, dont le mémoire précédent avait admis la nécessité provisoire.

A Göttingue, de tels cours de sciences ont eu lieu du 4 au 16 octobre 1909, pour maîtres et maîtresses supérieurs dans les établissements de jeunes filles.

Il serait à désirer que des cours analogues d'une durée semestrielle soient autorisés.

III. — Les femmes et les sciences mathématiques.

Remarques à propos de la réforme des écoles supérieures de jeunes filles.

D'après M. le Prof. W. Lorey (Minden i. W.).

Ce sujet a été traité, dans une conférence[1], par M. Wilhelm Lorey, prof. de gymnase, à la Société d'histoire naturelle à Görlitz, au mois de janvier 1909.

---

[1] *Die mathem. Wissenschaften u. die Frauen.* Extrait de la *Zeitsch. «Frauenbildung»*, t. VIII ; en vente séparément. B. G. Teubner, Leipzig.

M. Lorey présente d'abord un rapide aperçu historique de la réforme de l'enseignement scientifique en Allemagne ; il examine ensuite si les jeunes filles seront à la hauteur de l'enseignement mathématique qui leur est destiné. Avant de donner son opinion, il fait remarquer qu'elle sera résolue négativement par beaucoup d'hommes qui se laissent guider par le souvenir de ce qu'était autrefois l'enseignement mathématique ; mais l'étude des mathématiques a été considérablement facilitée et rendue plus attrayante par les méthodes modernes, ce qui fait tomber la plupart de leurs objections.

L'auteur passe en revue les différentes raisons qui militent en faveur d'un enseignement mathématique dans les écoles de jeunes filles. Les carrières réservées jusqu'alors aux hommes, étant maintenant ouvertes aux femmes, l'instruction des écoles de jeunes filles devra être équivalente à celle des écoles supérieures de jeunes gens. Du reste, l'instruction scientifique est nécessaire pour toutes les femmes cultivées, au même titre que celle des arts et des lettres. Toutes les connaissances fondamentales des sciences naturelles peuvent se ramener aux mathématiques, à la notion de nombre. L'éducation mathématique est donc indispensable pour éviter des erreurs grossières en physique ou en philosophie. Elle donne une instruction logique, mais il ne faut pas croire que le seul but de l'instruction mathématique soit le développement du raisonnement. car actuellement les mathématiques, même élémentaires, sont en contact direct avec les applications et les progrès de la science.

M. Lorey a la conviction que cet enseignement. inspiré de l'esprit scientifique moderne, sera reçu avec profit par les jeunes filles. A l'instar du physicien anglais M. J. Perry, il préconise l'emploi de la représentation graphique et du papier millimétrique, soit en algèbre, soit en géométrie. L'auteur fait ensuite un tableau comparatif des plans d'étude des diverses écoles, d'où il ressort que les écoles supérieures de jeunes filles et les lycées restent un peu en dessous des diverses écoles de jeunes gens. Cependant les nouveaux programmes des écoles de jeunes filles laissent suffisamment de latitude pour l'introduction des idées modernes.

Après avoir examiné les conditions qu'il juge nécessaires pour faire une bonne maîtresse de mathématiques, M. Lorey reprend la question de l'aptitude des jeunes filles pour l'étude des mathématiques et la résout par l'affirmative, en donnant comme preuve l'exemple de l'Angleterre, la Russie, l'Amérique, où l'enseignement mathématique est donné aux jeunes filles avec succès. Il rappelle qu'en Allemagne le célèbre mathématicien suisse Léonard Euler n'avait pas craint d'enseigner de la géométrie, de la physique et de la philosophie à une princesse de la cour de Berlin.

Tout en étant persuadé que les jeunes filles des écoles supérieures sont aptes à profiter de l'enseignement mathématique, M. Lorey ne croit pas qu'il y aura à l'avenir beaucoup plus de femmes capables de produire des travaux mathématiques personnels de valeur. L'histoire des mathématiques ne compte jusqu'ici que peu de femmes dont il rappelle les principales. La plus ancienne est Hypatie, au Vme siècle, qui enseignait la philosophie à Alexandrie et s'occupait de mathématiques. Au XVIIIme siècle, on trouve à Bologne, Maria Gætana Agnesi, qui était extraordinairement douée au point de vue des mathématiques et des langues et qui a publié un traité de mathématiques. Une de ses contemporaines, Mme du Chatelet, est désignée par Cantor comme élève du mathématicien König. La plus marquante des anciennes mathématiciennes fut Sophie Germain, née en 1776 à Paris. Son

goût pour les mathématiques fut éveillé par le récit de la mort d'Archimède et ses parents cherchèrent vainement à la détourner de cette étude. Elle correspondit avec Lagrange sous le pseudonyme de Le Blanc et celui-ci resta toute sa vie son fidèle conseiller. Avec Legendre, elle aborda l'étude de la Théorie des nombres et apprit ainsi à connaître les ouvrages de son contemporain Gauss avec qui elle entra en correspondance sous son pseudonyme. Elle obtint à Paris une mention très honorable pour un travail sur la théorie des surfaces élastiques. Elle s'occupait également de philosophie et mourut à l'âge de 55 ans. Une autre mathématicienne fut Sophie Kowalewsky, élève et amie de Weierstrass. Elle fut incitée à étudier les mathématiques par la tapisserie de sa chambre d'enfant formée des pages d'un vieux manuel de calcul différentiel. Elle étudia à Munich et à Heidelberg avec Königsberger et Kirchhoff, elle travailla également avec Bunsen. En 1870, elle fit la connaissance de Weierstrass qui, ne pouvant obtenir pour elle la permission de suivre les cours, lui donna des leçons particulières qui furent l'origine d'une amitié qui se prolongea au delà de ses études. En 1874, elle obtint le grade de docteur à Gœttingue. Mittag-Leffler lui procura après la mort de son mari une place de professeur de mathématiques à Stockholm. Elle obtint, en 1889, le prix de l'Académie de Paris pour un travail sur le mouvement d'un corps rigide. Elle mourut en 1891.

Parmi les mathématiciennes actuelles, les 3 premières qui furent admises comme élèves régulières dans une université prussienne sont, en 1893 : Mlle Mary Winston, de Chicago, élève du mathématicien Maschke, Mlle Maltby, qui étudia principalement la chimie physique avec Nernst, et Mlle Grace Chisholm, du Girton-College, à Cambridge (Angleterre). Mlle Chisholm fut la première femme qui ait subi régulièrement l'examen du doctorat dans une université prussienne ; elle obtint en effet le grade de docteur en 1895 et cela avec la mention *magna cum laude*. Elle a épousé dès lors en Angleterre, un mathématicien, le professeur Young, avec qui elle a publié en collaboration divers écrits mathématiques, entre autres, en 1906 à Cambridge, un ouvrage remarquable intitulé : *The Theory of sets of points* [ainsi qu'un manuel d'initiation : *Der kleine Geometer*. (Réd.)].

Des dames allemandes ont suivi l'exemple donné par ces étrangères ; entre autres Mlle Thekla Freitag, maîtresse supérieure au Gymnase de jeunes filles de Bonn. Son travail d'examen d'état concernait la théorie des fonctions modulaires elliptiques.

A Bucarest, M. et Mme Myller-Lebedeff publient ensemble et séparément des travaux mathématiques sur le calcul intégral. A St-Pétersbourg, M. et Mme Ehrenfest-Affanazieff s'occupent de physique mathématique. En Amérique, Mlle Charlotte-A. Scott, professeur de mathématiques au collège de dames, Bryn Mawre College de Philadelphie, publie depuis plusieurs années des travaux sur les courbes algébriques.

Dans l'est de l'Amérique, comme à Cambridge, les sexes sont séparés, sauf pour certains cours supérieurs, et il existe des collèges de dames, tel que le Vassar-College, à Poughkeepsie (N.-Y.), où Mlle Madison fonctionne comme mathématicienne ainsi que d'autres dames traitant, par exemple : l'une, les déterminants et la théorie des équations, une autre, la géométrie projective et une troisième, la théorie des nombres.

Pour des motifs d'économie le système de la coéducation est en honneur dans le reste de l'Amérique et la même raison fera poser la question en Prusse. M. Lorey n'est ni adversaire ni partisan déterminé de l'un ou

l'autre système. Il est heureux de ce que les carrières intellectuelles soient aussi accessibles aux jeunes filles ; il croit cependant qu'il faut se garder de pousser, par enthousiasme pour cette liberté, des jeunes filles dans une voie pour laquelle elles ne seraient peut-être pas faites. Mais il estime que la réforme de l'école supérieure préparera mieux les femmes des classes cultivées pour leur vocation naturelle.

FRANCE

Collège de France ; Paris. — Cours publics du 1er semestre ; à partir du 6 décembre. — Mécanique analytique et Mécanique céleste, J. Hadamard : Théorie des plaques élastiques, 2. — Mathématiques, J. Jordan ; suppléant Humbert : Transformation et multiplication complexe des fonctions elliptiques. — Physique générale et mathématique, Brillouin : Elasticité des solides et des fluides ; propagation des ondes ; théorie de quelques instruments sonores. — Cours de la Fondation Pécaut.

L'enseignement mathématique par correspondance.

dirigé par J. Andrade, *professeur à la Faculté des Sciences de Besançon.*

I. — Il y a quelques années, à propos de la création universitaire d'une école pratique de réglage, M. Andrade a été amené à organiser et développer un programme des Mathématiques de l'ingénieur *assez simple* et *assez solide à la fois* pour assurer aux élèves de l'école pratique de réglage une assimilation des méthodes de réglage des montres. A ces mathématiques de l'ingénieur s'intéressèrent beaucoup d'autres auditeurs que les étudiants horlogers. Or, il est arrivé que, par la nature même des choses, la poursuite de ce problème en apparence si spécial a provoqué sur bien des points un rajeunissement de presque toute la vieille pédagogie mathématique.

Empruntant alors à d'autres une idée qui a déjà été féconde, à savoir l'idée *de l'enseignement par correspondance*, M. le professeur Andrade a mis cette idée au service de l'enseignement général et simplifié des mathématiques.

Ainsi est née l'*Ecole moderne de l'enseignement mathématique par correspondance,* qui vient de s'ouvrir le 1er janvier 1910, et dont voici le programme :

II. — Programme des cours pour 1910. — Il comprend trois séries :

1re série. — Les Éléments des Mathématiques : Géométrie qualitative : Déplacements et Symétrie. — Géométrie quantitative : La similitude et les parallèles ; Trigonométrie, mesure des étendues, la transformation des figures.

Arithmétique et Algèbre : Grandeurs mesurables ; nombres entiers, fractionnaires, continus ; nombres orientés sur une droite. — Problèmes du 1er et du 2me degré. — Le système métrique et les corrélations des mesures physiques.

2me série. — Géométrie appliquée : Courbes usuelles ; géométrie descriptive ; projections et perspectives. — Application des méthodes graphiques : Statique générale, mouvements pendulaires, courbures, planimètres, statique graphique. — Le calcul appliqué à la géométrie : Eléments de géo-

métrie analytique à 2 et 3 dimensions. — La géométrie appliquée au calcul : Méthode des Abaques.

3me série. — ANALYSE DES FONCTIONS SIMPLES : Calcul des limites : vitesses, dérivées, quadratures. — Problème inverse du problème des vitesses. — Fonctions trigonométriques, fonction exponentielle ; leurs tables, leurs usages. — Méthodes analytiques d'approximation. — Les méthodes d'approximations numériques.

III. — EXERCICES GÉNÉRAUX ET SPÉCIAUX PAR CORRESPONDANCE. — Sont communs à tous les correspondants les cours ci-dessus désignés et les exercices généraux servant *d'illustration* au cours.

Par contre, les exercices SPÉCIAUX d'applications et de RECHERCHES sont répartis sur *trois sections* parmi lesquelles les correspondants choisiront la plus conforme à la spécialisation de leurs efforts ; ces sections sont : I, section pédagogique ; II, section de l'ingénieur ; III, section du physicien.

IV. — FONCTIONNEMENT DES COURS ET DES EXERCICES. — La correspondance normale des cours est unilatérale et impersonnelle ; elle comprend :

a) *Chaque semaine :* l'envoi de deux leçons commentées et d'une suite d'exercices généraux et spéciaux proposés aux élèves.

b) *Chaque quinzaine :* un exposé des solutions des questions proposées aux exercices généraux ou spéciaux.

Les demandes de renseignements relatifs à l'« Ecole moderne de l'enseignement mathématique par correspondance », doivent être adressées à M. le professeur J. ANDRADE, à Besançon.

BIBLIOGRAPHIE

H. BOUASSE. — **Cours de physique** conforme aux programmes des certificats et de l'Agrégation de Physique. Fascicule VI. *Etude des symétries*.— 1 vol. gr. in-8° de 424 pages : 14 fr., Ch. Delagrave, Paris [1].

Le présent volume, qui termine le cours de M. Bouasse, éveillera, sans doute, bien des curiosités. Que peut être pour le physicien une étude des symétries ? Les êtres symétriques tels les cristaux viennent d'abord à l'idée et, dans de tels milieux symétriques, ne peuvent évidemment exister que des phénomènes ayant, eux aussi, une certaine symétrie. Mais la symétrie des phénomènes ne dépend-elle que de la symétrie des milieux ? Il suffit de poser cette question pour sentir combien serait étroite une réponse affirmative. Il y a des phénomènes symétriques dans des milieux parfaitement isotropes. Provoquer de tels phénomènes dans des milieux déjà symétriques c'est combiner des symétries dont l'étude générale dépasse de beaucoup la cristallographie géométrique, presque purement descriptive de formes, et la prolonge dans toutes les branches de la physique.

Le volume commence, naturellement, par les théories purement géomé-

---

[1] Voir dans l'*Enseign. math.* les analyses des fascicules I (T. IX. 1907, p. 320), II (T. X. 1908, p. 346), III (T. X. 1908, p. 526), IV (T. XI. 1909, p. 149), V (T. XI. 1909, p. 227).

triques conduisant aux systèmes de Bravais et Mallard. Il importe bien de remarquer que, comme point de départ, les éléments de transformation sont seulement des déplacements et des symétries par rapport à un plan ou à un point. Il n'en faut point davantage, par exemple, pour former rapidement les 24 groupes polyédriques de Bravais, dont ce dernier négligeait un, non par ignorance, mais parce que les applications physiques semblaient n'en exiger que 23. Si les édifices ainsi construits ne satisfont plus aux exigences modernes, ils restent d'une logique si remarquable que l'auteur n'hésite pas à leur consacrer ses trois premiers chapitres et à en faire une théorie préliminaire, qui aura simplement besoin d'être perfectionnée et non abandonnée ou détruite. C'est ainsi qu'il est amené à introduire les idées plus récentes de M. Friedel.

La loi des indices rationnels apparaît au début du chapitre IV.

Trois faces d'un cristal forment un trièdre de référence ; un plan parallèle à une autre face intercepte sur les arêtes du trièdre des longueurs *a*, *b*, *c*. Pour toute autre face les longueurs analogues sont *ma*, *nb*, *pc* ; les nombres *m*, *n*, *p* sont entiers ou fractionnaires et généralement *très simples*. Or, les nombres les plus compliqués sont toujours introduits dans les calculs sous forme rationnelle ; il ne faut donc pas craindre d'attacher trop d'importance aux deux mots soulignés.

Tous les systèmes de plans satisfaisant à la loi précédente, nous donnent, pour un cristal, des faces possibles. Mais c'est surtout la théorie des groupes (Ch. V) qui va nous permettre de préciser le classement des cristaux. L'idée de groupe joue un rôle tellement important en géométrie qu'il est bien inutile de rappeler en quoi elle consiste. C'est, avant tout, un merveilleux instrument de classification, mais à la condition, cependant, qu'on l'applique à des problèmes concrets ; réduite à ses concepts propres, elle s'allonge souvent dans le vide et donne beaucoup de mal pour établir certains théorèmes négatifs. De ces derniers M. Bouasse ne s'embarrasse pas ; il nous montre les groupes existant nécessairement, sans s'attarder à rechercher s'ils existents seuls. Les groupes finis, c'est-à-dire ceux qui, indéfiniment appliqués à une figure, ne la transforment que dans une région limitée de l'espace, permettent d'envisager les formes cristallines qu'on retrouve au chapitre suivant par la méthode des troncatures, due à Haüy, laquelle consiste à tronquer symétriquement sept types fondamentaux de polyèdres symétriques.

Quant aux groupes infinis de déplacement (Ch. VII), qui permettent de remplir tout l'espace par la réitération d'une opération appliquée à une portion finie de cet espace, ils donnent lieu à des considérations si élégantes que leur étude n'est qu'un jeu. Et, d'ailleurs, ceci est exact sans métaphore, car, le cas du plan est examiné d'abord et le plan qu'on pave *entièrement* de figures toutes identiques, dont chacune n'a cependant aucune symétrie, rappelle certains jeux de patience que chacun a sans doute connus dans son enfance. De là nous passons facilement au cas de l'espace, et, si les groupes finis peuvent servir à imaginer des cristaux, les groupes infinis peuvent servir maintenant à répéter ceux-ci de manière à imaginer les milieux cristallisés. Il est alors immédiat de remarquer que la symétrie du milieu ne dépend pas forcément d'une symétrie élémentaire.

D'une première partie du volume ainsi constituée, nous passons à l'étude physique des symétries qui donne lieu à onze nouveaux chapitres. Je mentionne simplement les deux premiers, où sont décrites les formes cristal-

lines réelles et les variations qu'elles peuvent subir du fait de modifications apportées dans le procédé de cristallisation lui-même. Il y a là, cependant, de bien jolies expériences, mais j'irai tout de suite aux cristaux soumis à des influences plus complexes. Le Chapitre III est consacré à leurs déformations, le point de départ étant l'idée très simple de déformation homogène dans laquelle le point x, y, z a, après la déformation, des coordonnées x_1, y_1, z_1 linéaires et homogènes par rapport aux précédents. C'est, pour ainsi dire, la cinématique de la question. Voici, maintenant, la dynamique.

Qu'un vecteur (*polaire* comme une attraction ou *axial* comme un couple magnétique) vienne à agir sur un milieu. Il y aura dans celui-ci une déformation représentable par un second vecteur dont les composantes, en général et tout au moins en première approximation, seront liées linéairement aux composantes du premier. Les relations doivent dépendre de neuf coefficients dont certains peuvent être nuls ou affecter une certaine symétrie. Ce phénomène, en milieu homogène indéfini, peut être déjà fort curieux, tels ces courants de chaleur qui, les surfaces isothermes étant des ellipsoïdes homothétiques, se déduisent de spirales logarithmiques projetées sur des cônes de révolution, mais les cristaux donneront des classifications plus curieuses encore, suivant les manières plus ou moins symétriques dont ils s'accomoderont de tels phénomènes. Dans les chapitres IV et V sont examinées ainsi les propriétés électriques, magnétiques, thermiques des cristaux et, en particulier, les polarisations électrique et magnétique, la conductibilité électrique et thermique et enfin le phénomène de Hall.

Quant aux phénomènes dûs aux déformations mécaniques (Ch. VI) tels la piézoélectricité des cristaux, leur étude est encore immédiatement rattachée aux idées précédentes. Le nouveau et curieux vecteur, qui apparaît alors, est toujours lié au vecteur excitateur de manière linéaire, mais on ne saurait trop remarquer cette correspondance vectorielle qui est rendue partout identique et de la manière la plus évidente. Qu'une déformation soit d'origine mécanique, électrique, thermique,... on est stupéfait de l'analogie parfaite des raisonnements. C'est à peine si la fonction potentielle a changé de nom.

Avec le chapitre VII nous abordons la symétrie du milieu quant à ses propriétés optiques. M. Bouasse essaye d'abord de bien montrer ce qu'est une anomalie optique ; les propriétés optiques des milieux cristallisés dépendent de leur symétrie, mais cette dernière, encore une fois, peut n'être qu'en relation fort lointaine avec la symétrie du cristal, affirmation qui ne paraît plus anormale quand on a bien compris les préliminaires géométriques. Et cette manière de voir si simple ne permet plus de considérer comme des anomalies les divergences entre les propriétés du cristal et celles du milieu. Quoi qu'il en soit, et sans tenir absolument à détruire le mot, l'auteur examine, dans les chapitres terminaux, les anomalies récemment très étudiées, notamment la double réfraction accidentelle et la double réfraction électrique dans les solides, puis la double réfraction dans le quartz, la polarisation rotatoire, l'anisotropie des fluides (cristaux liquides), la symétrie du champ magnétique.

Cette simple énumération serait bien regrettable, si la lecture de ces dernières pages ne m'avait montré une nouvelle idée dont l'analyse, étant donnée la place restreinte dont je dispose, vaudra mieux peut-être que celle, toujours incomplète, de faits nombreux. Cette idée est la troisième des idées directrices d'une œuvre où je crois, en effet, en avoir vu trois.

Il y a d'abord l'idée géométrique qui commence le volume. Nous admirons un vaste édifice harmonieusement divisé; chaque division a même importance pour le géomètre mais non pour le physicien. Celui-ci apparaît en second lieu et classe les phénomènes dans les divisions de l'édifice, qui prend ainsi une réalité physique; s'il n'est pas complètement rempli, les pièces vides jouent, cependant, le rôle éminemment utile de faire communiquer les autres entre elles. Mais voici la troisième idée, troublante magicienne au profil mathématique. Elle aussi se réclame de la symétrie qu'elle nous montre sous forme de vecteurs dont les expressions analytiques ne semblent demander qu'à s'agglomérer. Elle établit ainsi une foule d'équations aux dérivées partielles, mais elle n'échappe au caractère saugrenu ou à l'impossibilité de leur intégration qu'en inventant des hypothèses assurant la symétrie même, la forme linéaire des dites équations, la possibilité de faire usage d'onde planes, etc. C'est bien là la dernière forme de l'étude des symétries et M. Bouasse, loin de la dédaigner, la développe admirablement. Mais il établit son véritable caractère et, introduisant beaucoup de faits dans son analyse, montre que beaucoup de combinaisons analytiques ne servent qu'à retourner sur eux-mêmes ces mêmes faits.

Pour l'œuvre entreprise, c'est une grandiose conclusion, surtout à l'époque actuelle où le savant ne croit plus à l'unicité de la vérité, ayant appris que tout système impeccable entraîne l'existence d'autres systèmes tout aussi impeccables et qui ne peuvent être considérés comme plus ou moins vrais.

A. Buhl. (Toulouse.)

F. G.-M. — **Exercices de Géométrie descriptive.** 4me édition. — 1 vol. gr. in-8o de X-1100 pages et 1145 figures. Tours, Mame et fils; Paris, Vve Ch. Poussielgue.

Ces Exercices de Géométrie Descriptive font le plus naturellement suite aux *Exercices de Géométrie* parvenus, eux aussi, à leur quatrième édition, et dont j'ai déjà parlé dans *L'Enseignement Mathématique* (T. X. 1908, p. 531). L'inspiration qui guide constamment l'auteur est visible. Il fait de la géométrie dans l'espace et prolonge, de la manière la plus directe, un nombre considérable de résultats élégants obtenus en géométrie plane.

Pour beaucoup d'élèves la géométrie dans l'espace, telle qu'elle est exposée dans la seconde partie des livres classiques, est une science où toutes les figures se font sous forme de croquis. La géométrie descriptive est tout autre chose; c'est la science des épures qui a tout l'air d'exister indépendamment.

Aussi j'aime à retrouver dans ces pages le souci constant de faire simplement de la Géométrie. Les méthodes n'empêchent pas de voir les résultats. Une foule de courbes planes (lemniscate de Bernoulli, lemniscate de Gerono, besace, versiera, etc., etc.), assez subtiles à définir dans leur plan, apparaissent comme projections d'intersections de surfaces excessivement simples (sphère, cylindres, cônes, etc.) De telles constatations engagent à faire quelques efforts pour s'assimiler le langage et les procédés, bien peu nombreux au fond, d'une science qui permettra ensuite de recueillir des fruits que l'on n'a pas dédaigné de conduire à maturité complète.

L'ouvrage commence par une centaine de pages sur les méthodes en général. Il y est insisté sur l'utilité de voir les problèmes dans l'espace et, à mon avis, avec beaucoup de raison. L'auteur résume la terminologie et les

notations ; il s'étend sur la rotation elliptique qui, employée par analogie avec la rotation circulaire, évite de grandes longueurs.

Les exercices proprement dits commencent par les plus simples qui se puissent imaginer ; dans toutes ces combinaisons de droites et de plans qui paraissent souvent fastidieuses nous trouvons déjà d'élégantes applications physiques. Certains plans sont des miroirs ou des plans réfringents, certaines droites des rayons lumineux dont il faudra déterminer les positions après des réflexions ou des réfractions successives.

Dès que l'on peut aborder les surfaces du second degré, apparaissent une foule de résultats aussi simples qu'élégants. L'auteur s'en tient pendant longtemps aux surfaces très particulières placées intentionnellement dans des positions très simples. Les résultats les plus remarquables ont été obtenus d'abord dans cet ordre d'idées ; les fenêtres sphériques de Viviani en témoignent suffisamment.

Puis des résultats de cette nature sont généralisés de la manière la plus heureuse jusqu'au moment où l'on peut aborder les surfaces du second degré en général. Une place importante a été accordée aux coniques sphériques.

Les hélicoïdes et les hélices n'ont pas moins d'intérêt. Les propriétés de la simple hélice circulaire ont été généralisées de toutes les façons possibles sur le cône et sur la sphère. Le tore, transformé par inversion, donne la cyclide de Dupin dont toutes les propriétés sont rassemblées avec une facilité qui déconcerte absolument. Beaucoup n'ont entrevu cette surface qu'au travers d'équations ne permettant même pas d'avoir facilement une claire vue de sa forme.

Je me borne à cette analyse de quelques points saillants, mais là, comme dans les *Exercices de Géométrie*, on se trouve en présence de tant et tant de problèmes intéressants qu'on ne peut guère les analyser en détail. Les uns sont empruntés à un grand nombre de publications différentes et il faudrait pour cette raison rendre hommage d'abord à la grande érudition de l'auteur, mais ce ne serait pas tout, car l'auteur lui-même a manifestement créé d'innombrables énoncés accompagnés de solutions non moins originales. A une connaissance parfaite de théories géométriques il joint un sens géométrique propre qui lui permet de tout mettre dans la lumière la plus avantageuse. Excellentes leçons pour ses élèves et aussi pour ses collègues ; il n'y a d'ailleurs que de l'honneur à être compté parmi ces derniers.

A. Buhl. (Toulouse.)

C.-H. Noodt. — **Mathematische Unterrichtsbücher für höhere Mädchenschulen.** — I. Teil : *Vorschule,* bearbeitet von Wrampelmeyer. 2 Hefte, 34 + 70 Seiten ; 95 Pf. — II. Teil : *Ganze und gebrochene Zahlen.* gr. 8°. 200 Seiten ; 1 M. 80. — III. Teil : *Bürgerliche Rechnungsarten* gr. 8°. 112 Seiten ; 1 M. 10. — *Uebungsbuch zur Arithmetik und Algebra* 212 S.; 2 M. — *Leitfaden der ebenen Geometrie.* Erster Teil. (Classe 4 u. 3). 74 S. ; 1 M. Velhagen & Klasing, Leipzig.

Ces manuels sont rédigés conformément aux nouveaux programmes des écoles de jeunes filles de la Prusse; ces établissements viennent de subir d'importantes transformations en ce qui concerne le plan d'études mathématiques.

Rechenbuch. — Le *cours d'arithmétique* comprend 3 parties. La première *(Vorschule)*, en 2 cahiers, contient de nombreux exercices et problèmes pour le Ier enseignement des classes préparatoires.

La *seconde Partie* traite des nombres entiers, des mesures métriques de longueur, surface, volume et poids, des nombres complexes et des règles de trois simples ; un court chapitre est également consacré aux nombres décimaux, bien que ceux-ci soient déjà traités implicitement à la fin du 1er chapitre. Les fractions ordinaires font l'objet des quatrième et cinquième chapitres qui se terminent par une revision, sous forme de problèmes se rapportant à la vie usuelle.

Dès le début. M. Noodt prépare à la notion de fonction en introduisant, pour chaque nouvelle opération, la représentation graphique sur une droite, puis à l'aide de deux axes rectangulaires. Il initie également les élèves à l'emploi des lettres par des formules et des équations simples. Les problèmes sur les sujets les plus divers sont choisis, non seulement dans le but d'enseigner l'arithmétique, mais aussi de contribuer au développement général et d'intéresser les élèves en leur présentant des sujets qui se rattachent à leur sphère d'activité tout en tendant à élargir leur horizon.

Le principe directeur de la *troisième Partie* est le même. L'auteur traite des règles de trois composées, de leur application aux calculs de pour cent et d'intérêt ; à ce propos il consacre un paragraphe à des problèmes d'assurance maladie et accident. L'arithmétique commerciale, les problèmes d'alliage et mélange et de partage, occupent les 2 derniers chapitres. Cette troisième partie termine le cycle du cours d'arithmétique du degré moyen des écoles supérieures des jeunes filles.

Le volume *Uebungsbuch zur Arithmetik und Algebra* correspond plus spécialement à l'ensemble du nouveau programme de l'enseignement mathématique du degré supérieur. Il comprend quatorze chapitres d'exercices et de problèmes.

De même que dans le cours d'arithmétique, l'interprétation géométrique joue un grand rôle ; cependant, la notion de fonction, qui jusqu'alors n'avait été introduite que d'une manière intuitive, se précise et est traitée explicitement dans le 12me chapitre. Un grand nombre de problèmes se rattachent à la géométrie et à la physique. Les 8 premiers chapitres traitent des opérations algébriques, des polynômes, des fractions, des équations à une et plusieurs inconnues du 1er degré. Les 3 suivants des puissances et racines des 2me et 3me degrés et des équations du 2me degré. Le douzième, des nombres irrationnels et de la notion de fonction et les deux derniers des puissances et racines à exposants et indices quelconques et des logarithmes. Ce volume est terminé par une table des carrés des nombres de 1 à 1000, des cubes de 1 à 100, des puissances 4me à 9me des 10 premiers nombres ainsi que des racines carrées des nombres de 1 à 100.

Leitfaden der ebenen Geometrie. — Le premier chapitre donne les définitions des figures et formes géométriques du plan et de l'espace et des principes à la base de la géométrie, axiomes, théorèmes, etc. La suite est consacrée à la géométrie plane ; la droite, relation des droites entre elles, parallèles, perpendiculaires, angles ; le triangle, les quadrilatères. Le tout est accompagné de problèmes pratiques dont la plupart sont basés sur des graphiques. Le cinquième et dernier chapitre est une application des notions acquises, à des constructions de triangles au moyen de lieux géométriques. Conformément aux nouveaux programmes cet enseignement est destiné aux 4me et 3me classes ; il est essentiellement intuitif ainsi qu'il convient à l'âge des élèves (12 et 13 ans) ; les figures y jouent un rôle prépondérant.

Ces ouvrages clairement ordonnés paraissent devoir remplir parfaitement

le but que se propose l'auteur, c'est-à-dire initier graduellement les jeunes filles aux mathématiques et les leur faire aimer.

Renée MASSON (Genève).

C. SAUTREAUX. — **Essai sur les axiomes des Mathématiques.** (*Etude critique élémentaire.*) 1 vol. in-8°, 80 p., 3 fr. Gratier et Rey, (Grenoble).

Ce livre se divise en deux parties dont voici la table :

Première partie : Origine des principes de la Géométrie. Chapitre I. Concept d'espace absolu. — *Chap. II.* Nouvelle définition de la droite ; mesure des longueurs rectilignes. — *Chap. III.* Principe d'inertie généralisé. — *Chap. IV.* Par deux points ne passe qu'une ligne droite. — *Chap. V.* Somme des angles d'un triangle. Théorie des parallèles.

Seconde partie : Analyse des principes de la Dynamique et de la Statique. Chapitre I. Principes fondamentaux de la Dynamique. — *Chapitre II.* Principes dérivés employés en Statique.

Pourquoi l'auteur commence-t-il son livre par un chapitre sur l'Espace absolu ? Je le lui ai demandé, car j'avoue que la chose me paraissait assez en désaccord avec la théorie régnant actuellement en mécanique où l'on fait table rase de la vieille notion d'Espace absolu. Voici le résumé des raisons qu'il m'a exposées.

1° « Si l'on se borne à la définition du mouvement relatif de deux points A et B par la variation de la distance AB, comme le font les auteurs de Mécanique élémentaire, on commet un cercle vicieux ou bien l'on admet comme première la notion de mouvement sans repère. » — En effet, comment mesure-t-on cette distance AB ? En portant l'unité de longueur, UV, sur AB, autant de fois que possible. Or, le mouvement de ce solide VU ou bien vous ne le repérez pas ou bien vous le repérez à A de façon que ce mouvement est défini par les variations des distances UA, VA en fonction du temps, selon votre définition. Mais pour mesurer UA, VA vous vous servirez du mouvement d'une unité de longueur U_1, V_1 ; même remarque, et ainsi de suite. C'est la régression à l'infini.

2° Ainsi la définition du mouvement de A par rapport à B ou de B par rapport à A conduit à un cercle vicieux. Pour l'éviter il y a un moyen, la conception d'un Espace absolu et du repérage d'un mouvement par rapport à cet Espace. L'auteur montre dans son livre que ce repérage n'exige en rien la notion de ligne droite ni de distance.

3° L'Espace géométrique, que les Mécaniciens appellent Espace absolu, est une abstraction, un concept ; ce n'est pas un être physique, réel. C'est là cependant la confusion commise par beaucoup de physiciens (Newton, Neumann, etc.), confusion qui est la cause principale du discrédit où est tombé l'Espace absolu. L'expérience nous donne seulement la notion d'étendues diverses des corps, à l'aide des sens ; l'esprit, travaillant par l'abstraction et la généralisation cette notion, en tire l'idée d'Espace géométrique indéfini W. Ainsi l'Espace W est un concept ; l'esprit le construit indéfini, homogène, toujours identique à lui-même à travers les temps, par hypothèse expresse. De plus cet espace W ne saurait être qu'au repos par rapport à un repère quelconque, R. Si, en effet, on constate qu'il y a mouvement relatif de W et de R, on attribue nécessairement le mouvement à R et le repos à W et on rejette la supposition contraire : cela tient à la nature spéciale que W tire de sa définition. Car si W se mouvait, il sortirait de lui-même, ce

qui est contradictoire, car dans quoi W se mouvrait-il, puisqu'il n'y a point d'espace en dehors de l'espace ?

De ce que l'observation ne donne que des choses relatives, il ne suit pas du tout que l'Espace absolu soit inconcevable : l'esprit conçoit nettement des choses qu'il n'a jamais observées, qui n'existent même pas. Personne n'a jamais observé de ligne droite, de plan, de nombre rationnel ou irrationnel, etc. ; ces choses-là n'existent pas dans la nature ; ce sont des créations de l'esprit, des concepts.

4° Nombre de savants ne répugnent pas à employer la notion d'espace absolu. Voir, par exemple, dans le livre intitulé « De la Méthode dans les Sciences » (Alcan, 1909) l'opinion de M. Emile Picard (pages 22-23), etc.

Dans le *Chapitre II* l'auteur prend comme définition de la ligne droite : « La ligne droite est la trajectoire dans l'espace absolu d'un point inerte sur lequel aucune force n'agit plus. » Cette définition le conduit facilement à la géométrie ordinaire de la droite et à la mesure des segments rectilignes.

Dans le troisième chapitre l'auteur, après avoir fait une analyse plus complète qu'on ne le fait d'habitude du principe d'inertie, lui donne une extension qu'il appelle « principe d'inertie généralisé ». C'est là, me semble-t-il, le point capital de son livre. Ce principe d'inertie généralisé lui donne en effet la clé de la géométrie euclidienne. Ce même principe lui permet, en outre, de revenir à la définition ordinaire de la ligne droite en démontrant que, par deux points distincts, il ne passe qu'une seule trajectoire d'effort nul.

La seconde partie a pour but de montrer que les principes de la Dynamique et de la Statique ne sont qu'un accord de la pensée avec elle-même et n'ont rien d'empirique.

Rappelons ici ce que pense de ce livre M. J. Tannery (*Bulletin des Sciences Mathématiques,* janvier, 1909) :

« Je voudrais dire à propos de cet « Essai » combien je m'émerveille, et « depuis longtemps, de la diversité des esprits et de la clarté qui illumine « pour les uns des notions qui restent profondément obscures pour d'autres. »

Faute d'impression à signaler : p. 22, avant-dernière ligne, lire : la *célérité* du mouvement, et non pas l'*intensité* du mouvement.

R. Suppantschitsch. — **Mathematisches Unterrichtswerk für die österreichischen Mittelschulen.** Ausgabe für Realgymnasien, Unterstufe.

Arithmetik *I. Heft. Für die erste Klasse ;* in-8°, 75 p., avec 481 questions et problèmes. cart. ; 1 kr. 50. — *II. Heft. Für die zweite Klasse ;* in-8°, 72 p., 2 fig., 450 questions et problèmes, cart. 1 kr. 50. — *III. Heft, Für die dritte Klasse ;* in-8°, 122 p., 61 fig., 317 questions et problèmes, cart. 2 kr.

Geometrische Anschauungslehre, *Für die erste Klasse ;* in-8°, 42 p., 77 fig., 221 questions et problèmes, cart. 80 h.

Grundrisz der Geometrie, *I. Heft. Für die zweite Klasse ;* in-8°, 59 p., 117 fig., 197 questions et problèmes, cart. 1 kr. 20. — *II. Heft. Für die dritte Klasse ;* in-8°, 88 p., 153 fig., 393 questions et problèmes, cart. 1 kr. 70. P. Tempsky, éditeur, Vienne.

Dans ces six volumes, l'auteur qui est professeur dans une des « Staatsrealschule » de Vienne, présente la première partie d'un cours de mathématiques destiné aux écoles secondaires autrichiennes, conformément aux nouveaux plans d'études.

Le programme d'*arithmétique* de première année comprend les opérations fondamentales effectuées sur les nombres entiers, l'étude des poids et mesures, les nombres complexes et décimaux; il se termine par les premières notions de la théorie des fractions ordinaires. Après l'étude très élémentaire de la divisibilité, du plus grand commun diviseur et du plus petit commun multiple, le programme de la deuxième année reprend en détail la théorie des fractions ordinaires; il s'occupe ensuite des fractions décimales périodiques et s'arrête aux règles de trois et d'intérêt simple.

Dans le troisième volume du cours d'arithmétique l'auteur expose le calcul algébrique jusqu'à la division de deux polynômes; plus de 50 figures très bien choisies illustrent cette initiation à l'algèbre. Ce fait mérite d'être relevé; il prouve combien M. Suppantschitsch cherche à se conformer aux principes des méthodes nouvelles. Le programme de troisième année contient encore la théorie des racines carrée et cubique et, en supplément, les opérations abrégées.

Conformément aux idées modernes, ce cours d'arithmétique se distingue par une application continuelle de l'intuition et de la méthode heuristique; l'auteur part toujours d'un exemple concret pour arriver à la règle générale. C'est là, sans doute, la méthode la plus sûre et la plus attrayante.

L'*Initiation géométrique* de M. Suppantschitsch commence par l'étude du cube et de la sphère; ainsi le jeune élève est immédiatement mis en présence du plan et de la circonférence. L'auteur fait construire un cube de carton, ce qui l'amène à parler des instruments de dessin : règle, équerre, compas. Le mouvement de l'équerre le long d'une règle explique la notion de droites parallèles.

Les angles et les triangles, l'addition des segments et des angles, l'étude du parallélipipède rectangle, l'évaluation des surfaces et volumes les plus simples forment l'objet des chapitres suivants. Dans le chapitre intitulé « *Triangle et Pyramide* », l'auteur arrive au théorème de la somme des angles d'un triangle; il le fait vérifier d'abord à l'aide du rapporteur, puis en faisant découper un triangle de papier dont l'élève déchire les angles qu'il place les uns à côté des autres. La translation de deux des angles jusqu'au troisième sommet donne enfin la démonstration proprement dite.

Le premier volume de la « *Géométrie* » est destiné à la deuxième classe des « Realsgymnasien »; il forme la suite du précédent et commence par l'étude détaillée de la symétrie; l'auteur fait une application fréquente de la symétrie et du mouvement dans les chapitres qui suivent; ceux-ci sont consacrés aux angles, triangle et prisme droit triangulaire, quadrilatère et prisme droit quadrangulaire, circonférence et cylindre droit; un dernier chapitre contient quelques définitions relatives à la sphère.

Le deuxième volume de la « Géométrie » de M. Suppantschitsch traite de l'évalution des surfaces et des volumes; la géométrie plane et la géométrie dans l'espace continuent d'y être exposées simultanément d'une manière fort judicieuse. Voici les titres de quelques chapitres : Parallélogrammes et Parallélipipèdes; Triangles, trapèzes, prismes et pyramides; Théorème de Pythagore; Transformations des parallélogrammes, triangles et polygones. La théorie des polygones réguliers et du cercle est exposée ensuite d'une manière très simple. Signalons ici un point intéressant; dans ce cours élémentaire de géométrie, l'auteur se borne, avec raison du reste, à déterminer expérimentalement une valeur approchée de π; il fait découper ou tourner très soigneusement un cercle de carton ou de bois et en fait mesurer la cir-

conférence au moyen d'un fil. — Après l'étude sommaire des corps ronds, un dernier chapitre est consacré aux premières notions relatives aux figures semblables.

Chacun des excellents volumes de M. Suppantschitsch contient, en supplément, une intéressante collection de « Questions et problèmes » bien gradués.

Peu de théorèmes, beaucoup d'exercices, un enseignement basé sur l'expérience et l'intuition, tels sont les principes qui ont guidé l'auteur. Il convient de l'en féliciter et de recommander la lecture de ces manuels à tous ceux qui s'intéressent à la réforme de l'enseignement des mathématiques élémentaires dans les divers pays.

Aug. Lalive (La Chaux-de-Fonds).

E. Fabry. — **Problèmes et Exercices de Mathématiques générales.** — 1 vol. gr. in-8°, 420 p. ; 10 fr. ; librairie Hermann, Paris.

Depuis quelques années la plupart des Facultés ont organisé des cours d'éléments de mathématiques supérieures spécialement destinés aux étudiants en sciences physiques et chimiques et aux ingénieurs. Mais ces cours ne peuvent réellement atteindre leur but que s'ils sont accompagnés de nombreux exercices bien choisis. M. Fabry, professeur à la Faculté des Sciences de Montpellier, rend donc un réel service à cette catégorie d'étudiants en faisant suivre son excellent *Traité de Mathématiques générales* d'un recueil de Problèmes et d'Exercices sur les principales parties du cours.

Dans la *première partie* de l'ouvrage l'auteur donne les *énoncés* de près de 750 problèmes ou exercices, groupés de la manière suivante :

Algèbre (nos 1 à 235). — Géométrie analytique (236 à 476). — Analyse (477 à 649). — Mécanique (650 à 738).

Les *solutions* forment la seconde partie de l'ouvrage. Elles sont accompagnées d'explications concises permettant à l'étudiant de résoudre facilement les problèmes.

Nous recommandons ce Recueil non seulement aux étudiants en sciences physiques-chimiques, mais à tous ceux qui débutent dans l'étude des éléments de mathématiques supérieures.

Herm. Thieme. — **Die Elemente der Geometrie** (Zweiter Teil, Erster Band der *Grundlehren der Mathematik* für Studierende und Lehrer). — 1 vol. in-8°, relié, XII-394 p. ; 9 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Cet ouvrage fait partie d'une collection de quatre volumes destinée à présenter les Eléments de Mathématiques en tenant compte de l'état actuel de la science. Une collection de ce genre, rédigée en dehors de tout programme officiel, sera bien accueillie de tous les professeurs de l'enseignement secondaire.

Le présent volume, seul paru, est consacré aux *éléments de Géométrie*, envisagés à un point de vue très large. L'auteur développe successivement la Géométrie élémentaire, les éléments de Trigonométrie plane et sphérique, de la Géométrie descriptive et de la Géométrie analytique à deux et à trois dimensions. Réunis en moins de 400 pages, ces éléments sont présentés avec beaucoup de précision dans leur enchaînement logique. M. Thieme a été bien inspiré en accordant une large place aux méthodes de résolution des problèmes de Géométrie.

Dans un second volume, également consacré à la Géométrie, M. W. Fr.

Meyer exposera les notions fondamentales relatives aux formes géométriques en tenant compte des notions de groupes et d'invariants.

L'arithmétique et l'algèbre comprendront deux volumes qui seront rédigés par MM. Färber et Netto.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

---

1. Publications périodiques :

Acta Mathematica, dirigé par Mittag-Leffler, T. XXXII, Stockholm.

Fasc. 3 et 4. — G. Lauricella : Sur l'intégration de l'équation relative à l'équilibre des plaques élastiques encastrées — R. de Montessus : Les fractions continues algébriques. — F. Enriques et Fr. Severi : Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques, I.

American Journal of Mathematics, edited by Fr. Morley, Baltimore. Vol. XXXI.

Nos 3 et 4. — Anna L. Van Benschoten : The Birational Transformations of Algebraic Curves of Genus Four. — C. H. Sisam : On Some Loci Associated with Plane Curves. — J. R. Conner : Plane Sections of a Weddle Surface. — J. E. Wright : The Differential Equations Satisfied by Abelian Theta Functions of Genus Three. — J. E. Wright : Differential Equations Admitting a Given Group. — P. H. Schoute : On the Angles of the Regular Polytopes of Four-dimensional Space. — W. Marshall : The Asymptotic Representation of the Elliptic Cylinder Functions. — L. E. Dickson : A Theory of Invariants — A. B. Coble : Symmetric Binary Forms and Involutions. — A. R. Schweitzer : A theory of Geometrical Relations.

Annals of Mathematics, published under the Auspices of Harvard University. Second Series. Vol. X. — Cambridge, Mass. E. U.

M. Bôcher : On the Small Forced Vibrations of Systems with One Degree of Freedom. — C. L. Bouton : Discussion of a Method for Finding Numerical Square Roots. — W. E. Byerly : The In-and Circumscribed Quadrilateral. — R. D. Carmichael ; On the Geemetric Properties of Quartic Curves possessig Fourfol Symmetry with Respect to a Point. — J. L. Coolidge : The Gambler's Ruin. — L. L Dines : A Method of Investigating Numbers of the Forms $c^k s \pm 1$. — Otto Dunkel : Sufficient Conditions for Imaginary Roots of Algebraic Equations. — G. W. Hill : Application of Tchébychef's Principle in the Projection of Maps. — A. C. Lunn : The Foundations of Trigonometry. — J. C. Morehead : Extension of the Sieve of Erathosthenes to Arithmetical Progressions, and Application. — H. A. Sayre : The Solution of Algebraic Equations by Partiel Differential Equations. — Miss M. E. Sinclair : Concerning a Compound Discontinuous Solution in the Problem of the Surface of Revolution of Minimum Area. — J. H. Wedderburn : On

the Direct Product in the Theory of Finite Groups. — W. D. A. Westfall : Existence of the Generalized Green's Function. – J. K. Whittmore : Two Principles of Map-Making. — E. B. Wilson : Applications of Probability to Mechanics. — Thermodynamic Analogies for a Simple Dynamical System.

Atti della Reale Accademia dei Lincei. Anno CCCVI. Rendiconti. — Rome.

Janvier-Juin 1909. — E. Bertini : Sopra la teoria dei moduli di forme algebriche. — L. Bianchi : Sopra un caso limite delle transformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche. — Id. Sui gruppi di sostituzioni lineari corrispondenti alle divisioni dello spazio non-euclideo in tetraedri e in ottaedri regolari. — C. Burali-Forti : Alcune nuove espressioni assolute delle curvature in un punto di una superficie. — Id. : Una dimostrazione assoluta del teorema di Gauss relativo all'invariabilità della curvatura totale nella flessione. — F. Cecioni : Sulle equazioni fra matrici. — U. Crudedeli : Contributo alla teoria di certe equazioni funzionali. — G. Fubini : Sulle soluzioni fondamentali delle equazioni alle derivate parziali. — G. Lauricella : Sulla integrazione della equazione per le aree piane. — E. Levi : Sopra una proprietà caratteristica delle funzioni armoniche. — O. Nicoletti : Sulla caratteristica del determinante d'una forma di Hermite. L. Orlando : Sull'equazione di Riccati. — P. Pizzetti : Sul significato geometrico del secondo parametro differenziale di una funzione sopra una superficie qualunque. — P. Quintili : Sulla continuità di un integrale rispetto ad un parametro. — G. Sannia : Doppi sistemi di linee della sfera immagini di assintotiche. — Id. : Sopra alcuni inviluppi di ∞^2 sfera. — L. Tonelli : Sulla serie di Dirichlet. — Id. : Sopra una proprietà caratteristica delle funzioni armoniche. — V. Volterra : Sulle equazioni integro-differenziali. — Id. : Alcune osservazioni sopra proprietà atte ad individuare una funzione. — P. Burgatti : Sulle equazione generali della dinamica. — P. Pizzetti : Corpi equivalenti rispetto alla attrazione newtoniana esterna. – G.-A. Crocco : Di un importante coefficiente di stabilità negli aeroplani. — L. Orlando : Sopra un brevetto Crocco, relativo all'attacco delle ali di un aeroplano. — Id. : Effetto dell'attacco elastico sul rollio di un aeroplano. — Id. : Modo d'intensificare gli effetti dell'attacco elastico in un aeroplano. — G. Zappa : Sul valore di una particolare legge di forza centrale. — F. Amodeo : Bonaventura cavalieri e la costruzione lineare delle coniche.

Bibliotheca mathematica. Zeitschr. f. Geschichte der mathem. Wissenchaften, herausgegeben von G. Eneström. Band 9, Teubner, Leipzig.

N° 4. — P. v. Schaewen : Die dreifachen Gleichheiten Fermats. — David-Eugene Smith : The portraits of Isaac Newton. (Mit Bildnissen von Newton als Titelbild). — G. Eneström : Über die erste Aufnahme der Leibnizschen Differentialrechnung, in Stockholm.

Bulletin de la Société Mathémathique de France. T. XXXVII, Paris.

Fasc. 2 et 3. — E. Barré : Etude sur le déplacement d'une hélice de forme variable. — A. Pellet : Des équations majorantes. — R. de Montessus : Recherche effective des racines réelles des séries hypergéométriques. — A. Buhl : Sur la croissance des coefficiants des séries trigonométriquee analytiques. — L. Zoretti : Un théorème sur la théorie des ensembles. —

S. Dautheville : Sur les systèmes non-holonomes. — S. Lattès : Sur les multiplicités invariantes par une transformation de contact. — Ch. Bioche : Sur les surfaces desmiques du quatrième ordre. — Ed. Maillet : Sur les quantités complexes. — Léon Autonne : Sur la fonction monogène d'une variable hypercomplexe dans un groupe commutatif.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 1909.

24 mai. — G. Bratu : Sur les équations mixtes linéaires. — C. Hansen : Sur la somme des *n* premiers coefficients d'une série de Taylor. — L. Desaint : Sur les représentations générales des fonctions. — R. Birkeland : Sur certaines irrégularités des équations différentielles. — J. Chazy : Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes.

1er juin. — P. Kœbe : Fonction potentielle et fonction analytique ayant un domaine d'existence donné à un nombre quelconque (fini ou infini) de feuillets.

7 juin. — C. Guichard : Sur les congruences dont les deux surfaces focales sont des quadriques. — A. Demoulin : Sur les surfaces telles que les courbures géodésiques des lignes de courbure soient respectivement fonctions des courbures principales correspondantes. — B. Hostinsky : Sur une généralisation de la géométrie des cyclides. — H. Poincaré : Les ondes hertziennes et l'équation de Fredholm. — H. Larose : Sur une représentation physique des fonctions thêta.

14 juin. — E. Picard : Quelques remarques sur les équations intégrales de première espèce et sur certains points de Physique mathématique. — E. Vallier : Sur les intégrales pseudo-elliptiques ou hyper-elliptiques. — S. Zaremba : Sur une note récente de M. S. Bernstein. — J. Chazy : Sur les équations différentielles à points critiques fixes. — E. Borel : Sur l'étude des variations des quantités statistiques.

21 juin. — S. Sanielevici : Sur une question de minimum. — M. Riesz : Sur les séries de Dirichlet. — L. Thouveny : Le vol ramé et les formes de l'aile. — A. Rateau : Méthodes d'expériences pour recherches aérodynamiques.

28 juin. — E. Picard : Sur les équations intégrales de première espèce. — R. de Montessus : Sur le calcul des racines des équations numériques. — A. Chatelet : Sur une extension de la théorie des fractions continues.

5 juillet. — M. Riesz : Sur la sommation des séries de Dirichlet. — B. Gambier : Sur les intégrales singulières de certaines équations différentielles algébriques. — A. Korn : Sur les quelques inégalités jouant un rôle dans la théorie des vibrations électriques.

12 juillet. — H. Lebesgue : Sur la suite des fonctions mesurables. — D. Pompeiu : Sur les singularités des fonctions analytiques uniformes. — E. Maillet : Sur les systèmes de réservoirs.

19 juillet. — E. Maillet : Sur les systèmes d'équations différentielles.

26 juillet. — P. Boutroux : Sur les singularités transcendantes des fonctions inverses des fonctions entières. — A. Denjoy : Sur les fonctions analytiques uniformes à singularités discontinues. — A. Rateau : Etude de la poussée de l'air sur une surface.

2 août. — Ch. Lallemand : Sur l'élasticité du globe terrestre.

9 août. — A. Denjoy : Sur les singularités discontinues des fonctions analytiques uniformes. — Ch. Lallemand : Sur les marées de l'écorce et l'élasticité du globe terrestre.

23 août, 1909. — LEMERAY : Sur le calcul des racines des équations numériques. — Ch. LALLEMAND : Sur les mouvements de la verticale dus à l'attraction de la Lune et du Soleil, la Terre étant supposée rigide.

30 août. — SALTIKOW : Sur le perfectionnement de la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

6 septembre. — Ch. LALLEMAND : Sur les marées théoriques du géoïde, le globe terrestre étant supposé absolument rigide.

13 septembre. — M. SALTIKOW : Sur le problème de Sophus Lie. — DRZEWIECKI : Formules pratiques pour le calcul des hélices aériennes.

4 octobre. — V. MYLLER-LEBEDEFF : Sur l'équation hypergéométrique. — J. CHAZY : Sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est une forme et admet des singularités essentielles mobiles.

18 octobre. — L. LICHTENSTEIN : Sur la détermination des intégrales d'une équation différentielle par leurs valeurs le long d'un contour fermé. — H. POINCARÉ : Sur la diffraction des ondes hertziennes.

2 novembre. — A. DENJOY : Sur les ensembles parfaits discontinus à deux dimensions.

8 novembre. — E. FABRY : Module d'une série de Taylor. — E. VESSIOT : Sur les groupes de rationalité des systèmes d'équations différentielles ordinaires. — Demetrius GRAVE : Sur une identité dans la théorie des formes binaires quadratiques.

15 novembre. — G. DARBOUX : Sur les congruences de courbes et sur les surfaces normales aux droites d'un complexe (v. aussi séance du 22 nov.) — N. E. NOERLUND : Sur les équations aux différences finies. — G. A. MILLER : Sur les groupes engendrés par deux opérateurs dont chacun transforme le carré de l'un en son inverse.

22 novembre. — J. HAAG : Sur certains groupes de familles de Lamé. — S. CARRUS : Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles. — Marcel RIESZ : Sur les séries de Dirichlet et les séries entières.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik herausgegeben von Emil LAMPE. — Band 38 : Jahrgang 1907. — G. Reimer, Berlin.

Heft 1 (p. 1 à 496). — Geschichte, Philosophie und Pädagogik. — Algebra. — Niedere und höhere Arithmetik. — Kombinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Reihen. — Differential und Integralrechnung. — Funktionentheorie. — Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Heft 2 (p. 497 à 704). — Reine, elementare und synthetische Geometrie. — Analytische Geometrie. — Mechanik.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, in Monatsheften herausgegeben von A. GUTZMER. B. 18, 1909 : B.-G. Teubner, Leipzig.

Nos 5 à 10. — Heinr. W. E. JUNG : Der Riemann-Rochsche Satz für algebraische Funktionen zweier Veränderlichen (Schluss). — J. PLEMELJ : Über Schlesingers « Beweis » der Existenz Riemannscher Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe. — Friedrich ENGEL : Hermann Grassmann. Festrede, gehalten, in Greifswald. — Georg HAMEL : Über Raum, Zeit und Kraft als apriorische Formen der Mechanik. — F. JUNG : Zur vektoranalytischen Darstellung des Tensors. — P. WERNICKE : Die Zahl der ordinären Kollineationstypen. — J. PERL : Bemerkungen zur Formel $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$ J. v. Sz. NAGY : Bemerkung zu der Abhandlung des Herrn P. v. SCHAEWEN,

Jahresbericht Bd. 18, S. 7 ff. — K. Roux : Die oskulierenden Kreise eines Kegelschnittes. — Sprechsaal für die Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. — R Fueter : Zur Theorie der Modulfunktionen. — Paul Epstein : Eine einfache Ableitung der linearen Transformation der elliptischen Modulfunktion $\eta(\omega)$. — E. Lampe : Hugo Hertzer. (Mit Bildnis im Text). — Rudolf Rothe : Über die Gewebe auf einer Fläche und über die Flächen, deren Krümmungslinien ein Gewebe bilden. — H. Liebmann : Vereinfachte Behandlung einiger Minimalprobleme von Tschebyscheff.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von K. Hensel. Band CXXXV. — Georg Reimer, Berlin.

Band 135. Heft. 1. — W. Ritz : Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. — L. David : Zur Theorie der Schapiraschen Iteration. — E. Haentschel : Über eine von Hermite herrührende Substitution zur Reduktion des elliptischen Integrals erster Gattung auf die Weierstrassche Normalform.

Heft 2. — G. Hessenberg : Kettentheorie und Wohlordnung. — L. E. Dickson : On the congruence $x^n + y^n + z^n \equiv 0 \pmod p$. — O. Biermann : Eine formale Ableitung der Laurentschen Reihe einer Funktion aus einer ihrer rational gebrochenen Näherungsfunktionnen. — A. Friedmann und J. Tamarkine : Quelques formules concernant la théorie de la fonction [x] et des nombres de Bernoulli.

Heft 3 u. 4. — C. Neumann : Über einige Reihen-Entwicklungen, die nach Produckten von Kugelfunktionen fortschreiten — L. E. Dickson : Lower limit for the number of sets of solutions of $x^e + y^e + z^e \equiv 0 \pmod p$. — P. Bohl : Über ein in der Theorie der säkularen Störungen vorkommendes Problem. — A. Thue : Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen. — E. Fischer : Verallgemeinerung des Sylvesterschen Determinantensatzes.

Monatshefte für Mathematik und Physik, herausgegeben von G. v. Escherich, F. Mertens u. W. Wirtinger. — Eisenstein & C°, Wien.

XX. Jahrgang (1909) ; 1., 2. Vierteljahr. — J. Puzyna : Geometrisches in der Weierstrasschen Theorie der algebraischen Funktionen. — E. Œkinghaus : Die Rotationsbewegungen der Langgeschosse während des Fluges. — R. Wagner : Zur Theorie der freien Schwingungen einer rechteckigen Membran. — H. Oppenheimer : Über Dreiecks- und Vielecksysteme als Träger der Kurve dritter Ordnung. — Ph. Frank : Ein Kriterium für die Stabilität der Bewegung eines materiellen Punktes in der Ebene und desses Zusammenhang mit dem Prinzip der kleinsten Wirkung. — A. Meder : Bemerkung zu zwei Sätzen v. Staudts. — Ph. Frank : Unstetige Lösungen beim Prinzip der kleinsten Wirkung.

3., 4. Vierteljahr. — J. Puzyna : Geometrisches in der Weierstrasschen Theorie der algebraischen Funktionen. — O. Dorner : Ueber Teiler von Formen. — L. Godeaux : Sur une coïncidence bicubique. — P. Frank : Eine Bermerkung über indefinite Variationsprobleme. — H. Hahn : Ueber Bolzas fünfte notwendige Bedingung in der Variationsrechnung. — H. Tietze : Notiz zur Approximation von Potenzreihen durch rationale Funktionen. — E. Wælsch : Ueber Kugelfunktionen, ihre binären Formen und Vielbeine. — O. Biermann : Zur näherungsweisen Kubatur. — L. Saalschutz : Die Darstellung der rationalen Brüche als Potenssummen. — B. Arndt : Ueber die

Verallgemeinerung des Krümmungsbegriffes für Raumkurven. — L. Tuschel : Ueber eine krummlinige Projektion und deren Verwendung in der darstellenden Geometrie.

Monnist (The). A Quarterly Magazine devoted to the Philosophy of Science; Editor : P. Carus. Vol. XIX. — The Open Court publishing C°, Chicago.

N° 2 (avril 1909) — J. L. Heiberg : A Newly discovered Treatise of Archimedes. — Dav. Eug. Smith : A Commentary of the Heiberg Manuscript of Archimedes. — H. Poincaré : The Choice of Facts. — Francis C. Russell : A modern Zeno.

Nouvelles Annales de Mathématiques, dirigées par C.-A. Laisant, C. Bourlet et R. Bricard, 4e série. — Gauthier-Villars, Paris.

Tome IX, janvier-mai 1909. — M. Fouché : Quelques théorèmes de géométrie projective relatifs à des triangles et à des coniques. — E. Keraval : Sur les courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire. — G. Fontené : Contribution à la théorie du tétraèdre. — E. Tarrière : Sur certains systèmes orthogonaux du plan et sur les surfaces intégrales de l'équation de Laplace. — Barré : Etudes sur les enveloppes de courbes à un paramètre. — M. F. Egan : Note sur une propriété des quadriques homofocales. — R. Bricard : Sur les quadriques circonscrites à deux sphères.— C. A. L. : Note au sujet d'un article de M. S. Cervera. — M. Fréchet : Une définition fonctionnelle des polynômes. — L. Godeaux : Sur les surfaces possédant une droite multiple. — G. Clapier : Agrégation des sciences mathématiques (1908). — Solution de la composition sur le calcul différentiel et intégral. — Hadamard : Notions élémentaires sur la géométrie descriptive de situation. — R. de Montessus : De l'usage pratique du théorème de Sturm. — Correspondance. — Certificats d'astronomie. — Certificats de mathématiques générales. — Solutions de questions proposées.

Proceedings of the London Mathematical Society. Série 2, vol. 7.

Nos 1 et 2. — W. Burnside : On the Theory of Group of Finite Order (Presidential Adress). — W. Burnside : On the Arithmetical Nature of the Coefficients in a Group of Linear Substitutions. — E. W. Hobson : On the Second Mean-value Theorem of the Integral Calculus. — E. W. Hobson : On the Representation of a Function by a Series of Legendre's Functions. — G. H. Hardy : A Note on the Continuity of a Function defined by an Infinite Product. — A. L. Dixon : The Eliminant of Three Quantics in Two Independent Variables. — H. Bateman : The Conformal Transformations of a Space of Four Dimensions and their Applications to Geometrical Optics. — F. B. Pidduck : The Energy and Momentum of an ellipsoidal Electron. — T. J. I. A. Bromwich : An Asymptotic Formula for the Generalised Hypergeometric Series. — W. J. Harrison : The Influence of Viscosity and Capillarity on Waves of Finite Amplitude. — H. Lamb : On the Theory of Waves propagated Vertically in the Atmosphere. — H. M. Macdonald : Note on the Evaluation of a Certain Integral containing Bessel's Functions. — A. C. Dixon : On Systems of Three Quaternary Quadrics that can be expressed by means of Five Squares. — W. H. Young : On Differentials.

Nos 3 et 4. — G.-H. Hardy : The Theory of Cauchy's Principal Values. — J.-E. Littlewood : On the Dirichlet Series and Asymptotic Expansions

of Integral Functions of Zero Order. — D.-M.-Y. Sommerville : On certain Periodic Properties of Cyclic Compositions of Numbers. — A.-C. Dixon : The Solution of Integral Equations.

Nos 5 à 7. — E. W. Hobson : Sir William Rowan Hamilton's Fluctuating Functions. — Id. : On the Representation of a Function by Series of Bessel's Functions. — A. L. Dixon : On Cubic Surfaces. The Reducton of a Quaternary Cubic from the Sum of Six Cubes to the Sum of Five. — W. H. Young : On Implicit Functions and their Differentials. — A. C. Dixon : On the Relation between Pfaff's Problem and the Calculus of Variations. — L. E. Dckson : Modular Invariants of a General System of Linear Forms. — G. H. Hardy : On a Integral Equation. — A. L. Dixon : The Eliminant of Three Quantics in Two Independent Variables. — Tables du tome 7.

2. Livres nouveaux :

F. Amodeo. — **Complementi di analisi algebrica elementare** con appendice sulle sezioni coniche. — 1 vol. in-8°, 312 p.; 3 L.; Luigi Pierro, Naples.

E. Fabry. — **Problèmes et exercices de mathématiques générales.** — 1 vol. in-8°, 420 p.; 10 fr.; A. Hermann & fils, Paris.

E.-A. Fouet. — **Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques.** — 1 vol. in-8°, 265 p.; 9 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

Giov. de Mauro. — **Elementi di Aritmetica pratica.** — 1 vol, in-16, 294 p.; 2 L.; G. D. Paravia & Co, Turin.

Ch. Riquier. — **Les systèmes d'équations aux dérivées partielles.** — 1 vol. in-8°, 590 p.; 20 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

Vte de Salvert. — **Mémoire sur l'attraction du parallélipipède éllipsoïdal.** — 1 fasc. in-8°, 89 p.; 7 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

C. Sautreaux. — **Essai sur les axiomes des Mathématiques.** Etude critique élémentaire. — 1 fasc. in-8°, 80 p.; Gratier & Rey, Grenoble.

G. Veronese. — **Elementi Geometria Intuitiva** ad uso delle scuole tecniche. — 1 vol. in-16, 156 p.; 2 L.; Drucker, Padoue.

Edm. Landau. — **Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen.** — 2 vol. in-8° : T. I, xviii et 564 p., 20 M.; T. II, ix et 398 p., 14 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

Th. Hollmann. — **Rechenbuch für höhere Mädchenschulen,** nach den neuen Lehrplänen. — Heft 1 für Kl. X, 61 Seiten, 80 Pf.; Heft. 2 für Kl. IX, 66 S., 80 Pf.; L. Schwann, Düsseldorf.

Th. Hollmann. — **Mathematik für höhere Mädchenschulen,** nach den neuen Lehrplänenn. I. *Geometrie.* — 1 vol. in-8°, 132 p.. cart.; 2 M.; L. Schwann, Düsseldorf.

J. Jahne und H. Barbisch. — **Leitfaden der Geometrie und des geometrischen Zeichnens für Knabenbürgerschulen.** Erste Stufe für die erste Klasse. Dritte, vollständig ungearbeitete Auflage. — 1 fasc. in-8°, 45 p., cart., 90 H.; Manz, Vienne.

J. Jahne und H. Barbisch. — **Leitfaden der Geometrie und des geometrischen Zeichnens für Mädchenbürgerschulen.** Erste Stufe für die erste Klasse, 45 S.; Zweite Stufe für die zweite Klasse, 35 S.; Dritte Stufe für die dritte Klasse, 41 S. — 3 fasc, in-8°., cart. 90 H.; les 3 fasc., en un seul, 2 K.; Manz, Vienne.

W. Quehl. — **Verordnungen betreffend höhere Mädchenschulen in Preussen.** Lyzeen und Studien-Anstalten. — 1 vol. in-8°, 159 p.; 3 M.; L. Schwann, Düsseldorf.

E. Sommermeyer. — **Ueber Gleichungen der Form** $x^n + y^n = z^n$ in ganzen Zahlen und den grossen Fermatschen Satz. — 1 fasc. in-8°, 20 p.; 1 M.; W. Pormetter, Berlin.

R. Suppantschitsch. — **Leitfaden der darstellenden Geometrie** für die V. und VI. Klasse der Realgymnasien. — 1 vol. in-8°, 196 p.; 3 K.; F. Tempsky, Vienne.

Désiré André. — **Des notations mathématiques,** énumération, choix et usage. — 1 vol. in-8°, 501 p.; 16 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

M. Bôcher. — **Einführung in die höhere Algebra.** Deutsch von Hans Beck. — 1 vol. in-8°, relié, 348 p.; 7 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

A. Brill. — **Vorlesungen zur Einführung in die Mechanik** raumerfüllender Massen. — 1 vol. in-8°, relié, 236 p.; 8 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

R. Gans. — **Einführung in die Vektoranalysis** mit Anwendungen auf die mathematische Physik. — 1 vol. in-8°, relié, 125 p.; 3 M. 60; B. G. Teubner, Leipzig.

J. Henrici u. P. Treutlein. — **Lehrbuch der Elementar-Geometrie.** Erster Teil: Gleichheit der Gebilde in einer Ebene u. deren Abbildung ohne Maszänderung (nebst einer Aufgabensammlung). — 1 vol. relié, 139 p.; 2 m. 40; 4e édition; B. G. Teubner, Leipzig.

W. Killing u. W. Hovestadt. — **Handbuch des mathematischen Unterrichts.** Erster Band. — 1 vol. in-8°, relié, 456 p.; 10 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

W. Lietzmann. — **Stoff und Methode in mathematischen Unterricht** der norddeutschen höheren Schulen auf Grund der vorhandenen Lehrbücher. (Abhandlungen über den mathem. Unterricht in Deutschland, Band 1, Heft 1). — 1 vol. in-8°, br., 102 p.; 2 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

Kurt Liewald. — **Die Anschaulichkeit im geometrischen Anfangsunterricht.** — 1 fasc. in-8°, 33 p.; 80 Pf.; B. G. Teubner, Leipzig.

K. Schwarzschild. — **Ueber das System der Fixsterne.** Aus populären Vorträgen. — 1 fasc. in-8°, 44 p.; 1 M., B. G. Teubner, Leipzig.

E. Borel. — **Leçons sur la Croissance** professées à la Faculté des Sciences de Paris, recueillies et rédigées par A. Denjoy. — 1 vol. gr. in-8°, 169 p., 5 fr. 50; Gauthier-Villars, Paris.

O. Blumenthal. — **Principes de la Théorie des Fonctions** d'ordre fini. — 1 vol. gr. in-8° (Collection Borel), 150 p., 5 fr. 50; Gauthier-Villars, Paris.

J. Bojko. — **Neue Tafel der Viertelquadrate** aller natürlichen Zahlen von 1 bis 20000 zur Bildung aller möglichen Produkte im Bereiche 1.1 bis 10000.10000. — 1 fasc. de 20 p., 1 fr. 50; Speidel, Zurich.

J. Hadamard. — **Leçons sur la Théorie des Variations.** *Tome premier :* La variation première et les conditions du premier ordre; les conditions de l'extremum libre. — 1 vol. gr. in-8°, 520 p., 18 fr.; Hermann et fils, Paris.

A. Höfler. — **Didaktik des mathematischen Unterrichts** (Band 1 der *Didaktischen Lehrbücher für den realistischen Unterricht an höh. Schulen,* herausgegeben von A. Höfler u. E. Poske). — 1 vol. gr. in-8°, 509 p., avec 2 planches et 147 figures; 12 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

POUR UNE THÉORIE DE LA MESURE

L'idée de *mesure* est à la base de toutes les applications des Mathématiques. C'est à elle que l'on doit l'introduction du nombre dans le domaine physique et, par conséquent, la soumission, bien qu'encore incomplète, de ce domaine aux Mathématiques. Elle est, ainsi que l'a fait observer un biologiste doublé d'un clairvoyant psychologue, l'élément primordial et indispensable de toute science[1]. Il est donc permis de regretter la parcimonie avec laquelle quelques considérations, d'ailleurs généralement dépourvues de précision, lui sont consacrées dans les cours d'Arithmétique et de voir là une lacune à combler.

En outre, la Géométrie métrique (la seule encore dont les principes soient nettement établis) est, en définitive, l'étude d'un système de mesure, de sorte que c'est aussi dans une théorie générale de la mesure que la Géométrie (en sa substance purement rationnelle) doit trouver son véritable fondement.

On se propose, dans ce premier article, de rechercher quels pourraient être les éléments essentiels d'une théorie purement rationnelle de la mesure pour les continus à une dimension.

§ I.

On entend, en général, par *grandeur*, ce qui est susceptible de mesure, c'est-à-dire susceptible de représentation numérique, et l'on distingue deux sortes de grandeurs, celles que l'on représente au moyen des nombres naturels et celles que l'on représente au moyen du continu numérique.

[1] F. Le Dantec, *Science et conscience ;* Paris, 1908.

Pour les premières, le mécanisme de la représentation est si simple et si naturel qu'il paraît inutile de s'y arrêter.

La question est loin d'être aussi facile pour les grandeurs de la deuxième catégorie. Le continu numérique (ou l'ensemble des nombres réels, nous faisons ici une confusion sans conséquence), bien que *dense*, est composé d'éléments *distincts*, tandis que l'*individualité* disparaît du domaine physique justement lorsque l'on s'efforce d'y introduire la précision. Les grandeurs physiques, pour pouvoir être représentées numériquement, doivent donc subir une transformation, toute conventionnelle d'ailleurs, qui en fait les êtres purement rationnels que sont les *ensembles applicables sur le continu numérique*. Ce sont ces ensembles auxquels l'on doit donner le nom de *continus*. La notion de ces ensembles ordonnés, étant ainsi purement rationnelle, peut évidemment être établie, en dehors de toute intuition expérimentale, par des procédés purement logiques et, par suite, la notion de mesure acquiert elle-même un caractère franchement rationnel et prend place dans le domaine proprement mathématique.

Puisqu'un continu, par définition, peut toujours être supposé appliqué sur le continu numérique (ou l'ensemble des nombres réels), il doit suffire de développer sur celui-ci la notion de mesure. On peut pourtant donner à cette notion une définition susceptible de s'appliquer à d'autres ensembles ordonnés que les continus.

Supposons que l'on ait pu définir, pour les segments[1] d'un ensemble ordonné M, une « relation d'égalité[2] » satisfaisant aux conditions suivantes :

a) Etant donné un segment (m_1, m_2), *il existe toujours, à droite d'un élément quelconque,* m'_1 *de l'ensemble, un et un seul*

[1] J'appelle *segment* d'un ensemble ordonné l'ensemble formé par les éléments compris entre deux éléments déterminés et par ces deux éléments.

[2] Définir, pour les éléments d'un ensemble, une « relation d'égalité », c'est répartir ces éléments en ensembles s'excluant deux à deux, de sorte que chaque élément m n'est contenu que dans un seul de ces ensembles partiels, que l'on peut, par conséquent, désigner par $F(m)$; la relation d'égalité entre deux éléments pourra alors s'exprimer sous la forme :

$$F(m) = F(m')$$

où le signe = exprime l'identité de deux ensembles et possède, par suite, toutes ses propriétés habituelles.

élément m'_2 *tel que les deux segments* (m_1, m_2) *et* (m'_1, m'_2) *soient « égaux ».*

b) Si les deux groupes ordonnés de trois éléments (m_1, m_2, m_3), (m'_1, m'_2, m'_3) *sont tels que les segments* (m_1, m_2) *et* (m'_1, m'_2) *d'une part,* (m_1, m_3) *et* (m'_1, m'_3) *d'autre part, sont égaux, il en doit être de même des segments* (m_2, m_3) *et* (m'_2, m'_3).

On dira alors que l'on a défini pour l'ensemble M (ou mieux pour ses segments) un *système de mesure.*

On peut aussi individualiser ce qu'ont de commun les segments égaux entr'eux et en faire un « abstrait rationnel », auquel on peut donner le nom de *grandeur*. La proposition (b) est alors équivalente à la suivante : « trois éléments m_1, m_2 et m_3 étant donnés, la grandeur du segment (m_1, m_3) est déterminée en fonction des grandeurs a et b des segments (m_1, m_2) et (m_2, m_3) ». On l'appelle *somme* des grandeurs a et b et on la désigne par l'expression $a + b$; sa définition s'exprime alors par la formule

$$(m_1, m_2) + (m_2, m_3) = (m_1, m_3) ,$$

d'où l'on déduit facilement la propriété suivante :

$$(a + b) + c = a + (b + c) .$$

On peut généraliser les notions qui viennent d'être établies (y compris celle d'addition) en faisant abstraction de l'idée d'ordre. Il est intéressant de remarquer qu'une relation d'égalité satisfaisant à ce qui subsiste alors des conditions (a) et (b) ne suffit pas pour ordonner l'ensemble M. On en a un exemple dans la notion de vecteur en Géométrie, qui détermine évidemment une telle relation pour les couples de points de l'espace.

Pour développer en toute généralité une théorie de la mesure pour les ensembles ordonnés à une dimension, il y aurait lieu d'abord de déterminer ceux de ces ensembles qui comportent des relations d'égalité satisfaisant aux conditions (a) et (b). On se bornera dans ce qui va suivre à déterminer les systèmes de mesure ou *métriques* dont est susceptible l'ensemble des nombres réels, pris comme type des continus à une dimension.

§ II.

Une relation d'égalité de l'espèce définie plus haut est alors exprimée par l'égalité des valeurs d'une fonction numérique binaire et le problème revient, par suite, à déterminer les fonctions $F(x_1, x_2)$ de deux variables qui satisfont aux deux conditions suivantes, équivalentes aux conditions (a) et (b).

(a') $F(x_1, x_2)$ est une fonction croissante de x_2, décroissante de x_1 et prend toutes les valeurs comprises entre ses valeurs extrêmes lorsque l'une des variables décrit un segment ;

(b') il existe une relation entre les valeurs des trois expressions $F(x_1, x_2)$, $F(x_1, x_3)$, $F(x_2, x_3)$.

En se bornant aux fonctions analytiques (ou, du moins, dérivables), il est facile de déterminer la forme générale des fonctions possédant la propriété (b').

Les expressions $F(x_1, x_2)$, $F(x_1, x_3)$ et $F(x_2, x_3)$ peuvent en effet être considérées comme trois fonctions de trois variables indépendantes x_1, x_2 et x_3 ; la condition pour qu'il existe une relation entre ces trois fonctions est que leur déterminant fonctionnel soit nul, ce qui s'écrit, en désignant respectivement par F'_1 et F'_2 les fonctions dérivées de F par rapport à ses deux arguments,

$$F'_1(x_1, x_2)\, F'_1(x_2, x_3)\, F'_2(x_1, x_3) + F'_2(x_2, x_3)\, F'_2(x_1, x_2)\, F'_1(x_1, x_3) = 0$$

ou

$$F'_1(x_1, x_2) \frac{F'_2(x_1, x_3)}{F'_1(x_1, x_3)} + F'_2(x_1, x_2) \frac{F'_2(x_2, x_3)}{F'_1(x_2, x_3)} = 0 .$$

En égalant x_3 à une constante et posant

$$\int \frac{F'_2(x, x_3)}{F'_1(x, x_3)} dx = f(x) ,$$

l'égalité précédente est une équation aux dérivées partielles en x_1 et x_2 et sa solution générale est

$$F(x_1, x_2) = \Phi\left[f(x_2) - f(x_1)\right] .$$

Il est vraisemblable que ce résultat est indépendant de la condition de dérivabilité, qui a été admise pour sa démonstration, et que les fonctions non dérivables ou même discontinues satisfaisant à la condition (b') doivent pouvoir se mettre sous la forme précédente. Mais, pour satisfaire aux conditions (a'), il est nécessaire que $f(x)$ soit une fonction croissante ou décroissante, toujours déterminée et prenant toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$ (elle est, par suite, continue).

Il est évident d'ailleurs que toute fonction de F définit la même métrique, car elle définit la même relation d'égalité pour les segments. Parmi les fonctions définissant la même métrique, une jouit de propriétés particulières, c'est

$$f(x_2) - f(x_1) ;$$

pour cette fonction la relation fondamentale prend la forme

$$f(x_3) - f(x_1) = \left[f(x_2) - f(x_1)\right] + \left[f(x_3) - f(x_2)\right] .$$

Deux segments quelconques (x_1, x_2) et (x_3, x_4) donnent toujours lieu à un nombre défini par l'expression

$$a = \frac{f(x_4) - f(x_3)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

et qui est leur *rapport* dans la métrique considérée. Les rapports des divers segments à un segment choisi arbitrairement sous le nom d'*unité* sont dits les *mesures* de ces segments.

Observons enfin que rien n'empêche de prendre pour abscisse $f(x)$, de sorte qu'une fonction métrique pourra toujours se mettre sous la forme $x_2 - x_1$.

L'exposé précédent a été développé sur l'ensemble numérique afin de simplifier les démonstrations et de pouvoir s'appuyer sur des propriétés connues. Mais il est facile de se rendre compte que les résultats, dans ce qu'ils ont d'essentiel, peuvent être établis au moyen de raisonnements directement développés sur les continus, indépendamment de toute application préalable de ces derniers sur l'ensemble numérique, et en faisant seulement intervenir, outre les pro-

priétés générales des continus, les propriétés (a) et (b) de la relation d'égalité qui définit une métrique. Il suffira de rappeler que la notion de rapport s'établit, par les procédés classiques[1], au moyen de ces deux propriétés des continus : divisibilité d'un segment quelconque en n segments égaux entr'eux et existence, deux segments quelconques étant donnés, de multiples de l'un plus grands que l'autre (axiome d'Archimède).

On sait que ces deux propriétés appartiennent aussi à l'ensemble des nombres rationnels ; cet ensemble admet, par conséquent, des métriques ayant les mêmes caractères essentiels. Dès lors une remarque s'impose. Rien n'empêche de substituer, dans toutes les applications des Mathématiques, l'ensemble des nombres rationnels à l'ensemble des nombres réels[2]. Il est évident que la précision que comporte l'expression mathématique n'en resterait pas moins illimitée, seulement le rapport de deux segments serait toujours rationnel, les segments devenant tous, par hypothèse, commensurables entr'eux.

Il est clair que, dans la pratique, rien ne serait changé dans la manière d'opérer actuelle ; mais l'on peut conclure de là que, contrairement à une idée courante, la notion de nombre irrationnel n'est nullement inhérente à celle de mesure et qu'elle n'est nullement nécessaire aux applications mathématiques ; cette notion appartient donc essentiellement et exclusivement, — ainsi que le fait d'ailleurs observer M. F. Klein dans son profond ouvrage : *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie*, — au domaine des *Mathématiques exactes*, c'est-à-dire à l'analyse numérique.

§ III.

On a vu qu'à toute métrique est associée une opération sur les segments ou plutôt sur leurs grandeurs, qui peut être définie de la manière suivante :

---

[1] Cf. R. Baire, *Leçons sur les Théories générales de l'Analyse*, p. 33 à 39 ; Gauthier-Villars, Paris, 1907.

[2] Il suffit, pour cela, de convenir que tout segment est un ensemble *dense* et *dénombrable ;* cette convention remplacerait simplement celle qui affirme l'existence des éléments limites et qui est spéciale aux continus.

La grandeur d'un segment formé par l'ensemble de deux segments dont l'un a pour élément initial le dernier élément de l'autre ne dépend évidemment que des grandeurs a et b des segments composants ; on l'appellera *somme* de ces grandeurs et on la désignera par $a + b$. L'opération binaire ainsi définie pour les grandeurs peut être appelée « opération d'addition ».

De deux segments ayant le même élément initial et ayant des grandeurs différentes a et b si le premier contient le second, on écrira $a > b$, la relation étant évidemment indépendante de l'élément initial choisi. On définit ainsi une relation d'ordre pour les grandeurs des segments.

En s'appuyant sur les propriétés (*a*) et (*b*) caractéristiques des relations d'égalité métriques, on démontre facilement que les opérations d'addition possèdent les propriétés suivantes :

(I)
(1) $a + b = x$, a toujours une solution en x,
(2) $a + b > a$,
(3) si $b > a$, $a + x = b$ a toujours une solution en x,
(4) $(a + b) + a = a + (b + c)$.

On reconnaîtra sans difficulté que, si l'on a défini, pour les segments ayant une même origine, une opération binaire possédant les propriétés (I), elle permettra de définir une relation d'égalité métrique et, par suite, une métrique.

La propriété essentielle des opérations d'addition est l'*associativité* exprimée par la formule (4). Quant à la *commutativité,* qui n'est pas indispensable, l'on reconnaît facilement qu'elle équivaut à la propriété supplémentaire des relations d'égalité qui permettrait de substituer à la condition (*b*) la proposition suivante : *deux segments composés de parties respectivement égales sont égaux ;* cette propriété est évidente, notamment, lorsqu'il est possible de diviser deux segments quelconques en parties toutes égales entr'elles.

A toute métrique est associé un *groupe de tranformations* que l'on peut définir de la manière suivante : m_0 et m_1 étant deux éléments fixes, à tout élément m de l'ensemble situé à droite de m_0 on peut faire correspondre un autre élément m' tel que l'on ait :

$$(m_1, m') = (m_0, m).$$

On détermine ainsi une application (au moins partielle) de l'ensemble sur lui-même, c'est-à-dire une *transformation*. Si l'élément m_1 est considéré comme un paramètre variable, on obtient ainsi une série de transformations, et il est facile de reconnaître que la proposition *b*) exprime précisément la condition pour que ces transformations forment un groupe, c'est-à-dire pour que la transformation obtenue par l'application successive de deux d'entre elles appartiennent aussi à la série. Il est évident en outre que ces transformations *conservent la métrique*, c'est-à-dire que les segments transformés de deux segments égaux sont encore égaux.

En désignant par a la grandeur du segment (m_0, m_1), qui joue le rôle de paramètre, l'équation du groupe peut s'écrire :

$$(m_0, m') = a + (m_0, m) ,$$

et, si b est le paramètre d'une transformation du groupe faisant correspondre à l'élément m' un élément m'', on aura :

$$(m_0, m'') = b + (m_0, m') = b + a + (m_0, m) .$$

Le paramètre de la transformation résultante est donc $b + a$.

A la métrique est associé un autre groupe de transformations, qui peut être défini par l'égalité :

$$(m, m') = a ,$$

où a est un segment qui détermine la transformation dans le groupe. En appliquant ensuite la transformation

$$(m', m'') = b ,$$

on obtient évidemment la transformation

$$(m, m'') = a + b ,$$

qui appartient bien à la série, ce qui prouve que celle-ci constitue bien un groupe.

Lorsque l'opération d'addition afférente à la métrique est commutative, les deux groupes se confondent ; c'est le cas pour les continus, pour lesquels l'équation du groupe prend la forme :

$$f(x') - f(x) = a .$$

On verrait enfin que l'on peut aussi définir la métrique en fonction de l'un des groupes de transformations qui lui sont associés.

Une métrique peut donc être définie de trois manières différentes, savoir : au moyen d'une *relation d'égalité* applicable aux segments et pouvant être déterminée, dans le cas des continus, par une fonction numérique de deux éléments, au moyen d'une *opération d'addition* définie pour les segments, enfin au moyen d'un *groupe de transformations* se rapportant aux éléments mêmes de l'ensemble ordonné primitif. Ces trois points de vue se complètent l'un l'autre et les trois modes de définition peuvent trouver des applications dans le domaine physique.

On examinera dans un prochain article de quelle manière doit être généralisée la notion de mesure pour pouvoir s'appliquer aux continus à plusieurs dimensions.

G. COMBEBIAC (Montauban).

SUR LE MOMENT MAGNÉTIQUE

A PROPOS DES DEUX SIGNIFICATIONS DU TERME DE MOMENT DANS LA MÉCANIQUE

ET SUR LES CENTRES DE GRAVITÉ MAGNÉTIQUES

---

1. — **Centre de gravité et équilibre d'un corps pesant tournant autour d'un point fixe.** — Rappelons que dans la théorie des forces parallèles, on appelle *moment d'une force par rapport à un plan* le produit de la force par la distance de son point d'application au plan, et qu'on démontre que le moment de la résultante est égal à la somme des moments des composantes. Etant donnée une force de direction constante et proportionnelle à l'élément de masse, telle que la pesanteur, et un système d'axes rectangulaires dont l'origine est choisie arbitrairement, on détermine la position du centre

de gravité, c'est-à-dire du point d'application de la résultante par les équations

$$(1) \qquad x_1 = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m}, \quad y_1 = \frac{\Sigma my}{\Sigma m}, \quad z_1 = \frac{\Sigma mz}{\Sigma m},$$

m étant l'élément de masse dont les coordonnées sont x, y, z. Désignons par α, β, γ, les numérateurs des seconds membres ; on voit que ce sont les moments du corps par rapport aux plans coordonnés. Il est aisé de montrer que ce sont aussi les trois projections sur les axes d'un vecteur qui a pour direction la droite joignant l'origine au centre de gravité et pour valeur le produit de la longueur de cette droite par la masse totale du corps. En effet, considérons un plan passant par l'origine et dont la normale fait avec les axes les angles λ, μ, ν ; la distance d'un point x, y, z à ce plan est

$$x \cos\lambda + y \cos\mu + z \cos\nu$$

et, par conséquent, le moment du corps par rapport à ce plan est

$$\cos\lambda\Sigma mx + \cos\mu\Sigma my + \cos\nu\Sigma mz,$$

expression qui est la somme des projections sur cette normale des moments α, β, γ pris respectivement sur les axes, et par conséquent aussi la projection de la résultante de α, β, γ, qui a pour valeur

$$\delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

et dont les cosinus directeurs sont

$$\frac{\alpha}{\delta}, \quad \frac{\beta}{\delta}, \quad \frac{\gamma}{\delta}, \quad \text{ou d'après (1)} \quad \frac{x_1}{l}, \quad \frac{y_1}{l}, \quad \frac{z_1}{l}$$

en faisant

$$l = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

et l'on a en outre, comme on l'a dit ci-dessus, $\delta = \Sigma lm$. C'est le moment de masse du corps par rapport à un plan normal à la droite l.

Jusqu'ici il n'est pas question d'un moment de rotation et

c'est en établissant les conditions d'équilibre d'un corps pesant mobile autour de l'origine que la seconde signification du terme intervient. Rappelons que *le moment d'une force par rapport à un axe de rotation est le produit de la projection de la force sur un plan normal à l'axe par la distance du point d'application à l'axe.* On démontre que le travail élémentaire, dû à une rotation autour de l'axe, est proportionnel au moment, et il en résulte que les équations d'équilibre du corps mobile autour de l'origine sont les suivantes

$$(2)\qquad \beta Z - \gamma Y = 0\ ,\quad \gamma X - \alpha Z = 0\ ,\quad \alpha Y - \beta X = 0\ ,$$

dans lesquelles α, β, γ, ont la même signification que ci-dessus et X, Y, Z, sont les composantes de la force F rapportée à l'unité de masse. Ces équations impliquent celles que l'on obtient en remplaçant α, β, γ, par x_1, y_1, z_1 et celles-ci sont équivalentes aux suivantes

$$\frac{x_1}{X} = \frac{y_1}{Y} = \frac{z_1}{Z} = \frac{l}{F}\ .$$

La condition d'équilibre est que la droite qui joint le centre de gravité à l'origine soit parallèle à la force.

Lorsque la condition n'est pas satisfaite, la force exerce une action rotative et le moment est la résultante des trois moments exprimés par les premiers membres des (2). Or ces trois doubles produits sont les projections sur les axes du produit vectoriel de la force F et du moment δ, d'où résulte que ce vecteur est normal au plan de F et de δ et qu'il a pour valeur

$$F\ .\ \delta\ .\ \sin\,(F\delta)\ .$$

Si l'on suppose que F et sin (Fδ) soient variables, le facteur δ est l'élément constant qui ne dépend que du corps et du point fixe et qui devient le moment de rotation si l'on suppose F égal à l'unité et que l'angle de F et de l soit droit. C'est ainsi que la quantité δ en gardant sa valeur numérique devient assimilable à un moment de rotation, mais il faut observer que la direction du vecteur δ est la même que celle de l, tandis que la direction du vecteur, moment de rotation,

est normale à l et à F. Pour éviter la confusion, il serait préférable de désigner δ par *moment de masse* et d'appeler *moment de rotation disponible* la quantité (δ).

II. — **Centres de gravité magnétiques.** — L'action d'une force magnétique sur un aimant diffère, comme on va le voir, de celle que nous venons d'étudier par le fait que la masse magnétique est réductible à deux centres de gravité donnant lieu à un couple de rotation, de telle sorte qu'il n'y a pas lieu de considérer un point fixe autour duquel le corps peut tourner.

Nous admettons que dans chaque élément de volume, il se trouve deux masses magnétiques égales, $-\mu_1$ et μ_2, la première négative, la seconde positive. Considérons toutes les masses élémentaires en valeur absolue, abstraction faite de leur signe et désignons les par μ' de telle sorte que, numériquement,

$$(3) \qquad \mu' = \mu_1 + \mu_2 = 2\mu_1 = 2\mu_2 ,$$

et appliquons leur la règle pour trouver le centre de gravité.

On a pour les coordonnées du centre magnétique absolu

$$(4) \qquad x' = \frac{\Sigma\mu' x}{\Sigma\mu}, \quad y' = \frac{\Sigma\mu' y'}{\Sigma\mu'}, \quad z' = \frac{\Sigma\mu' z}{\Sigma\mu'} .$$

Soient x_1 et x_2 les valeurs de x pour les masses μ_1 et μ_2 correspondant à μ' ; nous admettons que

$$(5) \qquad x' = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y' = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z' = \frac{z_1 + z_2}{2},$$

$$(6) \qquad x_2 = x_1 + dl \cos\lambda, \; y_2 = y_1 + dl \cos\mu, \; z_2 = z_1 + dl \cos\nu,$$

dl est la distance élémentaire constante des deux masses μ_1 et μ_2 et λ, μ, ν sont les angles avec les axes de la direction de l'aimantation et sont variables.

Déterminons de même le centre de gravité magnétique négatif et le centre de gravité magnétique positif ; on a

$$(7) \qquad x'_1 = \frac{\Sigma\mu_1 x_1}{\Sigma\mu_1}, \qquad x'_2 = \frac{\Sigma\pi_2 x_2}{\Sigma\mu_2},$$

et ces mêmes équations pour les autres coordonnées. En tenant compte de (3), de (5) et de (6), les (4) deviennent

$$x' = \frac{2\Sigma\mu_1 x_1 + \Sigma\mu_1 dl \cos\lambda}{2\Sigma\mu_1}$$

et, d'autre part, à cause de (6), (7) donne

(8) $$x'_2 - x'_1 = \frac{\Sigma\mu_1 dl \cos\lambda}{\Sigma\mu_1}$$

il résulte de ces deux dernières équations

(9) $$x' = x'_1 + \frac{x'_2 - x'_1}{2} = \frac{x'_1 + x'_2}{2}, \quad y' = \frac{y'_1 + y'_2}{2}, \quad z' = \frac{z'_1 + z'_2}{2}.$$

Les deux centres, positif et négatif se trouvent sur une droite passant par le centre absolu, de part et d'autre et à égales distances de ce centre.

Assimilons la masse magnétique absolue à la masse matérielle d'un corps ayant ce même volume. La densité sera une fonction de x, y, z, qui est l'aimantation du corps aimanté au point considéré et le centre de gravité pourra être déterminé par des intégrales de volume. Puisque, pour chaque élément de volume, en supposant un champ magnétique uniforme, les deux forces agissant sur les masses μ_1 et μ_2 peuvent être tansportées au centre $\frac{x_1 + x_2}{2}$ en laissant un couple élémentaire, c'est au centre absolu que la résultante totale s'applique, mais cette résultante est nulle.

Quant à l'action rotative, les équations (2) sont applicables à la force magnétique supposée proportionnelle à la masse magnétique, à cette différence près qu'il faut tenir compte du signe des masses μ_1 et μ_2. En effet le moment de rotation de la force par rapport à l'axe des x est :

$$[\Sigma\mu_2 y_2 - \Sigma\mu_1 y_1] Z - [\Sigma\mu_2 z_2 - \Sigma\mu_1 z_1] Y,$$

en désignant par X, Y, Z les composantes de F suivant les directions positives des axes, car la force qui agit sur la masse $-\mu_1$ est dirigée en sens contraire de la composante Z ou Y. Il en résulte, à cause des (6) que les moments déjà désignés par α, β, γ dans (2) ont ici pour valeur

$$\Sigma(\mu_2 x_2 - \mu_1 x_1), \quad \Sigma(\mu_2 y_2 - \mu_1 y_1), \quad \Sigma(\mu_2 z_2 - \mu_1 z_1).$$

expressions qu'on peut désigner par moments de magnétisme par analogie avec moments de masse, mais qu'il n'y a pas lieu de prendre par rapport à une origine arbitraire, car ces expressions se mettent, à cause de (6), sous la forme :

$$\Sigma \mu dl \cos \lambda = (x'_2 - x'_1) \Sigma \mu_1 \ . \tag{10}$$

On a donc, en gardant pour δ le sens qui lui a été attribué et qui devient la longueur de la droite qui joint les deux centres de gravité, multipliée par la masse totale positive

$$\delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \ .$$

C'est le moment de masse magnétique par rapport à un plan normal à la droite qui joint les deux centres de gravité magnétiques.

On voit ainsi que le vecteur δ est un moment dans l'acception du terme qui est relative à la composition des forces parallèles, sauf que les masses sont accouplées deux à deux égales et de signes contraires, et qu'il en résulte que ce vecteur a pour direction la droite qui joint les deux centres et pour valeur, la longueur de cette droite multipliée par la masse totale positive ou négative en valeur absolue.

Comme dans le cas du corps pesant, ce sont les équations d'équilibre rotatif qui font intervenir la notion de moment de rotation. Ces équations sont les mêmes que (2) et, en remplaçant α, β, γ, par leurs valeurs (10) conduisent à la condition d'équilibre

$$\frac{x'_2 - x'_1}{X} = \frac{y'_2 - y'_1}{Y} = \frac{z'_2 - z'_1}{Z} ,$$

analogue à celle obtenue pour la pesanteur, sauf que la droite qui doit être parallèle à la force est celle qui joint les deux centres, et que par conséquent la position d'équilibre est indépendante de l'origine arbitraire. Lorsque la condition n'est pas satisfaite, le champ exerce sur l'aimant une action rotative et on peut déduire le moment résultant des trois moments α, β, γ, comme on l'a fait pour la pesanteur, ce qui donne pour le vecteur moment la valeur absolue

$$F \cdot \delta \cdot \sin (F \cdot \delta)$$

et pour sa direction la normale à F et à δ. La même remarque relative à la signification de δ trouve ici sa place. On éviterait la confusion que peut provoquer le double sens de l'expression *moment* en désignant δ par *moment de magnétisme*, et en représentant par δ la quantité qu'on appellerait *moment de rotation disponible*. Il importe de remarquer aussi que tandis que pour la masse matérielle on peut mesurer séparément la masse elle-même et la distance du centre de gravité au point fixe, le moment magnétique seul, qui est le produit des deux éléments, est susceptible d'être évalué.

III. — Aimantation uniforme et application à la sphère pleine. — Dans le cas de l'aimantation uniforme, les quantités μ_1 et μ_2, λ, μ, ν deviennent constantes et il en résulte que les (8) donnent

$$x'_2 - x'_1 = dl \cos \lambda \qquad y'_2 - y'_1 = dl \cos \mu \qquad z'_2 - z'_1 = dl \cos \nu .$$

La distance des deux centres est dl, *distance des deux masses élémentaires et la direction de* dl *est celle de l'aimantation.*

Appliquant ces considérations à la sphère, rappelons que l'aimantation uniforme satisfait dans ce cas aux équations d'équilibre magnétique intérieur exprimant l'aimantation par induction dans un champ uniforme, équations que nous ne faisons que mentionner ici. Prenons l'axe des Z parallèle à l'aimantation et l'origine au centre de la sphère ; les deux centres se trouvent sur l'axe des z et on a

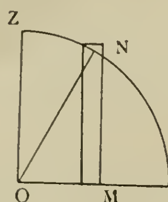
$$z_2 - z_1 = dl .$$

La masse magnétique $\Sigma\mu_2$ ou $\Sigma\mu_1$ est égale au volume de la sphère multiplié par une densité hypothétique ρ, ce qui donne, en appelant a le rayon de la sphère, pour δ

$$\delta = dl\,\Sigma\mu_1 = \frac{4}{3}\,\pi a^3 \rho\, dl .$$

On va voir que ρ devient une densité de surface, si la masse magnétique qui la constitue, au lieu d'agir sur un bras de levier infiniment court, agit sur un levier fini. Pour le

montrer, au lieu de calculer le couple résultant en appliquant les résultantes aux centres respectifs, composons les couples élémentaires le long de chaque tube d'aimantation parallèle à OZ. Soit MN le tube de section ds pour le point de la surface N donné par l'angle ZON égal à θ et soit dl la longueur de l'aimant élémentaire. Les masses élémentaires s'annulent deux à deux et ne laissent subsister que la première en M négative et la dernière en N positive, constituant un couple dont le bras de levier est MN et la masse $\rho dl ds$. Pour composer les couples relatifs à tous les points M de la sphère, cherchons le centre de gravité



de la couche sphérique d'épaisseur constante dl et appliquons-y une force égale à la masse totale de la couche. Le centre se trouve sur OZ par raison de symétrie et on a

$$z_1 = \frac{\Sigma mz}{\Sigma m} .$$

Pour calculer Σmz, on a

$$z = a \cos \theta \quad \text{et} \quad m = \rho dl a^2 \sin \theta d\theta d\varphi \cos \theta ,$$

θ et φ étant les coordonnées angulaires, car on obtient, comme le montre la figure, la surface ds normale au tube MN en projetant sur le plan normal à OZ la surface élémentaire sphérique. On intègre pour la demi-sphère supérieure entre O et 2π pour φ et entre O et $\pi/2$ pour θ, ce qui donne

$$\frac{2\pi a^3}{3} \rho dl .$$

Pour obtenir Σm, il faut intégrer la valeur de m entre les mêmes limites et on trouve

$$\pi a^2 \rho dl .$$

Par conséquent

$$z_1 = \frac{2}{3} a$$

et le moment du couple résultant est

$$\frac{2}{3} a \pi a^2 \rho dl .$$

Pour la sphère inférieure, le couple est le même et le moment total est

$$\frac{4}{3} a \cdot \pi a^2 \rho dl .$$

Dans cette expression ρ est la densité d'une couche dont la surface est celle du grand cercle de la sphère et dont l'épaisseur infiniment petite est la longueur de l'aimant élémentaire, tandis que le bras de levier est $^4/_3\, a$.

Comme on l'a dit plus haut, c'est le moment seul qu'on peut mesurer et c'est pourquoi le produit ρdl est la seule variable existant réellement au point de vue expérimental, bien que ρ et dl soient définis théoriquement [1].

IV. — **Aimantation non uniforme par induction dans un champ uniforme.** — Le vecteur aimantation est dans ce cas, comme on le sait, solénoïdal et il en résulte certaines conséquences relativement à la détermination du centre absolu et des centres secondaires et de la masse magnétique ou, ce qui revient au même, du moment de rotation disponible. Nous supposons connues les lignes d'aimantation, ainsi que le potentiel intérieur total V, et nous considérons les filets d'aimantation prolongés dans l'intérieur du corps entre les surfaces terminales. En un point quelconque d'un filet, le produit du vecteur par la section est constant, puisque le

[1] Si l'on cherche à se rendre compte du processus qui, dans le cas plus simple du magnétisme rémanent, transforme la somme des actions rotatives moléculaires en une action rotative sur un volume fini, c'est dans la composition des couples élémentaires que se trouve la solution. En effet, deux molécules consécutives du filet d'aimantation tendent à tourner dans le même sens et leur solidarité ne le permet pas. Une sorte de frottement intérieur magnétique ne laisse subsister que les forces extrêmes en M et en N et le couple a pour bras de levier MN. Une expérience, que je viens de réaliser au *Laboratoire de Physique de l'Université de Genève*, doit être mentionnée ici — deux rangées de petites boussoles dont la cage a 16mm5 de diamètre, l'aiguille 13mm de long et dont les centres sont disposés suivant une ligne droite, sont supportées horizontalement sur un disque de carton suspendu à un fil de caoutchouc d'une force de torsion très faible. En premier lieu les boussoles sont en contact de manière que chacune des deux rangées distantes l'une de l'autre de 1cm occupe une longueur de 16cm5. A ce degré de rapprochement les aiguilles sont solidaires et orientées suivant la ligne des centres, si le champ extérieur ne dépasse pas une certaine limite. En plaçant un barreau aimanté dans le voisinage du carton et dans son plan, symétriquement par rapport au centre, le centre du barreau qui a 32cm de long se trouvant à 25cm du centre du carton, les rangées s'orientent parallèlement au barreau et dans l'oscillation les aiguilles restent dirigées suivant la ligne des centres consécutifs. — En second lieu, on supprime deux boussoles dans chaque rangée et on les espace également, ce qui porte la distance de deux centres consécutifs de 16mm5 à 20mm6. Cette augmentation suffit pour que les aiguilles cessent d'être solidaires, que le carton ne s'oriente plus par rapport au barreau ; dans les oscillations du carton, chaque aiguille reste à chaque instant parallèle au barreau. 24 décembre 1909.

vecteur est solénoïdal et ce produit a pour expression en le multipliant par k,

$$- k \frac{dV}{dl} d\sigma ,$$

k étant le coefficient d'aimantation, $d\sigma$ la section du filet, et dl l'élément de longueur compté sur la ligne d'aimantation. Par définition, l'aimantation est $- k \frac{dV}{dl}$ et, d'autre part, le moment magnétique est égal à l'aimantation multipliée par le volume $d\sigma dl$; donc ce produit est égal à μ_1 en sorte que la masse magnétique est constante dans un même filet. Le centre absolu d'un filet est donc le centre de gravité de la ligne d'aimantation prise de son point d'entrée à son point de sortie du volume aimanté. On déduit de cette propriété que si le corps a un axe de symétrie parallèle au champ, ce qui donne lieu à des lignes d'aimantation symétriques par rapport à cet axe, le centre de gravité absolue sera sur cet axe puisqu'il sera le centre de gravité du système de masses dû à tous les centres des courbes qui sont elles-mêmes symétriques et les deux centres seront également sur cet axe. Si le corps a un plan de symétrie normal à son axe, le centre absolu sera dans ce plan par la même raison. L'équation (8) appliquée à un filet d'aimantation donne

$$x'_2 - x'_1 = \frac{- k \int \frac{dV}{dl} d\sigma . dx}{- k \int \frac{dV}{dl} d\sigma . dl} ,$$

L'intégrale au numérateur s'obtient en remarquant que, le produit $\frac{dV}{ds} d\sigma$ étant constant, on peut intégrer le facteur dx ce qui donne

$$- k \left(x_a - x_{a'}\right) \frac{dV}{dl} d\sigma ,$$

x_a et $x_{a'}$ étant les valeurs de x correspondant aux extrémités du filet, et d'autre part, le produit $\frac{dV}{dl} d\sigma$ est égal à $\frac{dV}{dn} ds$ aux points x_a et $x_{a'}$ dn étant la normale à la surface du volume aimanté prise du dedans en dehors et ds l'élément de cette surface. On retrouve ainsi la réduction connue de l'intégrale de volume, relative au moment, à une intégrale de surface.

On peut se proposer de calculer l'intégrale au dénominateur de $x'_2 - x'_1$ qui est la masse magnétique totale positive ou négative. En intégrant par rapport au filet entre ses deux extrémités, on aura, comme dans ce qui précède,

$$- k \frac{dV}{dn} ds (l_a - l_{a'})$$

$l_a - l_{a'}$ étant la longueur du filet compris entre l'entrée et la sortie du volume aimanté, expression qu'il faudra intégrer par rapport à la surface totale du corps, et dans laquelle $l_a - l_{a'}$, est une fonction du point de la surface auquel se rapporte l'élément de surface ds.

Dans le cas de la sphère on a, θ étant l'angle du rayon vecteur avec l'axe,

$$- k \frac{dV}{dn} = \rho \cos \theta , \; l_a - l_{a'} = R \cos \theta , \; ds = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

et l'intégrale pour la demi-sphère est bien,

$$\frac{2\pi}{3} R^3 \rho .$$

L. de la Rive (Genève).

PROBLÈMES RELATIFS À LA PROJECTION AZIMUTALE ÉQUIVALENTE DE LAMBERT [1]

I

La projection azimutale équivalente de Lambert, imaginée par ce dernier en 1772, trouve de plus en plus son emploi lorsqu'on se propose de représenter des portions d'une certaine étendue de la surface du globe terrestre[2].

---

[1] Les principaux résultats de ce travail ont fait l'objet d'une conférence de l'auteur, tenue le 10 octobre 1909, à la Société suisse des Professeurs de mathématiques.

[2] Voir *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. VI, 1, A.

Lambert, *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik*. III. Teil, p. 105, Berlin, 1772.

Brandenberger, *Ueber Lamberts flächentreue Azimutalprojektion*. (*Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft* Zürich, *Jahrg.* 54, *S.* 436-448, 1909.)

Dans ce qui suit je donnerai tout d'abord une méthode simple permettant de *construire la projection de Lambert* P* *d'un point* P, *dont on connait la longitude et la latitude.* C'est une application très simple des procédés élémentaires de la géométrie descriptive.

Soit O le centre du tracé, c'est-à-dire le point central du domaine dont on se propose d'établir la carte. Par O faisons

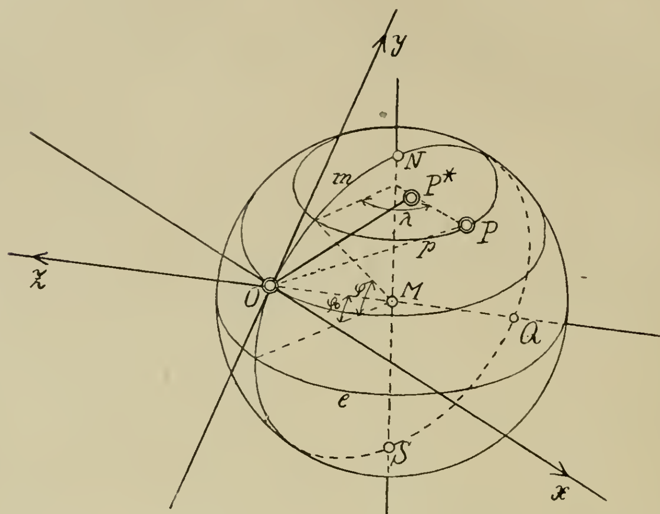


Fig. 1.

passer un système d'axes cartésiens rectangulaires. Oz aura la direction de la verticale en O, cette direction étant considérée comme positive lorsqu'on s'éloigne du centre de la terre. Le plan xOy est le plan tangent à la sphère terrestre en O. C'est sur ce plan aussi que s'effectuera la projection de Lambert du domaine à représenter. Ox sera la tangente au parallèle passant par O, sa direction positive étant celle de l'Ouest vers l'Est, Oy la tangente au méridien de O, sa direction positive étant celle du Sud au Nord.

M (fig. 1) représente le centre de la terre, NS la ligne des pôles. Sur la sphère les latitudes seront comptées, selon

l'usage, à partir de l'équateur (e), tandis que les longitudes se compteront à partir du méridien m du lieu O.

La projection de Lambert P^* d'un point P de la sphère terrestre peut se définir comme suit :

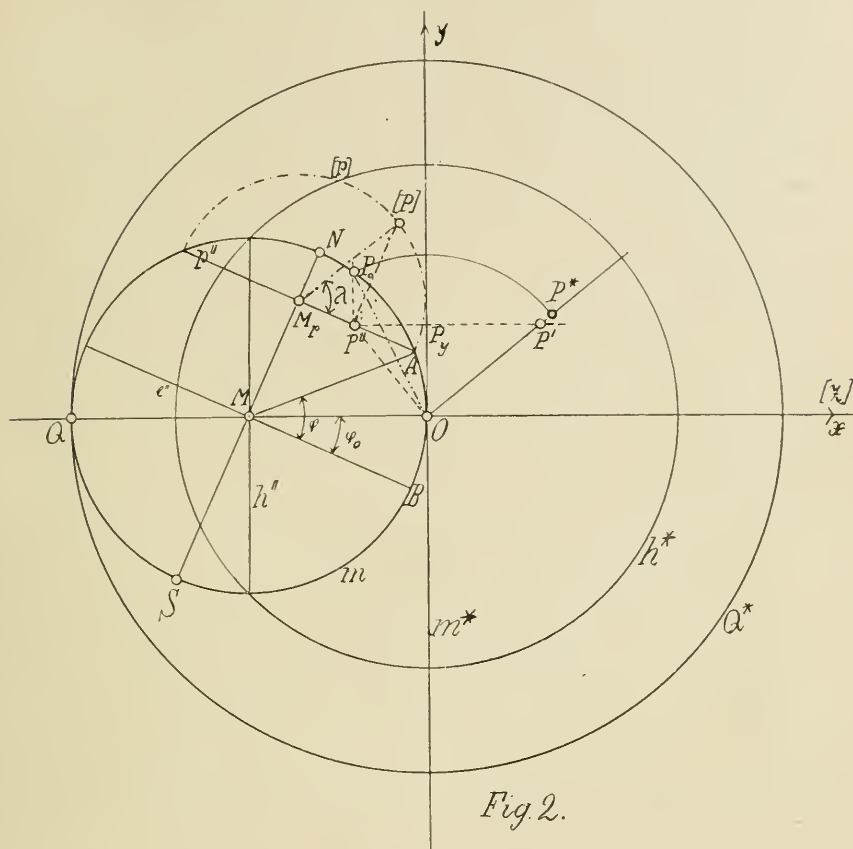


Fig. 2.

1° P^* se trouve sur la trace OP^* du demi-plan (P, z) sur le plan horizontal xOy.

2° On a $OP^* = OP$, cette dernière distance OP étant mesurée le long de la corde qui relie O à P.

La totalité de la sphère terrestre est de la sorte représentée dans le plan xOy à l'intérieur d'un cercle Q^* de centre O et de rayon égal au double de la longueur qui représente le rayon terrestre (fig. 2). Le grand cercle horizontal h (fig.

2, 3 et 4) partage la sphère en deux hémisphères ; l'un (hO) correspond à l'intérieur du cercle h^* de rayon égal à $\sqrt{2}$, l'autre (hQ) à l'intérieur des deux cercles h^* et Q^*. Au seul point Q, c'est-à-dire au point antipode de O correspond comme projection de Lambert le cercle Q^* de rayon égal à 2.

Pour déterminer maintenant le point P^* dans le plan xOy nous ferons usage de projections orthogonales.

Les plans xOy et yOz sont respectivement plan horizontal et plan vertical de projection. Oy représente la ligne de terre, placée verticalement dans l'épure (fig. 2).

Sur le plan vertical la sphère se projette orthogonalement, le méridien m de O suivant un cercle tangent à Oy, l'équateur et les parallèles suivant des droites qui font avec Oz un angle φ_0, où φ_0 représente la latitude du point O. La projection de l'équateur est le diamètre e'', celle du parallèle passant par P la corde p''. La projection P'' de P elle-même s'obtient par rabattement sur le plan vertical du parallèle p passant par P. L'angle AMB est égal à la latitude φ du point P.

$[p]$ est le parallèle rabattu, sur lequel on a porté l'arc $A[P] = \lambda$, où λ est la longitude de P. [P] est le rabattement, P'' la projection orthogonale de P sur le plan vertical. Pour avoir la projection horizontale P' de P on mène la ligne de rappel $P'' P_y$ sur laquelle on porte $P_y P' = P''[P]$. La trace horizontale du demi-plan (P, z), qui contient le point P^* est la demi-droite OP'. D'après 2° la distance OP^* est égale à la corde OP, dont la vraie grandeur se trouve par une rotation autour de Oz ($OP = OP_0 = OP^*$). — C'est ainsi *qu'on peut obtenir la projection de Lambert d'un point quelconque de la sphère au moyen de projections orthogonales.*

II

Dans les figures 3 et 4 on a représenté les parallèles 0°, ± 30°, ± 60°, ± 90°, et les méridiens 0, ± 30°, ± 60°, ± 90°, ± 120°, ± 150°, + 180°.

En ramenant dans le plan de l'équateur les différents parallèles, la construction se simplifie.

Comme pratiquement seul l'hémisphère (Oh) est à repré-

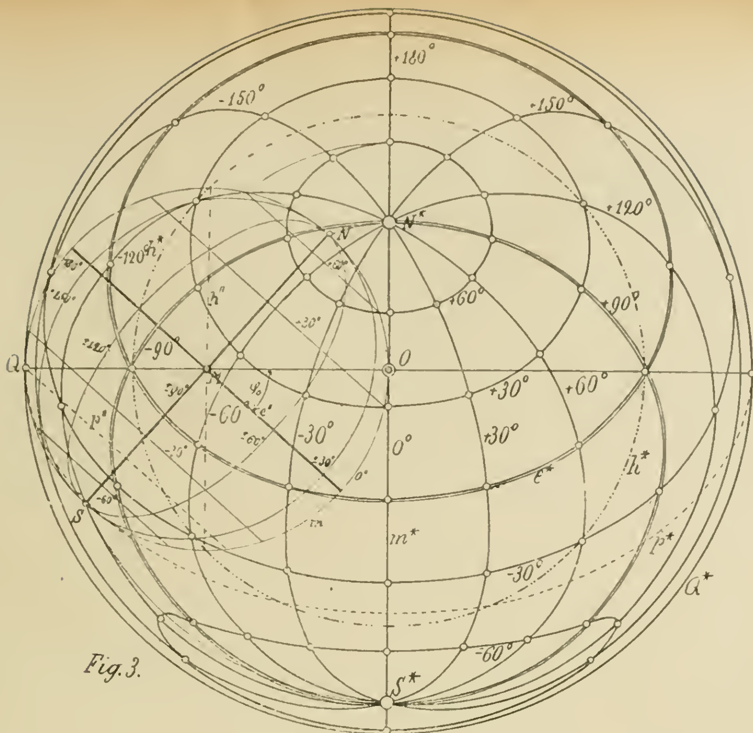


Fig. 3.

Fig 4.

senter, la carte s'obtient avec exactitude. Des sections défavorables de lignes entre elles ne se présentent pour aucun hémisphère, mais dans le second, O*h*, on peut avoir à joindre des points très rapprochés.

Le centre du tracé, fig. 4, est un *point de l'équateur*.

Si l'on désigne par A^* (fig. 4) le point d'intersection de l'image p^* d'un parallèle quelconque de latitude φ, avec l'image h^* du méridien de longitude égale à 90° ; il est facile de voir que la droite OA^* est tangente à p^* en A^*. Autrement dit h^* est coupé orthogonalement par l'image p^* de n'importe quel parallèle. L'équation de p^* en coordonnées polaires (φ, u) est en effet[1]

$$\rho^2 = 2\left(1 \pm \frac{\sqrt{\cos^2\varphi - \cos^2 u}}{\sin u}\right) .$$

Comme pour $u = \varphi$ les deux valeurs que prend ρ sont égales entre elles, la droite OA^* est bien tangente à p^*. Dans la figure cette droite tangente à été construite pour $\varphi = 60°$.

A deux *méridiens* symétriques par rapport au méridien de O correspond comme image une courbe unique du quatrième degré,

$$(x^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 \sin^2\lambda) + 4\sin^2\lambda = 0$$

admettant N^* et S^* comme points doubles, fig. 4. De cette équation on déduit immédiatement les angles ω que les tangentes en ces points forment avec Ox (ou N^*x'). On a par exemple pour N^*

$$tg\omega = \pm \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \lambda = \pm \frac{1}{2} \operatorname{tg}(90° - \lambda) .$$

Si donc BD (fig. 4) est égal à la tangente trigonométrique de l'angle (90° — λ), $B\overline{D} = \frac{1}{2}BD$ sera la tangente trigonométrique de la direction ω. (Cercle trigonométrique autour de N^*.)

III

La projection de Lambert d'un cercle quelconque de la sphère est un ovale faisant partie d'une courbe du quatrième

---

[1] Cf. FIORINI : *Le projezioni delle carte geografiche*, Bologna 1881, ou BRANDENBERGER, *loc. cit.*

degré. La courbe entière se compose de celui-ci et d'un autre qui lui est symétrique par rapport à O. Le second correspond d'ailleurs à un autre cercle de la sphère, qui est symétrique au premier par rapport à un certain plan passant par Oz [1].

La *quadrature de ces ovales* conduit à d'intéressantes applications du Calcul intégral. Les résultats sont simples et l'on peut trouver de nombreux exemples où ils seront indépendants des coefficients de l'équation, si l'on suppose, comme on l'a fait plus haut, $R = 1$. On peut les obtenir aussi par voie géométrique, car la projection de Lambert est, comme on sait, une projection équivalente [2].

Voici quelques exemples de quadratures pour lesquels il est avantageux d'introduire les coordonnées polaires. Comme on l'a dit, les courbes comprennent toujours deux ovales de forme identique. Il ne s'agit jamais que de l'évaluation de l'aire de l'un d'eux.

1. Soit la courbe

$$(x^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 \sin^2 \lambda) + 4 \sin^2 \lambda = 0 ,$$

qui est l'image (fig. 4) d'un méridien de longitude λ. L'aire de l'un des ovales est indépendante de λ et égale à 2π.

2. La courbe

$$(x^2 + y^2 - 4)y^2 + 4 \sin^2 \varphi = 0$$

correspond (fig. 4) à un parallèle de latitude φ. L'aire de la calotte sphérique située au nord de ce parallèle est égale à $2\pi(1 - \sin \varphi)$. Il en est par conséquent de même pour l'un des ovales de la courbe.

3. L'équation de l'image (fig. 3) d'un parallèle de latitude φ est :

$$\left\{ (x^2 + y^2) \sin \varphi_0 + 2(\sin \varphi - \sin \varphi_0) \right\}^2 + y^2 \cos^2 \varphi_0 (x^2 + y^2 - 4) = 0 .$$

La surface d'un de ces ovales est $2\pi(1 - \sin \varphi)$. φ_0 n'intervient pas dans le résultat.

4. Un ovale de la courbe

$$(x^2 + y^2 - 2)^2 \cos^2 \varphi_0 + (x^2 + y^2 - 4)(x \cot g\, \lambda + y \sin \varphi_0)^2 = 0$$

[1] Cf. BRANDENBERGER, *loc. cit.*

[2] Voir p. ex. : GERMAIN. *Traité des Projections des Cartes geographiques*. Paris.

est d'aire égale à 2π. Cet ovale est l'image d'un méridien (fig. 3) et partage en deux parties égales l'intérieur du cercle Q*.

5. Soit enfin a et b deux quantités réelles quelconques. L'un des ovales de la courbe

$$a^2b^2(x^2 + y^2 - 2)^2 + (a^2 + b^2)y^2(x^2 + y^2 - 4) = 0$$

peut être envisagé comme image d'un certain grand cercle de la sphère. On verra facilement que l'aire de l'ovale est encore égale à 2π.

C. Brandenberger (Zurich).

SUR QUELQUES EXEMPLES MATHÉMATIQUES DANS LES SCIENCES NATURELLES[1]

L'observation de la nature fournit de remarquables exemples dans lesquels interviennent les considérations mathématiques les plus diverses.

1. — Ainsi, en examinant le mouvement des glaciers de conformation normale, on aperçoit immédiatement les lignes indiquant la direction du courant et les crevasses glaciaires qui forment au point de vue mathématique un système de trajectoires orthogonales comme on s'en rend compte dans la fig. 1. Les crevasses représentent ici d'une part les lignes d'égale vitesse et de l'autre les lignes de tension maximum.

Dans le mouvement des glaciers, nous sommes donc en présence d'une combinaison de lignes de courant et de lignes de tension. Les lignes de tension s'expliqueront de la façon la plus simple par l'involution projective des lignes de section et de tension dans un milieu tendu[2]. Dans toute involu-

---

[1] Extrait de la Conférence faite par M. Arn. Emch (Soleure), à l'assemblée annuelle de la Soc. suisse des professeurs de mathématiques, tenue à Soleure le 10 oct. 1909. *Einige mathem. u. mechanische Betrachtungen in der Natur.* — Traduction de J.-P. Dumur, Genève.

[2] Ritter, *Graphische Statik* I. B., 128-134.

tion existe, comme on le sait, deux directions à angle droit correspondant à la tension maximum et minimum en chaque point du champ, et c'est par cela que s'explique l'orthogonalité des trajectoires. Comme exemple particulièrement intéressant d'un milieu en tension avec involution elliptique, je citerai la formation des crevasses sur un champ de limon en train de sécher, comme il s'en forme après une inondation; ou encore la formation des fentes sur une surface de bois

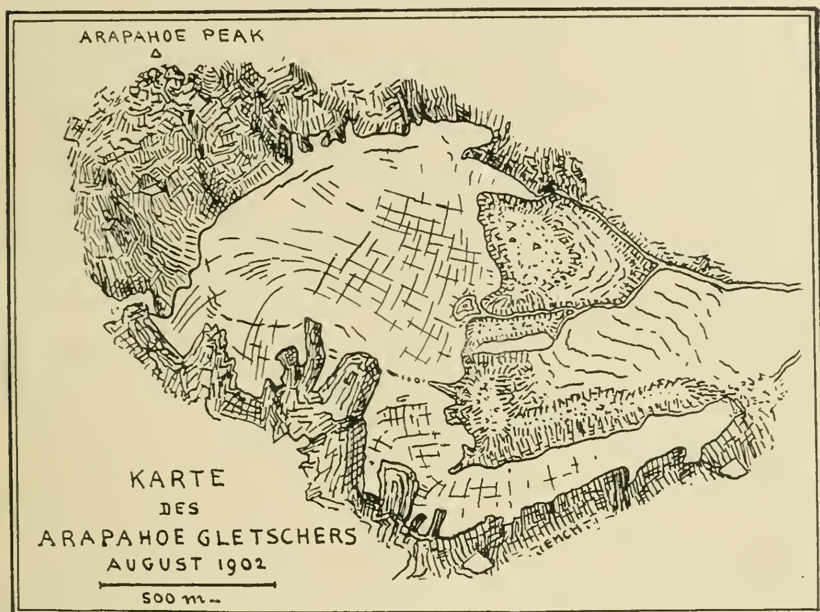


Fig. 1.

recouverte d'une forte couche de vernis ou de peinture[1]. Dans les deux cas les nombreuses fentes et fissures qui se forment en séchant sont toutes, presque sans exceptions, perpendiculaires les unes sur les autres; ce qui s'explique par l'involution des lignes de tension du milieu en question. Dans cette involution, il n'y a que les tensions qui agissent dans les directions perpendiculaires. L'une est la tension

[1] A. Emch, *An Introduction to Projective Geometry and its Applications*, p. 239. New-York, John Wiley & Sons, 1905.

maximum, l'autre la tension minimum. On devrait en conclure, semble-t-il, que les fentes correspondant[1] aux tensions maximum devraient former un système de courbes plus ou moins parallèles, ce qui n'est pourtant pas le cas. On peut expliquer cette anomalie, visible dans la fig. 2, de la façon suivante : par la formation d'une fente, la tension maximum qui agissait perpendiculairement à la direction de cette fente est supprimée, de telle sorte que la tension minimum qui

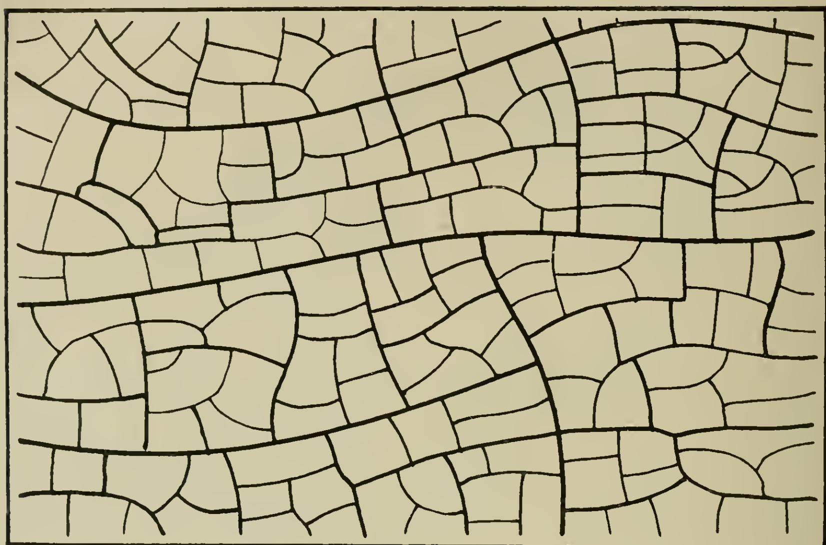


Fig. 2.

agissait auparavant dans la direction de la fente devient alors la tension maximum dans cette partie du champ. C'est pourquoi la fissure suivante se formera perpendiculairement à la première fente.

2. — Malgré la grande difficulté que l'on éprouve à représenter mécaniquement les phénomènes de la vie organique et la presque impossibilité de formuler mathématiquement les problèmes biologiques, il faut reconnaître cependant que, dans bien des cas, un observateur attentif trouvera un carac-

---

[1] P. Groth, *Physicalische Kristallographie*, Leipzig. W. Engelmann, 1895.
A. Schoenflies, *Kristallsysteme une Kristallstruktur*, Leipzig, Teubner, 1891.

tère mathématique dans tel ou tel phénomène du domaine végétal ou animal.

Que l'on se rappelle la loi de Mendel sur l'hérédité et sa vérification par les expériences intéressantes du Professeur L. Cuénot, à Nancy, sur le croisement des souris blanches et grises [1] et du Prof. A. Lang sur la formation des variétés chez les limaçons de jardins [2].

Par le croisement de la souris grise commune et de la souris blanche albinos, on obtient exclusivement des descendants gris. L'élément gris G domine, tandis que l'élément blanc B est caché par le gris. Si l'on croise maintenant deux de ces descendants, on obtient non seulement des souris grises, mais également des blanches, et le nombre des grises est au nombre des blanches dans le rapport de 3 à 1. Pour déduire cela de la loi générale observée par Mendel, nous supposerons que les éléments primitifs G et B ne se réunissent pas dans le croisement, mais restent séparés, une moitié se compose d'éléments G, l'autre moitié d'éléments B. Comme croisement, ne sont possibles que les combinaisons suivantes, en nombre égal, des éléments G et B :

G et G
G et B
B et G
B et B

Chacune de ces combinaisons fournira un descendant, et dans les combinaisons où se trouve un élément G, le gris dominera. Parmi les descendants, on trouvera donc en moyenne trois gris pour un blanc, ce qui correspond quantitativement tout à fait aux expériences faites par différents savants dans ce domaine. Ce résultat peut être représenté par la formule

$$GB \,.\, GB \,. = 1GG + 2GB + 1BB \,.$$

Cette loi qui présente aussi, d'une manière générale, une

[1] *Revue scientifique*, Paris (28 avril 1906).

[2] *Über die Mendelschen Gesetze, Art und Varietätenbildung, Mutation und Variation, insbesondere bei unsern Hain- und Gartenschnecken. Verhandlaungen der Schweiz. Naturf. Gesellschaft* in Luzern, 1905.

grande importance pour la société humaine, est donc basée sur la théorie des combinaisons qui est un domaine franchement mathématique.

3. — En biométrie, on sait qu'il existe une certaine relation entre la grosseur et le nombre des graines d'une plante. Si l'on porte comme abscisses les diamètres des graines et comme ordonnées le nombre des graines correspondant à ces divers diamètres, on obtient des courbes qui se rapprochent plus ou moins de la courbe connue de fréquence d'erreur du calcul des probabilités [1], et qui caractérisent tout à fait les plantes correspondantes.

La disposition des feuilles chez les différentes plantes est également remarquable au point de vue mathématique. Elle a lieu suivant des lois parfaitement déterminées et est constante pour chaque espèce. La distance qui sépare deux feuilles consécutives dans une même espèce est toujours représentée par la même fraction $\frac{n}{m}$ du pourtour. Dans la disposition des feuilles alternantes, les fractions $\frac{n}{m}$ sont les réduites de la fraction continue

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}},$$

c'est-à-dire $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \ldots$ et représentent les termes d'une série spéciale de Lamé [2]. On les appelle divergentes et elles présentent un rapport rationnel avec le pourtour de la tige, de sorte que, sur la ligne en spirale, l'hélice, qui supporte les feuilles, chaque feuille se trouve, après un cycle déterminé, perpendiculaire à une autre située plus bas. Par cette disposition mathématique si raffinée, pour ainsi dire, la nature obtient la répartition aussi régulière que possible des feuilles autour de l'axe commun. Il n'y a ainsi pas de place perdue et la charge se répartit d'une manière égale sur l'axe;

---

[1] J. Bertrand, *Calcul des probabilités*, p. 175-246 (Paris).

[2] Strassburger, *Lehrbuch der Botanik für Hochschulen*, p. 31-35.

la position verticale assure également les meilleures conditions d'éclairement.

4. — Chez les plantes grimpantes, on trouvera une application du mouvement en spirale.

Mécaniquement, ce mouvement en spirale s'explique par le fait que la partie de la tige exposée à la lumière se développe mieux et par suite se dilate davantage ; il en résulte une inflexion de la tige autour du support. Cependant, le fait que la plupart des plantes grimpantes, à part quelques exceptions (houblon, chèvrefeuille, polygonum convolvulus) sont lévogyres n'est pas expliqué mécaniquement, on se contente d'indiquer la chose au point de vue physiologique en faisant intervenir le géotropisme. En particulier, j'ai observé personnellement, dans les Montagnes Rocheuses, que les pins et sapins placés dans le voisinage des lisières de forêts présentent une disposition lévogyre de leurs fibres, ce qui s'explique par les torsions et flexions occasionnées par les vents.

5. — En ce qui concerne la forme des feuilles, ce sont principalement, d'après Bodo Habenicht[1] les influences extérieures du temps et des actions mécaniques qui entrent en ligne de cause. C'est à cet auteur que l'on doit la représentation analytique de la plupart des formes de feuilles par des équations de la forme

$$r = f(\cos \varphi)$$

en coordonnées polaires ; et il espère trouver avec le temps, la preuve physiologique de la nécessité de cette forme particulière.

7. — Comme exemple remarquable, je mentionnerai ici la disposition de l'intérieur des fleurs d'une plante pullulante parfaite (Chrysanthemum leucanthemum) et de la camomille ordinaire (Matricaria chamomilla). Chez ces fleurs, les diamètres des petites fleurs intérieures croissent proportionellement à leur éloignement du centre, comme on peut s'en rendre compte par l'accroissement des rayons. Mais pour

[1] *Beiträge zur mathematischen Begründung einer Morphologie der Blätter*, Berlin. Otto Salle, 1905.

obtenir, avec cette loi, l'utilisation la plus complète possible de la surface entière par le plus grand nombre possible de fleurs partielles, il faut que ces fleurs circulaires se touchent trois à trois mutuellement; comme ce serait le cas pour des cercles d'égale grandeur placés sur une surface plane rectangulaire. Pour démontrer cette proposition, nous supposerons tout d'abord que la surface d'une disposition quelconque de cercles dans le rectangle peut être mise sous la forme $p \cdot x \cdot y$, dans laquelle p peut prendre toutes les valeurs possibles $0 < p < 1$. Si nous exceptons les singularités, nous pouvons dire que par une transformation quelconque l'expression $p \cdot x \cdot y$ devient fonction $p \cdot F(X, Y)$ de la surface rectangulaire transformée. Si m est la valeur de p qui rend $p \cdot x \cdot y$ maximum, $m \cdot F(X, Y)$ représentera aussi un maximum dans la surface transformée. Supposons que la surface rectangulaire soit placée dans un plan de nombres complexes et faisons la transformation [1]

$$Z = e^z = e^{x + iy} ,$$

de telle façon que

$$X = e^x \cdot \cos y , \quad Y = e^x \cdot \sin y ,$$

le système des droites parallèles $x =$ const. se transforme en un système de cercles concentriques

$$X^2 + Y^2 = e^{2x}$$

et celui des parallèles $y =$ const. en un faisceau

$$Y = X \cdot \operatorname{tg} y .$$

La fonction e^z a la période $2i\pi$, de telle sorte que la bande du plan z comprise entre $y = \pi$ et $y = -\pi$ est représentée une fois et d'une façon complète sur le plan Z. Si l'on divise cette bande en bandes partielles distantes de $\frac{\pi}{8}$, et si l'on considère les lignes de division comme lieux de cercles

[1] Voir Fricke : *Kurze gefasste Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höhern Mathematik. Analytisch-funktionen theoretischer* Teil. Leipzig, Teubner, 1900.

tangents de même grandeur, le rayon de ces cercles vaudra, d'après la fig. 3,

$$AD = CD \cdot \operatorname{tg} 30 = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{24} .$$

Si l'on représente par a le demi-angle formé, après trans-

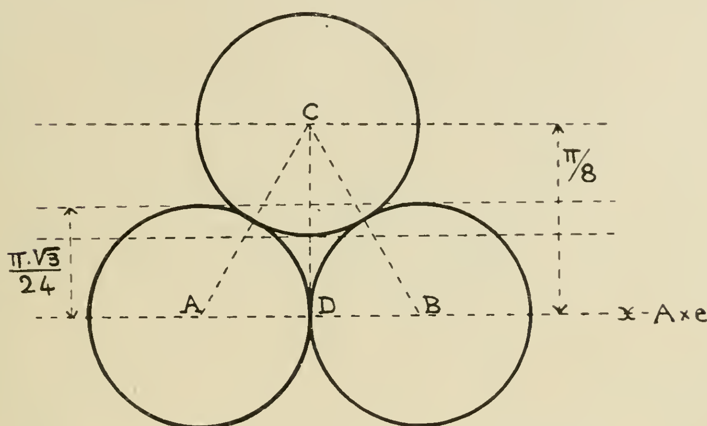


Fig. 3.

formation, par les tangentes communes d'une série circulaire de cercles tangents, on aura

$$\operatorname{tg} a = \frac{\pi . \sqrt{3}}{24}$$

et $a = 12°46'28''$. A l'aide de cet angle, il était facile de construire la fig. 4, qui représente exactement la disposition de la fleur intérieure d'un chrysanthemum leucanthemum parfait. En coordonnées polaires, dans le plan Z on aura

$$\Phi = Y \text{ et } \rho = \sqrt{X^2 + Y^2} ,$$

et à la droite $y = (x - a)m$, dans le plan z, correspond la spirale logarithmique

$$\Phi = (\log \rho - a)m \qquad \text{ou} \qquad \rho = be^{k \cdot \Phi}$$

en posant $a = \log b$ et $m = \frac{1}{k}$.

Fig. 4.

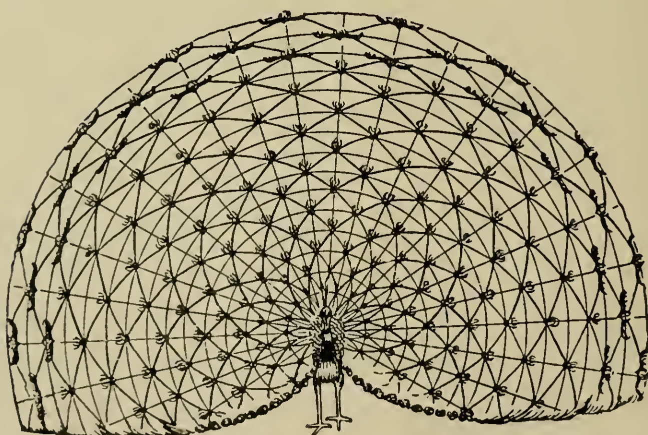


Fig. 5

Dans la fig. 4, les centres des cercles qui correspondent aux cercles tangents dans la direction de A vers C et de B vers C, forment des spirales logarithmiques qui se coupent sous des angles de 60° et 120° respectivement. Une telle spirale est représentée par les centres des cercles hachurés.

En zoologie, il faut encore mentionner les jolies spirales des coquilles du colimaçon, des amonites, des rayonnés réguliers, etc. Mais il n'y a peut-être pas un seul être organisé présentant le caractère géométrique d'une façon si évidente que la queue d'un paon faisant la roue ; chaque plume occupe la position requise avec une précision remarquable, fig. 5.

Les courbes qui se déroulent à gauche et à droite sont des spirales d'Archimède et le dessin complet est symétrique.

Arn. Emch (Soleure).

COMMISSION INTERNATIONALE DE L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Circulaire N° 2. 1er Mars 1910.

Le Comité central

à Messieurs les Délégués.

Le Comité central s'est réuni à Bâle, le 28 décembre 1909, afin d'examiner les rapports sur l'état actuel des travaux dans les 18 pays participants. Il a eu la satisfaction de constater que, dans un grand nombre de pays, les travaux sont en bonne voie et donneront lieu à d'intéressants rapports. Les renseignements recueillis forment l'objet de la présente *Circulaire N° 2*, destinée à donner un aperçu de l'organisation des sous-commissions et de leurs travaux au commencement de l'année 1910.

I. — Nouveaux membres.

Pays participants. — On sait qu'au moment de mettre sous presse la Circulaire N° 1, nous avons eu le regret d'enregistrer la mort prématurée de M. Vailati, l'un des délégués italiens. Ainsi que l'a mentionné *L'Enseignement mathématique*, c'est M. G. Scorza, professeur à l'Institut technique de Palerme, qui a été désigné pour le remplacer dans la délégation italienne.

Quant à la *Belgique*, elle est représentée dans la Commission par M. J. Neuberg, professeur à l'Université de Liège.

Pays associés. — Le Comité central a invité les Gouvernements des pays dits *associés*, dont la liste a été donnée dans le *Rapport préliminaire*, à se faire représenter dans la Commission. C'est ainsi que le *Mexique* a désigné comme délégué M. Valentin Gama, ingénieur, sous-directeur de l'Observatoire de Tacuyaba, professeur à l'Ecole nationale des ingénieurs.

Le Comité central a obtenu en outre le concours de M. Bovey, recteur du Collège impérial technique de Londres, en qualité de représentant du *Canada*, et de M. le professeur S. S. Hough, de l'Observatoire royal de Cape Town, pour la *Colonie du Cap*.

Pour ce qui concerne le *Japon*, les pourparlers sont près d'aboutir.

Comme on le voit, il reste encore quelques pays qui ne sont pas représentés dans la Commission, malgré les démarches du Comité central.

II. — Réunion de Bruxelles.

Mardi 9 août : séance du Comité central.

Mercredi 10 août : réunion des délégués et séance générale publique, avec conférence sur l'enseignement mathématique.

Le Comité central estime qu'il y a lieu de saisir l'occasion de l'Exposition universelle de Bruxelles pour organiser une réunion — tout au moins *partielle* — de la Commission internationale. Nous invitons tout particulièrement Messieurs les délégués de Belgique et des pays voisins (Allemagne, Angleterre, France et Hollande) à participer à ces séances. Mais il va sans dire que tous les membres de la Commission et des sous-commissions nationales qui pourront se rendre à Bruxelles seront les bienvenus. La date a été choisie de manière à permettre aux participants d'assister aux conférences et démonstrations qui seront organisées dans la *Section enseignement* de l'Exposition. Il y aura notamment, les 11 et 12 août, des séances consacrées à l'organisation moderne de l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles dans les établissements secondaires supérieurs; elles auront lieu au pavillon de la Section allemande.

Nous vous prions de prendre note de cette date et nous vous communiquerons, en temps utile, le programme détaillé de ces différentes séances. Les adhésions sont reçues dès maintenant auprès du secrétaire-général.

III. — Sous-Commissions nationales.

Leur composition. — Etat de l'organisation des travaux au commencement de l'année 1910.

ALLEMAGNE

La Sous-Commission allemande est composée de MM. les *délégués* Klein, professeur à l'Université de Gœttingue, Stæckel, professeur à l'Ecole technique sup. de Carlsruhe, Treutlein, directeur du Real u. Reformgymnasium de Carlsruhe, et de MM.,

A. Gutzmer (Halle), directeur du *Jahresbericht des Deutschen Mathematiker-Vereinigung*.

E. Poske (Berlin), directeur de la *Zeitschrift für physikalischen u. chemischen Unterricht*.

H. Schotten (Halle), directeur de la *Zeitschrift für mathematischen u. naturwissenschaftlichen Unterricht*.

A. Thaer (Hambourg), directeur des *Unterrichtsblätter für Mathematik u. Naturwissenschaft*.

La Sous-Commission s'est adjoint les collaborateurs dont on trouvera les noms ci-après. M. Lietzmann remplit les fonctions de secrétaire.

Nous avons déjà donné, dans la *Circulaire n° 1*, un plan complet des travaux de la Sous-Commission allemande. Il avait été décidé que des renseignements généraux concernant la Commission et les rapports seraient publiés par la *Zeitschrift für mathematischen u. naturwissenschaftlichen Unterricht* et édités ensuite à part sous le titre « *Berichte und Mitteilungen veranlasst durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission* ». On n'a pas tardé à reconnaître que, grâce au zèle apporté par les collaborateurs, il était préférable de publier directement les rapports d'une certaine étendue concernant l'enseignement mathématique en Allemagne. Ils seront édités par la maison Teubner sous le titre : *Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlasst durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission, herausgegeben von* F. Klein.

Jusqu'ici il a paru trois fascicules des *Berichte u. Mitteil.* Le premier et le troisième donnent le texte allemand du *Rapport préliminaire du Comité central* et de la *Circulaire n° 1*. Le second fascicule est consacré au rapport de M. le Prof. G. Noodt (Berlin) sur les mathématiques dans le plan d'études des écoles supérieures de jeunes filles en Prusse[1] (*Ueber die Stellung der Mathematik im Lehrplan der höheren Mädchenschule vor und nach der Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens in Preussen* (22 p.).

Le Tome premier des *Abhandlungen* débute par une étude des matières et des méthodes de l'enseignement mathématique dans les écoles secondaires supérieures de l'Allemagne du Nord, d'après les manuels (Heft 1 : *Stoff und Methode im mathematischen Unterricht der norddeutschen höheren Schulen auf Grund der vorhandenen Lehrbücher.* 1 fasc. in-8°, 102 p.; 2 M.), par W. Lietzmann.

Dans un second rapport, déjà sous presse, M. Lietzmann examine plus particulièrement les plans d'études et les méthodes dans les écoles secondaires supérieures de la Prusse (*Die Organisation des mathematischen Unterrichts in Preussen*).

Des rapports analogues seront consacrés au *Grand Duché de Bade* par Treutlein et Cramer ; à la *Bavière* par Wieleitner ; aux villes de la *Hanse* par Thær ; à la *Hesse* par Schnell ; à la *Saxe* par Witting ; et au *Wurtemberg* par Geck. — Le rapport de M. Witting est déjà sous presse.

Viennent, en outre, les rapports suivants, en préparation : *Die Mathematik in den Lehrbüchern der Physik* (Les mathématiques dans les manuels de Physique), par Timerding.

Das Linearzeichnen und die darstellende Geometrie (Le Dessin linéaire et la Géométrie descriptive), par Zühlke.

Bericht uber das Fortschreiten der Reformbewegung an den höheren Schulen. (Rapport sur le progrès du mouvement de réforme dans les écoles secondaires supérieures), par Schimmack

Die Entwickelung der mathematischen Ausbildung der Lehramtskandidaten an den deutschen Universitäten und Hochschulen. (La préparation des candidats à l'enseignement par les universités et les écoles techniques supérieures allemandes), par Lorey (Minden i. W.)

Die Mathematik an den deutschen technischen Hochschulen. (Les mathématiques aux écoles techniques supérieures allemandes), par Stæckel.

---

[1] Un résumé en français a été donné dans l'*Ens. math.* du 15 janvier 1910.

Die Mathematik an den technischen Mittelschulen. (Les mathématiques aux écoles techniques moyennes), par Grünbaum et Ott.

Die Mathematik an Volkschulen, Fortbildungschulen, Seminarien für Volksschullehrer, etc. (Les mathématiques aux écoles primaires, aux écoles primaires supérieures et aux écoles normales formant les maîtres de ces établissements). — Les rapporteurs ne sont pas encore désignés.

Der mathem. Unterricht im Bereich der katholischen Orden Deutschlands und seiner Nachbarländer. (Sur l'enseignement mathém. dans le domaine des ordres catholiques de l'Allemagne et des pays voisins), par Timerding.

AUTRICHE

La *délégation autrichienne* s'est constituée comme suit :

E. Czuber, H. R. professeur à l'Ecole technique supérieure de Vienne, président ; W. Wirtinger, professeur à l'Université de Vienne, vice-président ; R. Suppantschitsch, professeur à l'Ecole réale de l'Etat, Vienne, secrétaire.

La *sous-commission autrichienne* est composée de Messieurs les délégués et de Messieurs :

F. Hočevar, professeur à l'Ecole technique supérieure de Graz.
A. Höfler, professeur à l'Université de Vienne.
E. Müller, professeur à l'Ecole technique supérieure de Vienne.
A. de Obermayer, général de brigade, Vienne.
M. Radakovic, professeur à l'Université de Czernowicz.
J. Sobotka, professeur à l'Université de Prague.
F. Stumpf, professeur au Pædagogium, député, Vienne.
A. Wassmuth, professeur à l'Université de Graz.
S. Zaremba, professeur à l'Université de Cracovie.

La sous-commission s'est adjoint une série de *collaborateurs* :

MM. A. Adler, professeur à l'Ecole technique supérieure de Vienne.
K. Bergmann, professeur à l'Ecole réale d'Olmütz.
E. Dintzl, professeur au Gymnase, Vienne.
G. de Escherich, professeur à l'Université de Vienne.
Ph. Freud, professeur à l'Ecole réale de l'Etat, Graz.
K. Kobald, professeur à l'Ecole supérieure des mines de Leoben.
Th. Konrath, S. R., professeur au Lycée, Vienne.
K. Kraus, professeur en retraite du pædagogium, Vienne.
K. Reich, professeur au Musée technique et privat-docent à l'Ecole technique supérieure, Vienne.
K. Rulf, professeur à l'Ecole professionnelle, Vienne.
O. Simony, professeur à l'Ecole supérieure de l'Agriculture de Vienne.
Th. Tapla, professeur à l'Ecole supérieure de l'Agriculture de Vienne.
M. Adamička, professeur à l'Ecole forestière de Reichstadt.
M. Dolinski, professeur à l'Ecole supérieure de Commerce à Vienne.

La sous-commission autrichienne prépare des *rapports sur l'enseignement mathématique dans les principaux types d'établissements.* En voici la liste :

Universités, par G. de Escherich.
Ecoles polytechniques, par E. Czuber et E. Müller.
Ecoles supérieures de l'agriculture, par O. Simony et Th. Tapla.
Ecoles supérieures des mines, par K. Kobald.

Gymnases, par E. Dintzl.
Ecoles réales supérieures, par A. Adler et F. Bergmann.
Lycées de jeunes filles, Pædagogiums, par Th. Konrath.
Ecoles primaires. Ecoles primaires supérieures.
Musée technologique, par V. Reich.
Ecoles professionnelles, par W. Rulf.
Ecoles forestières, par M. Adamicka.
Ecoles de Commerce, par M. Dolinski.

Il y aura en outre un rapport sur *les manuels de mathématiques*, par Ph. Freud.

BELGIQUE

La Sous-Commission est composée de M.

J. Neuberg, *délégué*, professeur à l'Université de Liège, et de MM.
Ploumen, inspecteur des mathématiques et des Sciences naturelles dans les Athénées et les écoles moyennes belges.
Dock, inspecteur des écoles normales primaires.
Monfort, inspecteur de l'enseignement du dessin.
Rombaut, inspecteur des écoles industrielles et professionnelles.

Ces Messieurs se sont entourés d'un certain nombre de collaborateurs en vue de l'élaboration des rapports.

DANEMARK

La Sous-Commission danoise est composée de MM. :

P. Heegaard, *délégué*, professeur aux écoles militaires.
N. Andersen, professeur au Lycée de Ronne.
T. Bonnesen, directeur de Collège, Copenhague.
S.-A. Christensen, proviseur de Collège, Nykobing.
C.-R. Ette, professeur au Collège, Copenhague.
C.-P. Hansen, professeur à l'Ecole polytechnique de Copenhague.
I. Heckscher, professeur au Collège, Copenhague.
S.-N. Johnsen, inspecteur d'Ecole, Copenhague.
C. Juel, Directeur de *Nyt Tidsskrift for Matematik*, professeur à l'Ecole polytechnique de Copenhague.
E. Klein, capitaine d'artillerie, professeur à l'Ecole militaire.
Ch. Kruger, directeur de Collège, Helsingor.
J. Mollerup, professeur à l'Ecole polytechnique, Copenhague.
Mlle J. Skibsted, professeur au Collège, Copenhague
M. V. Trier, Directeur de *Nyt Tidsskrift for Matematik*, professeur au Collège, Copenhague.
M. E.-C. Valentiner, professeur au Lycée, Copenhague.

Le *Rapport préliminaire* du Comité central a été traduit en danois par M. Heegaard et publié par la *Nyt Tidsskrift for Matematik*.

Dans la réunion d'automne 1909 de la Société des professeurs du Gymnase, M. Heegaard a fait un exposé des travaux concernant la Commission internationale de l'enseignement mathématique. La conférence a été suivie d'une séance de la Sous-Commission danoise. Un certain nombre de questions sont mises en discussion dans le courant de l'hiver.

ESPAGNE

La délégation espagnole a rencontré le meilleur accueil tant auprès des Autorités qu'auprès de l'Académie des Sciences, des Universités et des Ecoles spéciales. Le *délégué*, M. Z. G. de Galdeano, professeur à l'Université de Saragosse, a formé la Sous-Commission en s'adjoignant la collaboration de MM.

D. Miguel Correa, colonel d'Etat-major, Ecole supérieure de guerre.

Luis Octavio de Toledo, Ed. Leon Ortiz et Cecilio Jiménez Rueda, professeurs à l'Université de Madrid.

Miguel Marzal et Esteban Terradas, professeurs à l'Université de Barcelone.

Graciano Silvan, *secrétaire*, professeur à l'Université de Saragosse.

Ventura Reyes, directeur de l'Institut général et technique de Tolède.

Ad. Ruiz Tapiador et Jesus Massa, professeurs à l'Institut général et technique de Saragosse et Las Pàlmas.

Augusto Krahe, professeur de l'école supérieure des Arts industriels de Madrid.

Enrique Linès, professeur de l'école supérieure des Arts industriels de Cartagène.

Lorenzo Miralle, professeur à l'Ecole des Arts industriels de Malaga.

Juan J. Duran Loriga, professeur et commandant d'artillerie.

Jorge Torner, professeur à l'Ecole d'ingénieurs de Montes.

Paulino Castells, professeur à l'Ecole des ingénieurs industriels, Barcelone.

Marqués de Echandia, Antonio Valenciano et Toribio Caceres, professeurs à l'école d'ingénieurs de ponts et chaussées.

Dario Diez Marcilla et Atanasio Torres, commandants et professeurs à l'Académie d'artillerie, Segovia.

Nicomedes Alcayde et Eduardo Marquería, capitaines et professeurs à l'Académie d'ingénieurs de Guadalajara.

Eug. Cemborain Espana et Raf. Blanco, professeurs à l'Ecole normale centrale de Madrid.

Joaquim Cerrailo, professeur de l'école supérieure des Maîtres de Grenade.

M. de Galdeano a reproduit le *Rapport préliminaire* dans son *Boletin de critica, enseñanza y bibliografia matemática*, qui sert de moyen de communication entre les membres de la sous-commission espagnole. Celle-ci devait se réunir en octobre, à Valence, à l'occasion du Congrès de l'Association espagnole pour l'avancement des Sciences. Mais, par suite de la guerre du Riff, ces réunions ont été renvoyées au printemps. Plusieurs travaux préparatoires étaient déjà prêts pour cette séance; ce sont les suivants :

Conférence d'introduction, de M. de Galdeano.

Note sur les études dans les écoles des ponts et chaussées, par Marqués de Echandia.

Observations sur l'enseignement mathématique, par Paulino Castells.

Les cours d'analyse dans les Facultés des Sciences, par Luis Octavio de Toleda.

Sur l'enseignement dans les instituts généraux et techniques, par A. Ruiz Tapiador.

ETATS-UNIS

Délégués : David-Eugène Smith, Columbia University, président. — W.-F. Osgood, Harvard University. — J.-W.-A. Young, University of Chicago.

Depuis la publication de son premier *Bulletin of the american commissioners*, dont nous avons donné la traduction en mai 1909, la Sous-commission américaine a tenu des séances à New-York, les 21 et 22 mai et le 15 septembre 1909. Elle a publié un 2me *Bulletin*. en octobre 1909, contenant la liste des collaborateurs dans les divers Etats. La Délégation s'est entourée d'un *Conseil* ayant à sa tête le président du *Department of Education* et comprenant les présidents des trois grandes universités Harvard, Columbia et Chicago, les anciens présidents et le président de l'*American Mathematical Society* et le *président de l'American Federation of Teachers of the math. and nat. Sciences ;* en voici la liste :

Advisory Council : The Honorable Elmer Ellsworth Brown, United States Commissioner of Education, Washington.

A. Lawrence Lowell, President of Harvard University, Cambridge, Mass.

Nicholas Murray Butler, President of Columbia University, New-York City.

Harry Pratt Judson, President of the University of Chicago, Chicago.

J. Howard Van Amringe ; Emory McClintock ; George W. Hill ; Robert S. Woodward ; Eliakim H. Moore ; Thomas S. Fiske ; William F. Osgood ; Henry S. White, Ex-Presidents of the American Mathematical Society.

Maxime Bôcher, President of the American Mathematical Society.

H. W. Tyler, President of the American Federation of Teachers of the Mathematical and Natural Sciences.

Méthode de travail. — Des sous-comités ont été formés dans les principaux Etats avec la mission d'établir, pour le 1er février 1910, des rapports sur l'enseignement mathématique dans les groupes d'écoles énumérées dans le Bulletin I. Chaque sous-comité doit traiter son sujet de la façon la plus large et la plus complète ; il a toute latitude quant à l'étendue de son rapport. Il en résultera évidemment souvent qu'un même sujet sera traité par plusieurs commissions à des points de vue différents, ce qui est la seule manière d'obtenir l'opinion réelle du pays entier. Il est donc à souhaiter que chaque comité traite son sujet complètement, alors même que d'autres commissions pourraient avoir traité tout ou partie du même sujet. Dans certains cas on pourra prévoir des conférences entre sous-comités et même la coopération des sous-comités. Les comités formés par les présidents des sous-comités tiendront compte des rapports multiples sur un même sujet.

Les rapports seront présentés et discutés dans des réunions de maîtres et de mathématiciens, afin d'être bien le reflet de l'opinion de tout le corps enseignant et des savants du pays.

Des renseignements récents nous apprennent que les travaux des sous-comités sont en bonne voie et que l'on peut en attendre une série de rapports très sérieusement étudiés. La coopération du « Bureau of Education » des Etats-Unis a été d'un grand secours et M. Brown, membre du Conseil a assuré la délégation de l'appui du Bureau pour toute la durée de l'enquête.

FRANCE

La délégation française composée primitivement de MM. Appell, Bourlet et Laisant, a subi une modification par suite du désir exprimé par M. Appell de s'y voir remplacé, en raison de ses multiples occupations. M. de Saint-Germain a été désigné à la place de M. Appell.

Le *Bureau de la Sous-Commission française* a été alors constitué de la manière suivante :

MM. Appell, *président d'honneur;* de Saint-Germain, *président;* Bourlet, *vice-président, trésorier;* Laisant, *secrétaire.* — Ultérieurement un *vice-secrétaire*, M. Bioche, a été nommé.

La *Sous-Commission* a été composée comme suit :

Mlle Amieux, prof. au Lycée Victor-Hugo, Paris.
MM. André, D., prof. honoraire de l'Université, Paris.
Appell, P., membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences, Paris.
Mme Baudeuf, prof. au Lycée de jeunes filles, Bordeaux.
MM. Béghin, prof. à l'Ecole navale, Brest.
Bertier, directeur de l'Ecole des Roches, Verneuil (Eure).
Bézine, prof. à l'Ecole d'Arts et Métiers, Aix-en-Provence.
Bioche, prof. au Lycée Louis-le-Grand, Paris.
Blutel, prof. au Lycée St-Louis, Paris.
Borel, E., prof. à la Faculté des Sciences, Paris.
Bourlet, prof. au Conserv. national des Arts et Métiers, Paris.
Carvallo, E., direct. des études à l'Ecole polytechnique, Paris.
Chancenotte, prof. à l'Ecole normale d'instituteurs, Dijon.
Fort, prof. à l'Ecole navale, Brest.
Mlle Fredon, prof. à l'Ecole pratique, Le Havre.
MM. Gilles, inspecteur général de l'Inst. publique, Paris.
Goursat, prof. à la Faculté des Sciences, Paris.
Guitton, prof. au Lycée Henri IV, Paris.
Harang, prof. à l'Ecole pratique, St-Etienne.
Kœnigs, prof. à la Faculté des Sciences, Paris.
Lagneaux, prof. à l'Ecole Diderot, Paris
Laisant, C.-A., examinateur d'admission à l'Ecole polytech., Paris.
Lebois, inspecteur général de l'enseignement technique, St-Etienne.
Lefebvre, inspecteur général de l'Instr. publique, Paris.
Marotte, prof. au Lycée Charlemagne, Paris.
Matray, prof. à l'Ecole professionnelle de Nantes.
Muscart, prof. au Lycée, Amiens.
Mme Pivot, prof. à l'Ecole professionnelle Emile Dubois, Paris.
MM. Rollet, directeur de l'Ecole Diderot, Paris.
Roumajon, prof. à l'Ecole d'Arts et Métiers, Aix-en-Provence.
Rousseau, Th., prof. au Lycée, Dijon.
de Saint-Germain, A., doyen hon. de la Faculté des Sciences de Caen, Paris.
Tallent, prof. à l'Ecole Turgot (enseign. prim. supér.), Paris.
Tannery, J., membre de l'Institut, sous-direct. de l'Ecole norm. sup., Paris.

MM. Tripard, prof. à l'Ecole professionnelle d'Armentières.
Vareil, prof. à l'Ecole normale d'instituteurs, Melun.
Vessiot, prof. à la Faculté des Sciences, Lyon.
Vogt, prof. à la Faculté des Sciences, Nancy.
Vuibert, direct. du *Journal de Mathém. élémentaires*, Paris.
Weill, directeur du Collège Chaptal, Paris.

La Sous-Commission a tenu deux séances, le 22 juin et le 4 novembre. Au 22 juin, elle comptait déjà 19 membres. Le président s'était préoccupé des démarches à faire auprès du Ministère de l'Instruction publique, en vue d'obtenir d'une part la ratification du choix des membres de la délégation française, et en second lieu, le concours financier indispensable.

Il fut décidé qu'en principe on constituerait des sous-commissions correspondant aux grandes divisions de l'enseignement mathématique en France, et qui organiseraient elles-mêmes leur travail et désigneraient leurs rapporteurs. Les sous-commissions pourraient et même devraient se compléter ultérieurement par de nouvelles adjonctions, si c'était utile. D'autre part cette organisation n'empêcherait nullement l'attribution individuelle de certains rapports à faire sur des branches très spéciales de l'enseignement mathématique.

Les sous-commissions furent composées de la manière suivante :

Enseignement primaire (comprenant l'enseignement primaire supérieur) : MM. Gilles, Lefebvre, Tallent, Vareil, Weill.

Enseignement secondaire (universitaire et technique) : MM. D. André, Bioche, Bourlet, Marotte, Rousseau, Vuibert.

Mlle Amieux et Mme Baudeuf se chargent d'une organisation analogue pour l'*enseignement secondaire des jeunes filles*.

Des rapports d'ensemble seront consacrés à *la place des mathématiques dans le plan d'études* et aux *méthodes générales;* d'autres rapports traiteront des diverses branches de l'enseignement : *Arithmétique, Algèbre, Géométrie, Géométrie descriptive, Mécanique, Cosmographie.*

M. Blutel a bien voulu se charger du rapport sur l'*enseignement des mathématiques spéciales.*

M. Bertin produira un rapport sur l'*enseignement des mathématiques dans les écoles nouvelles.*

M. Bourlet s'est occupé tout particulièrement de l'organisation des travaux concernant l'*enseignement professionnel moyen:* les rapports suivants sont dès à présent décidés :

MM. Rollet, *rapport général*
Bézine et Roumajon, *Ecoles d'Arts et Métiers.*
Tripard et Matray, *Ecoles nationales professionnelles.*
Lagneaux et Harang, *Ecoles pratiques.*
Matray, *Ecoles commerciales.*
Mme Pivot et Mlle Fredon, *Enseignement professionnel des jeunes filles.*

Enseignement supérieur. La sous-commission se compose de MM. Appell, Borel, Kœnigs, de Saint-Germain, Vessiot et Vogt.

Des rapports spéciaux furent attribués à MM.

Bourlet, pour le *Conservatoire national des Arts et Métiers :*
De Saint Germain, pour les *Diplômes d'études supérieures des Facultés ;*
Appell, pour l'*Ecole centrale des Arts et manufactures :*
J. Tannery, pour l'*Ecole normale supérieure ;*

Carvallo, pour l'*Ecole polytechnique ;*

Kœnigs, sur l'*enseignement de la mécanique appliquée,* dans les Facultés plus particulièrement.

Le vœu fut exprimé en outre que M. Vogt voulut bien s'occuper de l'*enseignement mathématique dans les instituts techniques* de diverses formes et particulièrement dans les instituts électrotechniques.

GRÈCE

Délégué : M. C. Stephanos, professeur à l'Université d'Athènes.

La Sous-Commission est en voie de formation.

HOLLANDE

La Sous-Commission se compose de M.

J. Cardinaal, *délégué,* professeur à l'Ecole technique supérieure de Delft, et de MM.

J.-A. Barrau, professeur à l'Ecole technique supérieure de Delft, *secrétaire.*

J. Campert, inspecteur des Ecoles réales, à la Haye.

D. Cœlingh, directeur de la 3me Ecole réale d'Amsterdam.

R.-H. van Dorsten, professeur au Gymnase de Rotterdam.

H.-J. de Groot, inspecteur des Ecoles professionnelles de Hollande, à la Haye.

Th. Lancee, président de l'Association néerlandaise des instituteurs primaires, à Amsterdam.

J.-C. Winkesteyn, inspecteur des Gymnases.

P. Zeeman, professeur à l'Université de Leyde.

La Sous-Commission n'a pas tardé à se mettre à l'œuvre ; elle prépare des rapports sur l'enseignement mathématique dans les principaux types d'établissements :

a) *dans les Ecoles primaires,* par Th. Lancee ;

b) *dans les Ecoles moyennes,* par J. Campert, D. Cœlingh, R.-H. van Dorsten et J.-C. Winkesteyn ;

c) *dans les Ecoles professionnelles,* par H.-J. de Groot ;

d) *dans les Universités et Ecoles techniques supérieures,* par Barrau, J. Cardinaal et P. Zeeman.

HONGRIE

La sous-commission hongroise s'est constituée à Budapest, le 14 novembre 1909, sous la présidence de M. le Conseiller ministériel Prof. J. König. Dans cette première séance, M. E. Beke a exposé la fondation, les travaux et les projets de la Commission internationale de l'enseignement mathématique, et a proposé un plan d'études pour la sous-commission hongroise.

Les *délégués hongrois,* MM. les Professeurs E. Beke, G. Rados et L. Ratz et les membres (au nombre de 43) de la sous-commission, ont été nommés par le Ministre des Cultes et de l'Instruction publique.

D'après l'exposé de M. Beke, il est décidé que chaque type d'école sera l'objet d'un rapport spécial dont la longueur ne dépassera pas 8 pages. Après revision par les délégués, ces rapports seront imprimés en hongrois

et soumis à une discussion dans une ou plusieurs séances de la commission nationale.

Le rapport définitif pour la Commission internationale sera fait en français ou en allemand, par les délégués, et d'après les rapports particuliers qui doivent être rédigés avant le 15 février, de manière qu'à leur séance de Pâques, les délégués hongrois soient en possession de leur rapport.

Les rapports des délégués s'occuperont principalement des plans d'études en donnant quelques aperçus sur les particularités de chaque type d'école, y compris leurs méthodes et leur matériel d'enseignement.

Voici la *liste des rapports et des rapporteurs :*

Ecoles primaires. Par V. Szuppan.

Ecoles primaires supérieures (4 à 6 classes) *(Bürgerschule).* Par J. Wolenszky.

Lycées de jeunes filles. Par A. Visnya.

Ecoles secondaires. Par E. Beke.

Ecoles de Commerce. Par M. Havas.

Ecoles industrielles. Par A. Arany.

Ecoles supérieures de Commerce. Par S. Bogyo.

Ecoles normales d'enseignement primaire. Par Ch. Goldziher.

Ecoles normales supérieures Par J. Kürschack.

Universités. Par E. Beke.

Polytechnicums. Par G. Rados.

Lycée pour les études pratiques de candidats. Par P. Szabo.

Liste des membres de la sous-commission hongroise.

Président : Dr. J. König, conseiller ministériel, professeur à l'Ecole polytechnique.

Vice-Présidents : Dr. Emanuel Beke, professeur à l'Université de Budapest. — Dr. Michæl Demeczky, conseiller aulique, privat-docent à l'Université. — Dr. Gustave Rados, professeur à l'Ecole Polytechnique de Budapest. — M. Ladislaus Racz, directeur du Gymnase évangélique de Budapest.

Secrétaires : Dr. Ch. Goldziher, professeur à l'Ecole Normale de Budapest. — Dr. L. Kopp, professeur à l'Ecole Réale du 8me district de Budapest. — Dr. S. Mikola, professeur au Gymnase évangélique.

Membres : Dr. E. Finaczy, conseiller aulique, professeur à l'Université de Budapest, vice-président du Conseil d'Instruction publique. — Dr. M. de Karman, professeur à l'Université de Budapest. — A. Czako, professeur à l'Ecole Polytechnique de Budapest. — Dr. J. Kürschak, professeur à l'Ecole Polytechnique de Budapest. — M. Béla Tottosy, professeur à l'Ecole Polytechnique de Budapest. — Dr. Leopold Klug, professeur à l'Université de Kolozsvar. — Dr. Béla Walther, directeur des études du district de Nagyszeben. — M. Gotthard Malatin, professeur à l'Ecole supérieure de l'ordre des bénédictins de Panonhalma. — M. V. Suppan, directeur de l'Académie de commerce de Budapest. — Dr. Peter Szabo, professeur au gymnase d'application de l'Ecole Normale de Budapest. — Dr. J. Waldapfel, professeur au gymnase de l'Ecole Normale de Budapest. — Dr. E. Bozoky, directeur de gymnase, secrétaire du Conseil d'Instruction publique. — Dr. Koloman Szekeres, directeur de l'Ecole réale du 2me district de Budapest. — M. Béla Szepretuy, directeur de l'Ecole réale à Brasso. — Dr. J. Kovacs, professeur à l'Ecole Normale de Budapest. — M. M. Balog, professeur à

l'Ecole réale du 6me district de Budapest. — Dr. Paul DIENES, professeur au Gymnase du 10me district de Budapest. — M. Ch. FROHLICH, professeur à l'Ecole réale du 5me district de Budapest. — Dr. Eduard LEVAY, professeur au Gymnase du 8me district de Budapest — M. Aladar PECH, professeur au Gymnase du 7me district de Budapest. — M. Kandid PERENYI, professeur au Gymnase catholique de Eger. — M. V. PERENYI, professeur au collège évangélique de Eperjes. — M. J. WINTER, professeur au Gymnase du 8me district de Budapest. — Dr. Aloïs PRIVORSZKY, professeur à l'Ecole réale du 2me district de Budapest. — M. I. RADOS, professeur à l'Ecole réale du 6me district de Budapest, — Dr. J. SUTAK, privat-docent à l'Université de Budapest, professeur de gymnase cath. — M. Gabriel SZABO, professeur au Gymnase de jeunes filles du 4me district de Budapest. — Dr. Aladar VISNYA, professeur au Gymnase de Nagyvarad. — Dr. Cyrill VOROS, professeur au Gymnase cath. de Budapest. — M. Daniel ARANY, professeur à l'Ecole sup. industr. de Budapest. — M. Markus ANTAL, professeur à l'Ecole de Commerce de Budapest. — M. S. BOGYO, professeur à l'Académie de Commerce de Budapest. — M. M. HAVAS, professeur à l'Ecole de Commerce de Budapest. — M. A. SZENES, maître à l'école primaire supérieure de Nagybecskerek. — M. J. WOLENSKY, maître à l'école primaire supérieure de Budapest.

ILES BRITANNIQUES

Sir G. GREENHILL, *délégué*, s'est assuré le concours du *Board of Education*. L'organisation de la Sous-Commission anglaise et de ses travaux se fera sous les auspices du *Board*, qui se charge en outre de la publication des rapports. Cette collaboration si large du *Board of Education* a été bien accueillie du Comité central et constitue un précieux encouragement pour les professeurs et les mathématiciens anglais.

Nous comptons pouvoir donner un aperçu des travaux projetés dans un prochain numéro de l'*Enseignement Mathématique*.

ITALIE

La Sous-Commission a été composée comme suit : MM. les *délégués*

G. CASTELNUOVO, professeur à l'Université de Rome.
F. ENRIQUES, professeur à l'Université de Bologne.
G. SCORZA, professeur à l'Institut technique de Palerme.
et MM.
A. CONTI, professeur à l'Ecole normale Margherita di Savoia, Rome. Directeur de « *Il Bollettino di matematica* ».
E. d'OVIDIO, sénateur, professeur à l'Université de Turin.
G. FAZZARI, professeur au Lycée Umberto I, Palerme. Directeur de « *Il Pitagora* ».
G. LAZZERI, professeur à l'Académie navale, Livourne. Directeur du « *Periodico di Matematica* ».
S. PINCHERLE, professeur à l'Université de Bologne.
U. SCARPIS, professeur au Lycée Minghetti, Bologne.
F. SEVERI, professeur à l'Université de Padoue, président de la Société « Mathesis ».

C. Somigliana, professeur à l'Université de Turin.
G. Veronèse, sénateur, professeur à l'Université de Padoue.

La Sous-Commission a tenu ses premières séances à Padoue, les 21 et 22 septembre 1909. Elle a nommé M. d'Ovidio *président* et M. Castelnuovo *secrétaire*.

La Sous-Commission a discuté le plan des travaux ; elle a arrêté la liste ci-après des rapports sur l'enseignement mathématique dans les principaux types d'écoles :

Ecoles élémentaires, par A. Conti.
Ecoles classiques secondaires, par G. Fazzari et U. Scarpis.
Ecoles et Instituts techniques, par G. Scorza.
Ecoles professionnelles, par G. Lazzeri.
Ecoles normales, par A. Conti.
Universités (préparation mathématique des ingénieurs), par C. Somigliana.
Universités (préparation de candidats à l'enseignement), par S. Pincherle.

Enfin, MM. d'Ovidio, Veronèse et Padoa (Gènes) ont été priés d'exposer dans des rapports spéciaux leurs vues générales sur l'enseignement mathématique.

Ces rapports seront examinés et discutés dans une réunion que la Sous-Commission se propose de tenir au printemps 1910.

NORVÈGE

La Sous-Commission norvégienne se compose de M.

Magnus Alfsen, *délégué*, professeur au Lycée municipal, membre pour les mathématiques du Conseil supérieur de l'Instruction publique, et de MM.
A. Guldberg, professeur aux Ecoles militaires, Christiana.
Elling Holst, professeur à l'Ecole polytechnique de Christiana.
G. Holtsmark, professeur à l'Ecole agriculture de Norvège, Aas.
D. Jsaachsen, professeur à l'Ecole normale, Horten.
C. Störmer, professeur à l'Université de Christiana.

La liste sera encore complétée dans la suite.

M. Alfsen a publié, dans la revue norvégienne de l'enseignement secondaire, un rapport sur la constitution et le but de la Commission.

PORTUGAL

Les travaux ont été organisés directement sous les auspices de M. le Directeur de l'Instruction publique, sur la proposition de M. Gomes Teixeira, *délégué*. Le Recteur de l'Université de Coïmbra, les Directeurs des Ecoles polytechniques de Lisbonne et Porto, les Recteurs des Lycées de Lisbonne, Porto et Coïmbra et les Directeurs des Ecoles normales primaires ont invité les Conseils académiques à indiquer les modifications qu'il convient d'introduire dans les programmes et les méthodes des études mathématiques. Ces rapports seront transmis à M. Teixeira, qui rédigera le rapport d'ensemble sur l'enseignement mathématique au Portugal.

ROUMANIE

Délégué : M. G. Tzitzéica, professeur à l'Université de Bucarest.

La Sous-Commission, composée de représentants des principaux établissements d'instruction publique, est en voie de formation.

RUSSIE

La sous-commission russe se compose de MM. les *délégués :*

N. Sonin, académicien, président du Comité Scientifique du Ministère de l'Instruction publique.

B. Koialovič, professeur à l'Institut technologique de St-Pétersbourg.

Ch. Vogt, directeur de la 2me Ecole Réale de St-Pétersbourg, et de MM. W. Alexeev, recteur de l'Université de Yuriew.

Th. Friesendorf, privat-docent à l'Université de St-Pétersbourg.

S. Glasenapp, professeur à l'Université de St-Pétersbourg.

D. Goriatčeev, professeur à l'Université de Varsovie.

A. Hatzuck, professeur à l'Institut technologique de St-Pétersbourg.

B. Kagan, privat-docent à l'Université d'Odessa.

G. Kolossov, professeur à l'Université de Yuriew.

V. Kondratiev, directeur du 8me Gymnase de St-Pétersbourg.

P. Kotourmitzki, professeur à l'Institut technologique de St-Pétersbourg.

Z. Makcheev, lieutenant général, directeur du Musée pédagogique des Ecoles militaires.

N. Michelson, professeur à l'Institut supérieur pédagogique des jeunes filles de St-Pétersbourg.

D. Mordoukhai-Boltovskoi, professeur à l'Université de Varsovie.

M. Poproushenko, lieutenant général attaché à la Direction générale des Ecoles militaires.

C. Posse, professeur à l'Université de St-Pétersbourg.

H. Saltykov, professeur à l'Université de Kharkov.

D. Seiliger, professeur à l'Université de Kazan.

D. Sintzov, professeur à l'Université de Kharkov.

Th. Souvorov, professeur à l'Université de Kazan.

B. Struve, directeur de l'Ecole supérieure d'Arpentage Constantin, à Moscou.

J. Timčenko, privat-docent à l'Université d'Odessa.

SUÈDE

La Sous-Commission se compose de MM.

H. von Koch, *délégué,* professeur à l'Ecole technique supérieure de Stockholm.

H. Dahlgren, recteur du Séminaire d'Upsal.

A. O. Gallander, professeur à l'Ecole technique d'Örebro.

E. Göransson, professeur à Norra Latinläroverket à Stockholm ; secrétaire.

K. L. Hagström, professeur au Lycée de Linköping.

E. Hallgren, recteur à l'Ecole réale supérieure de Gothembourg.

P. H. Henriques, professeur à l'Ecole technique supérieure de Stokholm.
Mlle A. Rönström, directrice de l'Ecole privée des jeunes filles à Lund.
A. Wiman, professeur à l'Université d'Upsal.

Les rapports préparatoires seront prêts fin avril, et seront publiés dans la *Pedagogisk Tidskrift*, organe officiel de la sous-commission suédoise.

SUISSE

La Sous-Commission suisse est composée de MM.

H. Fehr, *président;* C. F. Geiser, J. H. Graf, *délégués*, et MM.
Bach, inspecteur primaire; directeur du « Landerziehungsheim Schloss Kefikon », Islikon (Thurgovie).
Badertscher, inspecteur; directeur des écoles secondaires de Berne.
Bertrand (Louis), directeur du Gymnase de Genève.
Brandenberger, professeur à l'Ecole cantonale de Zurich.
Crelier (L.), professeur au Technicum de Bienne.
Duggelin (Rob.), professeur au Gymnase de Schwytz.
Einstein (A.), ingénieur diplômé de l'Ecole polytechnique fédérale; professeur de physique mathématique à l'Université de Zurich.
Flatt (R.), recteur de l'Ecole réale supérieure de Bâle.
Grossmann (M.), professeur à l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich.
Gubler (E.), chargé de cours de l'Université de Zurich; professeur au Séminaire et à l'Ecole supérieure des jeunes filles de Zurich.
Jaccottet (Ch.), professeur au Gymnase scientifique de Lausanne.
Matter (K.), professeur au Gymnase de Frauenfeld.
Morf (L.), directeur des Ecoles de commerce et d'administration de Lausanne.
Moser, directeur du Bureau fédéral des assurances; professeur à l'Université de Berne.
Scherrer (F. R.), vice-directeur du Séminaire de Küsnacht (Zurich).
Stiner (G.), professeur au Technicum de Winterthour.
Stoecklin (Justin), instituteur primaire, Liestal (Bâle).

La Sous-Commission consacrera une étude spéciale à chacun des types d'établissements énumérés dans le *Rapport préliminaire*. Dans ce but, elle a réparti le travail entre plusieurs comités et sous-comités. Leur étude sera basée :

1° sur l'étude comparée des programmes, plans d'études et autres documents fournis par les institutions;

2° sur les réponses aux questionnaires 1 et 2 adressés aux directeurs et aux professeurs de mathématiques [1];

3° sur des visites d'établissements.

A côté de ces rapports, on prévoit des études sur des branches ou des enseignements spéciaux; il y aura notamment un rapport sur les *Ecoles modernes* (Landerziehungsheime).

Il est désirable que certaines questions soient mises en discussions dans des assemblées de professeurs (groupements locaux, société suisse des professeurs de mathématiques, sociétés pédagogiques).

[1] Ces questionnaires sont reprodnits dans l'*Ens. math.* du 15 mars 1910.

Les Rapports seront publiés, avec le concours de la Confédération et des principaux cantons, sous le titre : *L'Enseignement mathématique en Suisse, Rapports de la Sous-Commission suisse. — Der mathematische Unterricht in der Schweiz, Berichte der schweiz. Subkommission.* — Le premier fascicule, qui vient de paraître, est consacré aux *travaux préparatoires ;* il contient, après une courte introduction, un extrait du *Rapport préliminaire* (en allemand et en français), la liste des membres de la Commission internationale et de la Sous-Commission suisse, la circulaire adressée aux directeurs des établissements d'instruction publique, le questionnaire (n° 1) adressé aux directeurs, et le questionnaire (n° 2) adressé aux professeurs de mathématiques.

Les Rapports pourront être rédigés dans l'une des trois langues nationales (allemand, français ou italien). Ils seront d'abord dactylographiés (à 25 exemplaires au moins) et distribués aux membres de la Sous-Commission. Celle-ci les soumettra à une discussion approfondie et, après leur adoption définitive, ils seront publiés, in-extenso ou partiellement, dans les *Rapports de la Sous-Commission suisse.*

Les renseignements complémentaires seront publiés dans l'*Enseignement mathématique.* MM. les Délégués sont priés d'envoyer les corrections et additions au secrétaire-général.

Le Président :
F. Klein.

Le Secrétaire-général :
H. Fehr.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Emploi des compléments arithmétiques dans le calcul mental.

On sait que le *complément arithmétique* d'un nombre est la différence entre la puissance de 10 immédiatement supérieure au nombre considéré et ce nombre lui-même ; autrement dit, c'est ce qu'il faut ajouter au nombre proposé pour obtenir comme total l'unité suivie d'autant de zéros que ce nombre a de chiffres.

Pour faciliter ou abréger les calculs, on fait depuis longtemps usage du complément, pour la soustraction par exemple.

Dans les traités de calcul mental sont également indiqués quelques procédés isolés se rattachant à la multiplication. Par exemple, dans le cas où deux facteurs sont compris entre 90 et 100, rien n'est plus facile que de trouver, mentalement et très vite, leur produit.

Je me propose d'indiquer ici un principe, une règle générale d'où découlent ces procédés. Je crois que cela n'a point été fait ; en tous cas, cela peut être utile, car la règle en question permet d'effectuer mentalement un grand nombre de multiplications dont les facteurs peuvent avoir 2, 3 et même 4 chiffres chacun.

Voici la proposition :

Soient deux facteurs A, B *ayant le même nombre* n *de chiffres,* A' *et* B' *leurs compléments respectifs ;*

La différence $A - B'$ *donne un nombre* P; *le produit* $A'B'$ *donne un nombre* Q *d'unités simples ;*

$P \cdot 10^n + Q$ *sera le produit* AB.

En effet

$$A - B' = A + B - 10^n ,$$

$$A'B' = (10^n - A)(10^n - B) ,$$

et

$$(A + B - 10^n)\,10^n + (10^n - A)(10^n - B) = AB .$$

La règle pratique s'ensuit immédiatement.

Appliquons-la, comme exemple, au produit des deux facteurs de deux chiffres 64 et 98.

Ici, $B' = 2$, $A = 64$, $P = 62$. On aura donc au produit 62 centaines.

$A' = 36$, $B' = 2$, $Q = 72$. On aura 72 unités.

Le produit sera 6272.

De même, 38×95 donnerait immédiatement 33 centaines et 62×5 ou 310 unités, soit 3610 comme produit.

Voici maintenant un troisième exemple, relatif à deux facteurs de 3 chiffres, l'un de ces facteurs étant compris entre 990 et 1000. Soit 749×998. $A - B' = 749 - 2 = 747$ nous représente des milliers ; $A'B' = 251 \times 2 = 502$, des unités.

Le produit est 747502.

On appliquerait encore la même règle avec facilité à deux facteurs de 4 chiffres, l'un de ces facteurs étant compris entre 9990 et 10 000.

En général, lorsque B' n'a qu'un chiffre, la formation du produit $A'B'$ n'offre aucune difficulté, avec un peu d'exercice ; car on *voit* le complément A' formé suivant le procédé classique.

Parmi les applications possibles de la règle qui précède, il y a lieu d'indiquer :

La formation des puissances de 9 ;

Les produits dont les facteurs se composent du chiffre 9 répété plusieurs fois ;

Ceux de deux nombres voisins de 100, etc.

Il y en aurait sans doute bien d'autres encore. J'ai voulu me borner à montrer quel parti on peut tirer des compléments arithmétiques dans les exercices de calcul mental.

Albert Lecomte (Romorantin).

Une démonstration du théorème d'Arnoux.

M. C.-A. Laisant présente, dans l'*Enseignement mathématique*, Xe année (p. 220-225, 1908), un nouveau théorème d'arithmétique dû à M. G. Arnoux et que celui-ci a établi implicitement dans son « *Arithmétique Graphique* (introduction à l'étude des fonctions arithmétiques », p. 29-31, 1906).

M. G. Tarry, de même que M. Laisant, reconnaît la portée de ce théorème, qui paraît jouer un rôle important dans certains domaines de l'arithmétique.

Bien que la démonstration de M. Laisant soit simple et élégante, il n'est cependant pas inutile de donner une autre démonstration de cet intéressant théorème, dont voici l'énoncé :

Théorème d'Arnoux. — *Soit* $M = m_1 m_2 \ldots m_n$ *un nombre composé, dont les facteurs* $m_1, m_2, \ldots m_n$ *sont premiers entre eux deux à deux ; appelons* $\mu_1, \mu_2, \ldots$ *les quotients* $\frac{M}{m_1} = m_2 m_3 \ldots m_n, \ldots\ldots$ *Si* $a_1, a_2, \ldots a_n$ *sont des nombres tels que l'on ait*

$$a_1\mu_1 = \text{mult. } m_1 + r, \quad a_2\mu_2 = \text{mult. } m_2 + r, \ldots a_n\mu_n = \text{mult. } m_n + r,$$

il s'ensuit qu'on aura aussi

$$a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \ldots\ldots + a_n \mu_n = \text{mult. M} + r.$$

Voici ma démonstration :

Si m_1 et r avaient un facteur commun, ce facteur diviserait aussi m_2, à cause de la seconde équation de condition, $a_2 M_2 = \text{mult.}\ m_2 + r$, m_1 et m_2 auraient alors un facteur commun, ce qui est contraire à l'hypothèse m_1 et m_2 premiers entre eux. Par conséquent m_1 et r sont premiers entre eux.

Un raisonnement analogue montre que m_2, m_3, ... m_n, et par conséquent M lui-même, sont premiers avec r.

En considérant les équations de condition, on voit que le produit

$$(r - a_1 \mu_1)(r - a_2 \mu_2)(r - a_3 \mu_3) \ldots\ldots (r - a_n \mu_n),$$

c'est-à-dire

$$r^n - \Sigma a_1 \mu_1 r^{n-1} + Pr^{n-2} + Qr^{n-3} + \ldots\ldots + Sr + T,$$

est divisible par le produit $m_1 m_2 m_3 \ldots m_n$, donc par M.

Les coefficients P, Q, ..., S, T sont évidemment divisibles par M, puisque les produits de 2, 3 ou un plus grand nombre de μ_1, μ_2, ..., μ_n, sont divisibles par M.

Par conséquent $r^n - \Sigma a_1 \mu_1 r^{n-1}$ est divisible par M.

r^{n-1} et M sont premiers entre eux; donc $r - \Sigma a_1 \mu_1$ est divisible par M.

T. Hayashi (Tokio).

A propos d'un article de M. Kariya concernant un théorème sur le triangle.

Je vois (avec un peu de retard) que dans l'*Enseignement Mathématique*, M. Kariya (Tokio) a exposé un théorème sur le triangle (*E. M.*, 1904, p. 130), lequel a donné lieu à un certain nombre de remarques intéressantes (même année, p. 236, et année 1905, p. 44).

Le même théorème et la plupart des remarques auxquelles il a donné lieu, ont été donnés par moi, dans le *Journal de Math. Spéciales* de M. G. de Longchamps (*année 1890*, page 104 et suiv., page 124 et suiv.), dans un article intitulé : *Sur un groupe de quatre coniques remarquables du plan d'un triangle*. Je donne, en outre, dans le même Recueil, p. 265, un petit article intitulé : *Problème sur le triangle*, qui généralise beaucoup le théorème de Kariya.

Je ne crois pas qu'il faille attacher une trop grande importance

à ces questions de priorité ; ma petite indication ne sera pourtant pas inutile, en rappelant l'attention sur un Recueil où l'on trouve beaucoup de résultats sur le triangle, que l'on *retrouve* aujourd'hui.

Paris, 16 février 1910. Aug. Boutin.

CHRONIQUE

Commission internationale pour l'unification des notations vectorielles.

Sur la proposition de la section de mécanique, le Congrès international des mathématiciens, tenu à Rome en avril 1908, avait chargé son Comité de constituer une commission pour l'étude de la question importante de l'unification de la notation vectorielle. Cette commission, nommée en octobre 1909, a été composée comme suit :

MM. Abraham (Milan), Ball (Cambridge), Hadamard (Paris), Langevin (Paris), Lori (Padoue), Marcolongo (Naples), Prandtl (Gœttingue), Stekloff (St-Pétersbourg), Whitehead (Cambridge), Wilson (Cambridge, Mass. U. S. A.)

Académie royale de Belgique. — Prix proposés.

L'Académie met au concours les questions suivantes :

On demande de nouvelles recherches sur les développements des fonctions (réelles ou analytiques) en séries de polynômes. (Prix de 800 francs).

Résumer les travaux sur les systèmes de coniques dans l'espace et faire de nouvelles recherches sur ces systèmes. (Prix de 600 francs.)

Les mémoires doivent être inédits, rédigés en français ou en flamand et adressés, franco, à Monsieur le Secrétaire perpétuel de l'Académie avant le 1er août 1911.

Faculté des Sciences de Paris. — Thèses de Doctorat.

Thèses de sciences mathématiques soutenues en 1909 (jusqu'à octobre 1909) :

Gambier (Bertrand). — Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est à points critiques fixes. (1909, in-4°, 55 p.)

Verone (Théoph.). — Contribution à la théorie des ondes liquides. (1909, in-4°, de 80 p.)

Doctorat d'Université. — Dienes (Paul). — Essai sur les singularités des fonctions analytiques. (1909, in-4° de 88 p.)

Œuvres de Guilio Fagnano.

Il vient de se constituer à Rome un comité en vue de la publication des œuvres complètes du comte Jules-Ch. de Fagnano. Les célèbres « Produzioni matematiche » sont devenues aujourd'hui une rareté bibliographique. Elles vont être réimprimées et seront suivies non seulement d'autres travaux purement scientifiques, mais aussi des travaux polémiques et de la correspondance scientifique.

Afin que l'édition soit aussi complète que possible le comité, composé de MM. V. Volterra, Gino Loria et D. Gambioli, nous prie d'informer nos lecteurs que les renseignements concernant la présence éventuelle de manuscrits de Fagnano dans les Bibliothèques seront accueillis avec reconnaissance par M. le prof. V. Volterra, sénateur (rue Lucina, 17, in Rome).

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Allemagne. — *Université de Gœttingue.* Nous avons déjà annoncé que des cours de vacances seront organisés pour les professeurs de mathématiques et de physique dans les écoles moyennes. Les cours suivants figurent au programme : MM. Behrendsen, méthodes géométriques dans l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre (2 séances de 2 heures); Klein, Elementare Mechanik (3); Prandtl, aerodynamique et aviation; Landau, théorie des ensembles (2).

— M. E. Jost est nommé astronome à l'Observatoire de Königsberg.

M. C. Runge est nommé Docteur honoraire de l'Université Columbia, à New-York.

M. E. Schmidt, professeur à l'Université de Zurich, est nommé professeur à l'Université d'Erlangen.

M. J. Schur, privat-docent, est nommé professeur à l'Université de Berlin.

M. K.-W. Wirtz, privat-docent pour l'astronomie à l'Université de Strasbourg, est nommé professeur.

Privat-docents. — Ont été admis en qualité de privat-docents pour l'Astronomie, M. B. Grebe, à l'Université de Bonn, M. E. Kohlschütter, à l'Université de Berlin, et M. G. v. Brun, à l'Ecole technique supérieure de Danzig.

Angleterre. — M. E.-W. Hobson, F. R. S., est nommé professeur à l'Université de Cambridge à la chaire devenue vacante par la retraite de M. A.-R. Forsyth, F. R. S.

M. G.-I. Taylor, B. A., a obtenu le premier des *Smith's Prizes* à Cambridge. Le second prix n'a pas été décerné.

Etats-Unis. — M. C.-T. Keyser est nommé professeur ordinaire de mathématiques à l'Université Columbia, à New-York.

France. — M. H. Poincaré a été nommé docteur honoraire de l'Université de Bruxelles, à l'occasion du 75me anniversaire de fondation de cette université.

MM. P. Painlevé et H. Poincaré ont été nommés docteurs honoraires de l'Université de Stockholm, le 16 décembre, lors de l'inauguration des nouveaux bâtiments académiques de Stockholm.

M. Lucien Lévy, répétiteur d'analyse, est nommé examinateur des élèves pour la mécanique, en remplacement de M. Carvallo.

Académie des Sciences. — M. R. De de Kind, membre correspondant, professeur à l'Ecole technique supérieure de Braunschweig, a été élu membre associé étranger.

Hongrie. — L'Université de Klausenbourg a nommé docteurs honoraires MM. Bodola (Géodésie), Rados (Mathématiques), Schuller (Physique), Törössy (Géométrie descriptive), Wittmann (Physique technique), professeurs à l'Ecole technique supérieure de Budapest. Ces titres ont été conférés à l'occasion de l'inauguration du nouveau bâtiment de cette Haute Ecole.

Italie. — *R. Istituto Lombardo.* Parmi les prix décernés cette année, il y a lieu de signaler celui qui était proposé au travail apportant une contribution importante à la théorie des groupes continus (Prix de 1200 fr.). Le mémoire couronné est intitulé : *I gruppi continui infiniti di trasformazioni puntali delle spazio a tre dimensioni*, et a pour auteur M. U. Amaldi, professeur à l'Université de Modene.

Suisse. — M. E. Meissner, privat-docent, est nommé professeur de mécanique technique à l'Ecole polytechnique fédérale, à Zurich.

M. Zermelo, professeur à l'Université de Gœttingue, est nommé professeur à l'Université de Zurich, en remplacement de M. E. Schmidt, nommé à l'Université d'Erlangen.

Nécrologie.

Nous apprenons avec regret la mort de M. A. Capelli, professeur d'Algèbre à l'Université de Naples, décédé le 28 janvier dernier, à l'âge de 55 ans. Il était directeur du *Giornale di Matematiche di Battaglini*, membre de la Société italienne dite des XL, de l'Académie dei Lincei, de l'Académie de Naples, etc.

NOTES ET DOCUMENTS

Commission internationale de l'enseignement mathématique. Sous-commission suisse.

Questionnaires adressés aux directeurs et aux professeurs.

Note de la Rédaction. — Nous reproduisons ici, à titre de documents, les questionnaires 1 et 2 adressés par la délégation suisse, l'un aux directeurs des écoles moyennes, l'autre aux professeurs. Des questionnaires analogues ont été envoyés aux écoles professionnelles.

« **Objet des questionnaires.** — Le questionnaire adressé à MM. les Directeurs est destiné plus spécialement à nous donner un aperçu précis de l'état actuel de l'enseignement. La rubrique « Remarques générales » permet, en outre, de signaler les projets de transformation ainsi que des essais qui auraient pu être faits, sans cependant encore figurer dans les programmes. Il conviendrait de faire remplir ce questionnaire, séparément pour chacune des sections, par la conférence des professeurs de mathématiques de chaque établissement, spécialement convoqués à cet effet.

Nous avons pensé, en outre, qu'il serait bon de permettre aux professeurs d'exprimer leur *opinion personnelle* sur les réformes utiles à l'enseignement mathématique. Nous vous prions donc de bien vouloir leur distribuer les questionnaires ci-joints, qui leur sont spécialement adressés. » *(Extrait de la lettre aux directeurs.)*

Section B Abteilung B.	*Ecoles professionnelles.* Berufsschulen.
QUESTIONNAIRE N° 1 adressé aux Directeurs.	FRAGEBOGEN N° 1 zuhanden der Rektoren.

I

Lieu (Ort). *Etablissement* (Schule). *Section* (Abteilung).

II

But et plan des études mathématiques.

(S'il existe un plan d'études imprimé, prière de le joindre au questionnaire.)

Ziel und Stoff des mathematischen Unterrichts.

(Falls ein gedruckter Lehrplan existiert, bitten wir, ihn dem Berichte beizulegen.)

a) But de l'enseignement mathém.
b) Branches d'études ; leur étendue.
c) Temps consacré aux mathématiques et leurs différentes branches (résumer sous forme d'un tableau).
d) Concentration de l'enseignement. Dans quelle mesure tient-on compte des liens entre les mathématiques et les autres branches et en particulier avec les mathématiques appliquées ?

a) Ziel des mathem. Unterrichts.
b) Welche Gebiete der Mathematik werden gelehrt und in welchem Umfange ?
c) Wieviel Zeit wird den verschiedenen Gebieten gewidmet ? (Gefl. in einer Tabelle zusammenstellen.)
d) Konzentration des Unterrichts : In welchem Masse werden die Zusammenhänge zwischen der reinen und der angewandten Mathematik und der Physik berücksichtigt ?

III

Les examens.

Indiquer l'organisation des examens et des promotions et tout particulièrement ce qui concerne le certificat de maturité. (S'il existe un règlement imprimé, prière de le joindre au questionnaire).

Prüfungen.

Wie sind die Prüfungen, die Promotionen und insbesondere die Maturitätsprüfungen organisiert ? (Falls diesbezügliche Reglemente vorhanden sind, bitten wir um deren Einsendung).

IV

Les méthodes d'enseignement.

a) Méthode.
b) Matériel d'enseignement ; modèles.
c) Emploi de manuels et de recueils d'exercices.
d) Travaux pratiques :
A. Travaux manuels.
B. Confection de modèles par les élèves.
C. Dessin géométrique et technique (de machines).
D. Travaux de levers de plans.
E. Exercices pratiques de cosmographie et d'astronomie élémentaire.
F. Travaux pratiques de physique.
G. Autres applications (p. ex. emploi de la règle à calculs).

Unterrichtsmethoden.

a) Methode.
b) Lehrmittel, Anschauungsmaterial.
c) Lehr- und Uebungsbücher.
d) Praktische Arbeiten :
A. Handfertigkeitsunterricht.
B. Herstellung von Modellen durch die Schüler.
C. Maschinenzeichnen. Geometr. Zeichnen, event. Projektionslehre.
D Uebungen im Feldmessen.
E. Astronomische Uebungen.
F. Physikalische Schüler-Uebungen.
G. Andere praktische Uebungen (z. B. Rechenschieber).

V

Préparation des candidats à l'enseignement. La situation des maîtres.

a) Quelles sont les garanties exigées par l'autorité scolaire :

A. au point de vue de la préparation théorique?

B. à celui de la préparation professionnelle?

b) La garantie scientifique que peut exiger l'autorité scolaire est nécessairement en relation étroite avec la situation qui est faite aux maîtres (nombre d'heures, salaire, retraite). Il serait bon d'être renseigné sur ce qui se fait à cet égard.

Ausbildung der Lehramts-Kandidaten. Stellung der Lehrer.

a) Welche Forderungen stellen die Schulbehörden hinsichtlich

A der theoretischen Vorbildung?

B. der praktischen Vorbereitung?

b) Diese Anforderungen der Behörden stehen in engem Zusammenhange mit der ökonomischen Stellung der Lehrer (Stundenzahl, Besoldung, Pension). Einige genauen Zahlen hierüber sind erwünscht.

VI

Remarques générales.

Les questions ci-dessus concernant plus particulièrement l'état actuel de l'enseignement, nous invitons les directeurs à nous donner ici quelques indications sur les transformations qui pourraient être à l'étude et concernant les rubriques I à V. Vœux et propositions. Opinion sur les tendances actuelles de l'enseignement mathématique (voir « Rapport préliminaire », lettre G, II, 2me partie).

Allgemeine Bemerkungen.

Die Fragen II bis V beziehen sich vor allem auf den gegenwärtigen Zustand des Unterrichtes. Wir ersuchen die Rektoren um Mitteilungen über allfällige in Aussicht genommene Aenderungen in Bezug auf die Punkte II bis V. Wünsche und Anregungen. Ansicht über die modernen Bestrebungen in mathematischem Unterricht (siehe « Vorbericht », G, II, 2. Teil).

Janvier 1910.

LA DÉLÉGATION SUISSE

Section B. Abteilung B.

Écoles professionnelles. Berufsschulen.

QUESTIONNAIRE N° 2

adressé aux *professeurs*.

FRAGEBOGEN N° 2

zuhanden der *Mathematiklehrer*.

Nom du professeur / Name des Lehrers :

Adresse :

École (Schule) :

Section (Abteilung) :

I

Organisation scolaire.

Quelles sont vos idées personnelles concernant l'organisation scolaire? Réformes désirables; types d'écoles à créer; opinion sur la coéducation des sexes.

L'enseignement se donne-t-il par section, ou plusieurs sections se trouvent-elles réunies pour des leçons communes?

Schulorganisation.

Welches ist Ihre Ansicht bezüglich der Schulorganisation? Wünschenswerte Aenderungen; neue Schularten; Frage der Koedukation.

Werden die Schüler abteilungsweise unterrichtet oder erhalten mehrere Abteilungen gemeinsam Unterricht?

II

Plans d'études.

a) Quelle est votre opinion sur les tendances modernes concernant le but de l'enseignement mathématique et les branches d'études?

b) Branches nouvelles ou chapitres nouveaux à substituer à des objets inutiles dans la suite ou d'un intérêt secondaire, mais conservés dans le programme par pure tradition.

c) Introduction des premières notions de calcul infinitésimal.

d) Autres propositions tendant à perfectionner l'enseignement.

Lehrstoff.

a) Welches ist Ihre Ansicht bezüglich der modernen Bestrebungen hinsichtlich des Unterrichtsziels und der Lehrstoffe?

b) Neue Gebiete oder neue Kapitel, welche unzweckmässige oder weniger interessante, aber aus Ueberlieferung und Gewohnheit beibehaltene Gegenstände ersetzen können.

c) Einführung der Elemente der Infinitesimalrechnung.

d) Weitere Anregungen zur Vervollkommnung des mathematischen Unterrichts.

III

Examens.

a) Quelle est votre opinion concernant les examens oraux et écrits ?

b) Peuvent-ils être supprimés pour les élèves réguliers ?

c) Dans quel sens peut-on perfectionner leur organisation ?

Prüfungen.

a) Was halten Sie von den mündlichen und schriftlichen Prüfungen ?

b) Können sie ganz abgeschafft werden ?

c) Verbesserungsvorschläge.

IV

Méthodes d'enseignement.

a) *De la méthode :*

1° dans les classes inférieures.

2° dans les classes supérieures.

b) Quels sont les *manuels* et *recueils d'exercices* que vous employez en classe :

1° pour l'Arithmétique et la comptabilité ?

2° pour l'Algèbre ?

3° pour la Géométrie (incl. la Trigonométrie) ?

Dans quelle mesure les utilisez-vous dans votre enseignement ?

Préféreriez-vous d'autres manuels ?

e) Emploi de modèles, d'appareils et d'instruments mathématiques.

d) Dans quelle mesure tenez-vous compte des applications pratiques ?

e) Avez-vous des exercices de lever de plans ?

f) Propositions tendant à perfectionner les méthodes d'enseignement.

Unterrichtsmethoden.

a) *Ueber die Unterrichtsmethode*

1. auf der unteren Stufe.

2. auf der oberen Stufe.

b) Welche *Lehrbücher und Aufgabensammlungen* verwenden Sie :

1. im Rechnen u. Buchhaltung ?

2. in allg. Arithmetik u. Algebra ?

3. in Geometrie (inkl. Trigonometrie) ?

Wie verwenden Sie die Lehrbücher ?

Wünschen Sie andere Lehrbücher ?

c) Modelle, Instrumente und Apparate als Veranschaulichungsmittel.

d) In welchem Umfange berücksichtigen Sie die praktischen Anwendungen ?

e) Haben Sie Uebungen im Feldmessen ?

f) Vorschläge zur Verbesserung der Unterrichtsmethoden.

V

La préparation des maîtres.

a) Quelle est votre opinion sur ce que devrait être la préparation des maîtres :

1° au point de vue scientifique ?

2° à celui de la préparation professionnelle ?

Vorbereitung der Lehrer.

a) Wie sollte

1. die wissenschaftliche,

2. die praktische Vorbereitung beschaffen sein ?

Quels sont les cours et travaux pratiques que vous jugez indispensables?

b) Dans quelle mesure pouvez-vous continuer à vous occuper de mathématiques pures et appliquées? Avez-vous publié des travaux ou livres d'ordre scientifique ou pédagogique? (Prière de donner le titre complet.)

c) Utilité des cours de vacances destinés aux maîtres de l'enseignement secondaire.

Welche Vorlesungen und praktischen Uebungen halten Sie für unerlässlich?

b) Inwieweit können Sie Ihre Studien in reiner und angewandter Mathematik fortsetzen? Haben Sie wissenschaftliche oder methodische Arbeiten veröffentlicht oder Bücher geschrieben? (Genauer Titel gefl. angeben.)

c) Sind Ferienkurse für Mathematiklehrer wünschbar?

VI

Autres propositions et communications concernant l'enseignement mathématique.

Weitere Mitteilungen und Anregungen betreffend die Frage des mathematischen Unterrichts.

Janvier 1910.

LA DÉLÉGATION SUISSE

Cours universitaires.

RUSSIE

Cours annoncés pour l'année universitaire 1909-1910 [1].

Dorpat (Jurjew); *Université.* — Alexejew: Applications du Calcul diff. à la Géométrie, 3 (1. *s.*); Calcul intégral I, 3 (1. *s.*): Théorie des invariants, 2 (1. *s.*). — Gravé: Introduction à l'Analyse, 4 (1. *s.*); Géométrie analyt. I, 4 (1. *s.*); avec exerc. de géométrie analyt., 2 (1. *s.*); Théorie des fonctions et des variables complexes, 2 (1. *s.*). Exerc. de mathém. sup., 2 (1. *s.*). — Kolossoff: Cinématique du point et des systèmes de points avec application à la théorie des mécanismes, 4 (1. *s.*); Dynamique du point et des systèmes de points, 3 (1. *s.*) — Pokrowsky: Cours général d'astronomie, 4 (1. *s.*). Astronomie théorique, 2 (1. *s.*). Connaissance du ciel. Mécanique (pour les étudiants-chimistes), 3 (1. *s.*). Math. élém., 2 (1. *s.*). — Orloff: Géodésie sup., 2 (1. *s.*); Théorie et pratique des instruments séismiques, 2 (1. *s.*). — Kessler: Arpentage II, avec travaux prat., 2 (1. *s.*). Architecture, 2 (1. *s.*).

Kazan; *Université.* — Souvoroff: Calcul intégral, 3 (1. *s.*: intégrales indéfinies), 4 (2. *s.*: intégrales définies et applications du Calcul intégral à la Géom.); Exerc. sur les applications du Calcul intégral à la Géom., 2 (1. *s.*); Calcul des variations, 1 (2. *s*). — Kotelnikoff: Géom. analyt., 3 (1. et 2) et

[1] Explications des abréviations: (1. *s.*): premier semestre (septembre à décembre 1909); 2. *s.* deuxieme semestre (janvier à mai 1910); 1. et 2.: pendant deux semestres.

travaux prat 1 (1. et 2); Intégration des équations différentielles, 4 (1. *s.*) et travaux prat., 2 (2. *s.*). — Porphyrieff: Trigonométrie sphér., 1 (1. *s.*); Calcul diff., 1 (1. *s.*), 2 (2. *s.*). Applications du Calcul à la Géom., 1 (1. *s.*); Travaux prat. de Calcul diff., 1 (1. et 2.). Calcul des différences, 1 (1. *s.*). Calcul des probabilités, 2 (1. *s.*). Fonctions ellipt., 1 (2. *s.*). — Blagéevsky: Histoire des mathématiques, 2 (1. et 2.); Cinématique, 2 (1. et 2). — Zeiliguer: Algèbre sup., 3 (1. *s.*); Cinétique, 5 (1. *s.*), 4 (2. *s.*); Travaux prat. d'algèbre sup., 2 (2. *s.*); Cinématique, 4 (2. *s.*). — Dovbiago: Astronomie sphér., 3 (1. et 2.); Astronomie théorique, 2 (1. *s.*) et Travaux prat. 1 (1. *s.*); Mécanique céleste, 2 (2. *s.*); Travaux prat. d'Astronomie sphérique, 1 (2. *s.*). Exercices.

Kharkov; *Université:* Sintzoff: Géométrie analyt. du plan, 3 (1. *s.*) et travaux prat., 1 (1. et 2.). Applications du Calcul diff. à la Géométrie, 3 (1. *s.*) et travaux prat., 1 (1. *s.*); Intégration des équat. diff., 3 (1. *s.*) et travaux prat. 1 (1. *s.*). Géom. analyt. de l'espace, 3 (2. *s.*); Histoire des mathématiques, 2 (2. *s.*). — Roussian: Intégration des fonctions, 4 (1. *s.*), et travaux prat., 2 (1. *s.*); Théorie des intégrales définies, 2 (1. *s.*); 1, 3 (2. *s.*); Calcul diff., 4 (2. *s.*) et travaux prat., 2 (2. *s.*); Intégration des équat. aux dérivées part. du 1er ordre, 3 (2. s.). — Pscheborsky: Introduction à l'Analyse, 4 (1. *s.*); Théorie des fonctions d'une variable complexe, 3 (1. *s.*); Analyse algébr., 4 (2. *s.*). Calcul des variations, 2 (2. *s.*). Théorie des fonctions ellipt., 3 (2. *s.*). Zagoutinsky: Math. sup. (pour les étudiants-naturalistes), 4 (1. et 2.). Résolution algébrique des équations. 2 (1. *s.*) Géométrie projective, 2 (2. *s.*). — Zatycheff: Géométrie descriptive, 2 (1. et 2.) et travaux prat., 2 (1. et 2.). — Bernstein: Calcul des probabilités, 2 (1. *s.*); Introduction à la théorie des fonctions de variables réelles, 3 (2. *s.*); Travaux prat. d'intégration des équations différentielles, 2 (2. *s.*), — Saltykoff: Mécanique théorique (Statique, Cinématique et Dynamique), 4 (1. et 2.); avec Exerc., 2 (1. et 2.). Application de la théorie des équations aux dérivées part. à la Mécanique, 2 (1. *s.*); Séminaire de Mécanique théorique, 2 (1. et 2.). — Strouvé: Astronomie générale, 3 (1. et 2.). Déterminations des orbites, 3 (1. *s.*), 2 (2. *s.*). Travaux prat. à l'Observatoire (observations astronomiques), 3 (1. et 2.). — Eudokimoff: Trigonométrie sphér., 1 (1. *s.*); Astronomie prat., 3 (1. *s.*). Méthode des moindres carrés, 1 (1. *s.*); Géodésie sup., 3 (2. *s.*).

Kiew; *Université,* — Khandrikoff: Cours fondamental des mathématiques (pour les étudiants-naturalistes). 4 (1. et 2.). — Boukreieff: Introduction aux math. sup., 4 (1. *s.*). Application du Calcul diff. à la Géométrie, 4 (1. *s.*); Intégration des fonctions, 2 (1. *s.*); Calcul diff. (théorie et applications analyt. 4 (2. *s.*); Intégrales définies et intégrales multiples, 4 (2. *s.*). — Gravé: Géométrie analyt., 4 (1. *s.*). 3 (2. *s.*) et travaux prat., 2 (1. et 2.). Analyse algébr., 3 (1. *s.*), 2 (2. *s.*); Théorie des nombres, 1 (1. et 2.). Théorie du domaine quadratique. 2 (1. *s.*): Fonctions ellipt. (théorie des transformations, multiplication complexe), 2 (2. *s.*). — Pfeiffer: Intégration des équat. diff., 3 (1. s.); Intégration des équat. aux dérivées part., 2 (1. et 2.). Exerc. de Calcul diff. 2 (1. *s.*); Exerc. de Calcul intégral, 1 (1. *s.*); Exerc. de Calcul diff. 2 (2. *s.*). Travaux prat. sur les applications du Calcul intégral, 1 (2. *s.*); Travaux prat. d'intégration des équations diff., 2 (2. *s.*). Calcul des probabilités, 1 (2. *s.*). — Soussłow: Dynamique des solides, 2 (1. *s.*). Cinématique d'un système invariable, 2 (1. *s.*); Statique et théorie du potentiel, 2, (1. *s.*); Dynamique d'un système, 4 (2. *s.*); Théorie du champ vectoriel,

3 (2. *s*.). — Woronetz : Calcul des variations, 3 (1. *s*.). Cinématique du point, 2 (1. *s*.). Systèmes non holonomes, 3 (1. *s*.). Travaux prat. de mécanique du point, 2 (1. *s*.). Dynamique du point, 3 (2. *s*.). Intégration des équations de la dynamique, 3 (2. *s*.); Travaux prat. de mécanique d'un système 2 (2. *s*.). — Vogel : Astronomie descriptive, 2 (1. et 2.); Astronomie sphérique 2 (1. et 2.); Astronomie théorique, 3 (1. *s*.) Exerc. sur la théorie des instruments astronomiques, 3 (1. et 2.). Géodésie sup., 3 (2. *s*.).

Moscou ; *Université*. — Andreeff : Algèbre sup., 3 (1. et 2.); Trigonométrie sphér., 1 (1. *s*.). — Mlodzieiowsky : Géométrie analyt. du plan, 4 (1. *s*.). Théorie géom. des groupes continus de transformations, 3 (1. *s*.); Géométrie analyt. de l'espace, 3 (2. *s*.); Surfaces linéaires, 2 (2. *s*.); Exerc. de géométrie analyt. de l'espace, 2 (2. *s*.). — Zakhtin : Introduction à l'Analyse, 4, (1. *s*.); Calcul intégral, 4 (1. *s*.), 3 (2. *s*.); Calcul des probabilités, 2 (1. et 2.). Calcul diff., 4 (2. *s*.). Calcul des différences, 2 (2. *s*.). — Egoroff : Géométrie infinit., 4 (1. *s*.). Equations diff., II, 2 (1. *s*.), I, 3 (2. *s*.). Arithmétique des régions algébriques, 2 (1. *s*.); Calcul des variations, 2 (2. *s*.). Séminaire math., 2 (2. *s*.). — Bobynin : Histoire des connaissances math. antérieures à la science, 1 (1. et 2.) (pour les étudiants-mathématiciens et les étudiants-philologues). Histoire des math. dans la Grèce Antique, 1 (1. et 2.) (pour les mêmes); Histoire des math. au moyen âge 1 (1. et 2.) (pour les mêmes), Histoire des math. modernes, 1 (1. et 2.) (pour les étudiants en math. — Vinogradoff : Algèbre universelle, 2 (1. et 2.). — Bogoiawlensky : Algèbre sup. (Résolution des équations par radicaux), 2 (1. *s*.). — Wlassoff : Cours abrégé de math. sup. (pour les étudiants-naturalistes), 3 (1. et 2.) et travaux prat. sup. (pour les mêmes), 2 (1. et 2.); Géométrie projective, 2 (1. *s*.); Géométrie noneuclidienne, 2 (2. *s*.). — Dmitrowsky : Courbes planes d'ordres sup., 2 (1. et 2.). Travaux prat. de géométrie analyt. du plan, 2 (1. *s*.). — Gegalquin : Travaux prat. d'introduction à l'Analyse, 1 (1. *s*.); Travaux prat. de Calcul intégral, 2 (1. et 2.); Travaux prat. de Calcul diff., 2 (2. *s*.). — Wolkoff : Surfaces à courbure constante négative, 2 (1. *s*.); Travaux prat. de géométrie infinit., 2 (1. *s*.); Travaux pratiques d'intégration des équations diff., 2 (1. et 2.). — Joukowsky : Cinématique et Statique, 3 (1. *s*.); Travaux prat. de Cinématique et Statique, 2 (1. *s*.); Dynamique des solides (cours spécial), 2 (1. *s*.); Dynamique du point, 3 (2. *s*.) et travaux prat. 2 (2. *s*.); Aérodynamique avec des applications à l'aéronautique, 2 (2. *s*.). — Tchaplyguin : Mécanique d'un système et Hydromécanique, 3 (1. et 2.) et travaux prat. 2 (1. et 2.); Cours abrégé de Mécanique (pour les étudiants-naturalistes), 3 (1. *s*.). — Kowalensky : Résistance des matériaux, 4 (1. *s*.); Hydraulique, 4 (2. *s*.). — Mertzaloff : Géométrie descriptive, 2 (1. *s*.); Exerc. 2 (2. *s*.); Théorie des mécanismes, 2 (1. *s*.), avec Travaux prat., 1 (1. *s*.); Dessin linéaire, 2 (1. et 2.); Tracé des machines 1 (1. et 2.); Théorie générale des machines, 2 (2. *s*.). — Bolotoff : Théorie du choc, 2 (1. *s*.); Théorie de l'élasticité, 3 (2. *s*.). — Stankiewitch : Intégration des équations diff. de la Mécanique et introduction à la théorie des marées (selon Poincaré), 3 (1. *s*.); Théorie des marées 3 (2. *s*.). — Appelroth : Propriétés fondamentales des intégrales des équations diff., 1 (1. et 2.). — Zeibenson : Hydrodynamique, 3 (1. *s*.). Théorie des machines thermiques, 2 (1. et 2.). Théorie générale des turbines, 3 (2. *s*.). — Tserassky : Astronomie sphérique, 2 (1. et 2.) et travaux prat. 2 (1. *s*.). Astronomie théor., 2 (1. et 2.). Astronomie prat. et travaux prat. à l'Observatoire, 3 (2. *s*.). — Sternberg : Géodésie sup., 2 (1. et 2.) et travaux prat., 2 (1. et 2.). — Kasakoff : Mécanique céleste, 2 (1. et 2.). Correction des orbites ellipt.

des planètes, 2 (1. et 2.). — IWERONOFF : Géodésie, cours général fondamental, 2 (1. *s.*) et travaux prat., 1 (1. et 2.); Géodésie, théorie des instruments, 2 (2. *s.*).

Saint-Pétersbourg; *Université:* SOKHOTZKY : Algèbre sup., 3 (1. et 2.); Théorie des intégrales définies, 2 (1. et 2.). — MARKOFF : Calcul des probabilités, 2 (1. et 2.). PTASCHITZKY : Géom. analyt., 4 (1. et 2.); Fonctions ellipt., 3 (1. *s.*); Applications du Calcul intégral à la géom., 3 (2. *s.*). — SELIWANOFF : Introduction à l'Analyse, 4 (1. *s.*); Intégration des fonctions, 3 (1. *s.*); Calcul diff., 4 (2. *s.*). — STEKLOFF : Intégration des équations diff., 3 (1. et 2.); Intégration des équations aux dérivées part., 3 (1. et 2.). — IWANOFF : Applications du Calcul diff. à la Géom., 4 (1. *s.*); Théorie des nombres, 4 (2. *s.*). — BORISSOFF : Eléments de Math. sup., II, applications de l'Analyse infinitésimale à l'Analyse et à la Géom., 3 (1. et 2.); Travaux prat., 1 (1. et 2.). — SAWITSCH : Géom. descriptive, 1 (1. *s.*) et 2 (2. *s.*). — GÜNTHER : Calcul des différences finies, 2 (1. *s.*); Travaux prat. de Géom. analyt., 2 (1. et 2.); Travaux prat. de Calcul diff., 2 (2. *s.*); Eléments de la théorie analyt. des équations diff., 2 (1. et 2.). — WASSILIEFF : Eléments de Math. sup., I, 3 (1. et 2.). Introduction à la chimie math., 1 (1. et 2.). — NEKRASSOFF : Application du Calcul des probabilités aux sciences économiques, 2 (1. et 2.). — ADAMOFF : Exerc. sur les applications de l'Analyse à la Géom., 2 (1. *s.*). Exerc. de Calcul intégral, 2 (2. *s.*). — SOMOFF : Analyse vectorielle, 2 (1. et 2.). — BOBYLEFF : Cinématique, 2 (1. *s.*). Mécanique du point matériel, 3 (2. *s.*); Mécanique d'un système de points matériels et d'un corps solide, 4 (1. *s.*); Hydrostatique, Hydrodynamique et théorie de l'attraction, 3 (2. *s.*). — MESTSCHERSKY : Méthodes pour la résolution des problèmes de Mécanique du point matériel (1. *s.*) et d'un système de points matériels (2. *s.*), 2. — FRISENDORF : Eléments de Mécanique, 2 (1. et 2.); Statique, 2 (2. *s.*); Aperçu historique et critique des principes de la Mécanique rationnelle, 2 (1. *s.*). — GLASENAP : Astronomie descriptive, 3 (1. et 2.); Astronomie prat. 2 (1. *s.*); Cours général d'astronomie, 2 (2. *s.*). — IWANOFF : Astronomie sphérique, 3 (1. *s.*). Travaux prat. de Calculs numériques, 2 (1. *s.*). Astronomie théor., 3 (1. *s.*); Géodésie, 3 (2. *s.*); Mécanique céleste, 3 (2. *s.*); Physique du ciel. 2 (2. *s.*). — SÉRAPHIMOFF : Trigonométrie sphér., 1 (1. *s.*). Théorie des figures des corps célestes, 2 (1. *s.*); Théorie des marées, 2 (2. *s.*). TATSCHALOFF : Travaux prat. à l'Observatoire, 2 (2. *s.*).

Varsovie; *Université:* MORDOUKHAY-BOLTOVSKY : Géométrie analyt., 4 (1. *s.*), Calcul intégral, 3 (1. *s.*). — BRAYTZEW : Analyse, 2 (1. *s.*); Applications du Calcul diff. à la Géom., 2 (1. *s.*). — WELMIN : Travaux prat. : Géom. analyt., 2 (1. *s.*); Analyse, 1 (1. *s.*); Calcul intégral, 2 (1. *s.*); Application du Calcul diff. à la Géom., 1 (1. *s.*); Algèbre, 2 (1. *s.*). — GORIATSCHEW : Mécanique, 3 (1. *s.*); Exerc. 2 (1. *s.*). — TSCHERNIY : Cours général d'astronomie, 2 (1. *s.*). Astronomie sphérique, 2 (1. *s.*).

V. BOBYNIN (Moscou).

BIBLIOGRAPHIE

W. Rouse Ball. — **Récréations mathématiques et Problèmes des temps anciens et modernes.** Deuxième édition française. *Troisième partie* avec additions de MM. Margossian, Reinhart, Fitz Patrick et Aubry. — 1 vol. in-8°, 360 p.; 5 fr.; A. Hermann et Fils, Paris.

Ce troisième volume débute par trois chapitres fort intéressants et pleins de renseignements très curieux, rédigés par Rouse Ball; ils ont pour objet l'astrologie, l'hyperespace, le temps et sa mesure.

Le reste de l'ouvrage est l'œuvre de divers auteurs. M. Margossian a donné un chapitre intéressant sur l'ordonnance des nombres dans les carrés magiques. Puis vient une Note du capitaine Reinhart sur l'emploi du papier calque pour la solution graphique de problèmes de construction géométrique et deux théorèmes intéressants.

M. Fitz Patrick a rédigé la note terminale de l'ouvrage : la géométrie par le pliage et le découpage du papier.

Mais les additions les plus considérables sont dues à l'un de nos collaborateurs, M. Aubry. Empruntées à l'arithmétique, à l'algèbre et à la géométrie, elles sont de nature trop diverses pour que nous en fassions l'énumération.

Les professeurs y trouveront, comme dans l'ensemble des trois volumes, de nombreux problèmes et renseignements leur permettant de rompre de temps à autre la suite monotone du programme. Dans l'introduction du chapitre *Géométrie*, M. Aubry insiste avec raison sur le rôle utile de ces problèmes qui contribuent à stimuler l'intérêt des élèves pour les mathématiques. « On se plaint, dit-il, de l'impopularité des mathématiques : ne serait-ce pas là l'effet de cette habitude de n'écrire que pour les professionnels et les candidats aux examens, tandis qu'aucun livre n'est destiné au simple amateur, qui ne veut pas approfondir la vaste science actuelle, comme cela pouvait se faire de la science peu étendue des Grecs. Tout le monde apprend la géométrie et combien la savent ? Qu'on la rende attrayante, en l'objectivant davantage, pour ceux qui n'en veulent pas faire une étude particulière ; qu'on y joigne des récréations et des notes historiques, et elle se popularisera en devenant un passe-temps agréable, au lieu de rester un devoir rigide qu'on délaisse dès la sortie du Lycée ».

Fr. Brioschi. — **Opere matematiche,** publicate per cura del Comitato per le onoranze a Francesco Brioschi. Tomo quinto ed ultimo. — 1 vol. gr. in-4°, 556 p.; 30 L.; U. Hœpli, Milan.

C'est par ce volume que se termine la belle collection des œuvres complètes de Fr. Brioschi. Il a été publié sous la direction de MM. Fr. Gerbaldi et E. Pascal et renferme les mémoires insérés dans les recueils non italiens. Ce sont tout d'abord les Notes publiées dans les *Comptes rendus de l'Aca-*

démie des Sciences de Paris (de 1880 à 1897, année de la mort de Brioschi), puis celles que contiennent les *Nouvelles Annales* (1852 à 1869), les *Mathem. Annalen*, le *Journal für die reine u. angew. Mathematik*, etc. On sait que les travaux de Brioschi touchent aux domaines les plus divers des mathématiques pures et appliquées. Il n'est donc guère possible d'entrer ici dans le détail de cette longue liste de belles recherches qui ont apporté tant de contributions importantes à la science.

Les Mémoires ayant été groupés d'après les périodiques, les éditeurs ont placé à la fin du dernier volume une liste des travaux par ordre chronologique. Ils ont eu soin d'indiquer ceux des travaux qu'il n'y avait pas lieu de publier, soit qu'il s'agissait d'articles polémiques ou d'ouvrages déductiques. C'est ainsi qu'ils n'ont pas reproduit le traité classique sur *les déterminants*, publié en 1854.

En publiant dans un délai relativement court les œuvres du savant géomètre de Milan, le comité de publication et ses collaborateurs ont droit à toute la reconnaissance des mathématiciens. H. F.

C. Godfrey et A.-W. Siddons. — **Geometry for beginners.** — 1 vol. cart. in-16, X + 80 p., 1 *s*; Cambridge University Press.

Ce livre présente les sujets dans l'ordre où ils peuvent être enseignés aux commençants. Le plan en est exposé comme suit dans la préface.

Premier degré : Exercices pratiques d'introduction traitant des conceptions fondamentales de la géométrie, mais dont le but principal n'est pas l'usage des instruments.

Deuxième degré : Exercices amenant à la notion des principes fondamentaux de la géométrie y compris les angles en un sommet, les parallèles, les angles d'un triangle, d'un polygone et l'égalité des triangles.

Chaque fait ou groupe de faits découvert et énoncé est suivi d'exemples numériques et de problèmes théoriques destinés à les illustrer et à les rendre plus familiers.

Dans le courant de cette étude l'élève devra non seulement se familiariser avec les principes fondamentaux de la géométrie, mais encore apprendre l'usage précis des instruments et les éléments du raisonnement logique tel qu'il est employé dans la géométrie théorique pure.

Ce livre s'inspire principalement de la circulaire du « Board of Education » sur l'enseignement de la géométrie (et de l'algèbre graphique) dans les écoles secondaires. (*Circulaire* nº 711, mars 1909).

Les mêmes auteurs avaient publié en 1903, un volume « Elementary geometry », dont le plan de la partie expérimentale correspondait aux méthodes alors employées par la majorité des maîtres progressistes. Les exercices y jouent un rôle prépondérant, non seulement comme instrument pour l'introduction des notions nouvelles, mais pour eux-mêmes. De plus la géométrie théorique était introduite dès le début.

Pendant les 6 années qui se sont écoulées dès lors, l'enseignement de la géométrie a subi bien des modifications, grâce aux expériences faites, principalement en ce qui concerne la place à assigner aux exercices.

Le présent volume « *Geometry for beginners* » est conçu d'après le nouveau point de vue tel qu'il est énoncé dans la Circulaire du « Board of Education », et remplacera le commencement du 1er volume de l'« Elementary geometry ».

Ch.-Ed. Guillaume. — **Initiation à la mécanique.** (Collection des Initiations scientifiques fondée par C.-A. Laisant). — 1 vol. in-16, XIV + 209 p.; 2 fr.; Hachette & Cie, Paris.

On sait qu'il n'est pas toujours facile aux commençants de s'assimiler les principes fondamentaux de la mécanique, malgré leur apparente simplicité; les problèmes les plus élémentaires les embarrassent. Et pourtant la plupart des enfants et des jeunes gens s'intéressent aux machines et observent constamment des phénomènes mécaniques. Mais il est difficile de bien observer et de penser avec précision et bien que nous prenions de bonne heure l'habitude de nous servir des mots force, travail, puissance, masse, énergie, il est rare que nous nous rendions compte de leur valeur exacte.

Combien les lois du mouvement nous paraîtraient plus naturelles, si l'enseignement classique était précédé d'une initiation destinée à préparer l'enfant à l'étude un peu aride de la mécanique « en l'amenant, comme l'a dit si bien M. Laisant, de lui-même à la vérité, sans aucun appel direct à la mémoire ».

Le petit volume de M. Guillaume fait partie de la collection des initiations scientifiques fondée il y a quelques années par M. Laisant et sur laquelle nous avons déjà attiré l'attention des lecteurs de l'*Enseignement Mathématique*. Il est étranger à tout programme et est dédié aux amis de l'enfance.

M. Guillaume n'a pas tenu, et l'on comprend pourquoi, à suivre le plan adopté dans l'enseignement classique. Au lieu de débuter par la statique, il commence par l'étude des actions que les forces peuvent exercer, actions qu'il apprend à observer et qui permettent plus tard de nous rendre compte de ce qui se passe dans le cas des forces en équilibre. Les notions fondamentales s'introduisent naturellement; celle de force, cause des changements de vitesse, celle d'inertie, celle de travail et celle beaucoup plus délicate de masse que l'auteur définit « capacité d'absorption du travail » et qu'une expérience dynamique très simple permet de mesurer. D'autres notions apparaissent à leur tour: celles d'énergie cinétique, de puissance, d'impulsion, de quantité de mouvement. Ce n'est qu'après cette étude préparatoire que nous abordons les éléments de la statique. L'auteur nous explique comment les forces antagonistes, telles que les réactions de la matière et le frottement, viennent contrebalancer l'action des forces qui tendent à produire des mouvements. L'expérience célèbre de Stévin nous conduit au principe du parallélogramme des forces, le mouvement des roues d'une voiture à la notion de couple et l'étude expérimentale des couples au principe de la composition des forces parallèles et à la notion du centre de gravité. L'auteur nous explique ensuite ce qu'on entend par pression, notion délicate qui embarrasse souvent les débutants. Et la dynamique reparaît de nouveau, mais cette fois-ci M. Guillaume aborde l'étude de problèmes plus complexes. Des exemples très bien choisis permettent de nous rendre compte de la nature des accélérations et des forces et nous apprenons à connaître les causes de phénomènes bizarres, tels que les illusions de la verticale.

Les derniers chapitres sont consacrés aux développements et aux applications parmi lesquelles je citerai l'étude du choc et de la résistance des matériaux et quelques pages très intéressantes consacrées au mouvement des projectiles. Mais je ne saurais énumérer toutes les questions traitées par M. Guillaume. Ce qui fait peut-être l'attrait principal du livre, c'est le côté documentaire, les exemples admirablement bien choisis, qui parlent à l'ima-

gination et qui, nous en sommes sûrs, donneront aux enfants le désir de continuer et d'approfondir l'étude de ces beaux problèmes.

D. Mirimanoff (Genève).

Rodolphe Guimaraes. — **Les Mathématiques en Portugal.** Deuxième édition. — 1 vol. gr. in-8°, 659 p. — Imprimerie de l'Université, Coïmbre, 1909.

A l'occasion de l'Exposition universelle internationale, à Paris, en 1900, M. Rodolphe Guimaraes a publié un Mémoire très soigné sur la Bibliographie des Ecrits mathématiques dus aux Auteurs portugais du XIXme siècle. J'ai rendu compte, dans *L'Enseignement mathématique* (2me a., 1900, p. 488-489), de ce travail qui a été bien accueilli par le public scientifique, car, au bout de quelques années seulement, le Mémoire était épuisé. Sur la demande d'un grand nombre de mathématiciens, M. Guimaraes a consacré ses loisirs à la préparation d'une seconde édition de sa tentative, et il est parvenu à présenter, non plus un simple Mémoire, mais un Ouvrage de 659 p. gr. in-8°, qui paraît contenir les noms de tous les Ecrivains en Mathématiques dans le Portugal, avec de sobres analyses de leurs publications. Des appréciations justes et flatteuses arrivent à l'auteur de tous les points de l'Europe et sont signées de noms bien connus. Qu'il me soit permis de citer cette phrase de M. H. Fehr : « Dans votre nouveau travail, vous avez réuni de nombreux documents qui seront très utiles aux historiens des sciences et aux personnes qui ont besoin de renseignements sur les publications des mathématiciens portugais ; » ainsi que celle-ci de M. Gino Loria : « Nous adressons nos félicitations les plus sincères à M. Guimaraes pour la publication d'un Ouvrage si utile, qui lui fait grand honneur et qui lui attirera sans doute la reconnaissance de ses compatriotes. »

Le peu d'espace dont je dispose pour rendre compte de ce Livre me force, à mon vif regret, de n'en indiquer que les grandes lignes. On lira avec intérêt un *Aperçu historique* qui occupe une centaine de pages et où l'on n'est pas surpris de rencontrer le nom de M. Gomes Teixeira à la tête des mathématiciens portugais vivants. On trouve ensuite, s'étendant sur plus de 500 pages, la *Bibliographie générale mathématique portugaise* des Ecrits jusqu'à la fin de l'année 1905. Le classement est fait comme dans le *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*. Enfin, dans un *Appendice* d'une cinquantaine de pages sont cités les Ecrits parus de 1906 à la fin de 1908.

L'*Aperçu historique* contient d'intéressants détails sur les astrologues, géographes, cartographes et navigateurs des premiers temps de la monarchie portugaise ; sur Pedro Nunes, qui fut le plus célèbre mathématicien du Portugal au XVIme siècle, et qui, selon l'expression du Prof. Hammer, a trouvé dans M. Guimaraes un biographe instruit et très consciencieux. Il y eut alors une période assez longue de décadence. En 1772, la réorganisation de l'Université de Coïmbre et en 1779 la fondation de l'Académie royale des Sciences de Lisbonne donnèrent un nouvel essor à l'étude des mathématiques : nous devons remercier l'auteur des détails qu'il donne en exposant ces créations et la belle période qui les suit. Nous ne pouvons céder au désir de signaler Matheus Valente do Conto, mort en 1848, qui eut la vive satisfaction de voir ses disciples et deux de ses fils remettre en honneur l'étude des Sciences mathématiques dans le Portugal. Parmi les professeurs illustres de la seconde moitié du XIXme siècle, il convient de citer Daniel da Silva, Francesco Horta, F. Folque, Brito Limpo, T. Augusto Oom, R. R. de Souza Pinto, A. Schiappa Monteiro, C. A., Campos Rodrigues, L.-F.

Marrecas Ferreira. L'aube d'une nouvelle orientation pour les études mathématiques date de l'année 1877, où Gomes Teixeira, qui commençait déjà à se créer une individualité, a fondé le *Jornal de Sciencias mathematicas*. Grâce au concours de Motta Pegado, A. Schiappa Monteiro, L. F. Marrecas Ferreira, J.-M. Rodrigues, Martins da Silva, ce *Jornal* a puissamment contribué aux progrès des mathématiques. M. Guimaraes fait brillamment ressortir que, de nos jours, le Prof. Gomes Teixeira est le Maître et que grâce à lui le Portugal a toujours pris part aux travaux internationaux ayant pour but l'avancement des Mathématiques.

Dans la *Bibliographie* sont mentionnés les Livres, Mémoires et Articles de tous les mathématiciens portugais, avec de courtes et substantielles explications sur leur contenu.

En publiant cet Ouvrage rempli d'érudition et contenant de nombreux rapprochements des travaux faits en Portugal avec les recherches faites en Europe, M. Rodolphe Guimaraes, bien connu dans le monde savant par la publication de plusieurs Mémoires remarquables qui lui ont valu les suffrages de l'Académie royale de Lisbonne, a attiré de nouveau l'attention sur lui. Nous souhaitons à son Livre l'accueil sympathique qu'il mérite, et nous prenons plaisir à constater que M. Guimaraes a produit une œuvre qui fait à lui et à sa nation, le plus grand honneur. Ernest Lebon (Paris).

J. Jahne und H. Barbisch. — **Leitfaden der Geometrie und des geometrischen Zeichnens für Mädchenbürgerschulen.** Erste Stufe für die erste Klasse, 45 S.; Zweite Stufe für die zweite Klasse, 35 S.; Dritte Stufe für die dritte Klasse, 41 S. — 3 fasc. in-8°., cart., 90 H.; les 3 fasc., en un seul 2 K.; Manz, Vienne.

Ces manuels sont destinés aux 3 classes des écoles primaires supérieures de jeunes filles en Autriche. (*Mädchenbürgerschulen*). La géométrie y est considérée principalement au point de vue de ses applications directes, entre autres à l'ornementation.

Le 1er volume traite des lignes en général, la droite, le rayon, la droite orientée, la circonférence, l'angle, la mesure de l'angle, les droites normales et parallèles, et des différentes positions des angles par rapport les uns aux autres. La seconde partie est consacrée à l'égalité des figures; triangles, quadrilatères, polygones réguliers et irréguliers, figures symétriques, cercles.

Le 2me volume débute par la similitude des figures; triangles et polygones. L'auteur introduit ensuite avec l'équivalence, le théorème de Pythagore; premièrement pour le cas de triangles rectangles isocèles, puis à côtés commensurables entre eux et enfin de côtés quelconques, il le démontre au moyen de découpages. Viennent ensuite les périmètres des figures formées par des lignes droites, la circonférence du cercle, les aires des quadrilatères, des triangles, des polygones irréguliers et réguliers et du cercle.

Avec le 3me volume l'auteur introduit les figures dans l'espace, point, droite et plan, puis les développements et les surfaces des différents volumes, cube, parallélipipède, prisme, cylindre, pyramide, tétraèdre, octaèdre, cône, tronc de cône, sphère et enfin les volumes de ces corps.

Les divers sujets sont illustrés de problèmes variés propres à intéresser l'élève. Chacun des trois volumes est complété par un chapitre de géométrie appliquée: Reproduction de figures géométriques et de patrons. Réduction et agrandissement de figures géométriques et de patrons. Réduction et agrandissement de patrons à l'échelle. Renée Masson (Genève).

Eug. Jahnke u. Fr. Emde. — **Funktionentafeln mit Formeln und Kurven.** Mit 58 Fig. — 1 vol. relié gr. in-8°, 176 p.; 6 M.; B.-G. Teubner, Leipzig.

Ce volume fait partie d'une collection de publications mathématiques et physiques destinées aux ingénieurs et aux étudiants et dont nous avons déjà eu l'occasion de signaler le but. Il est consacré aux graphiques et aux tables numériques des principales fonctions que rencontre le praticien. Mais il sera non seulement utile à celui-ci, le mathématicien le consultera avec intérêt. Tous deux tiendront à placer ce recueil à côté de leurs tables de logarithmes et des autres tables numériques.

Il est en effet indispensable d'avoir sous la main une table contenant les formules usuelles et les valeurs numériques des fonctions transcendantes d'un usage courant et que l'on ne trouve cependant guère dans les recueils. Nous ne pouvons faire ici l'énumération des fonctions envisagées par les auteurs. Le choix a été dicté par les besoins de la pratique. On y trouve, par exemple, les racines de quelques équations transcendantes, les formules, graphiques et tables numériques concernant les fonctions hyperboliques, les fonctions gamma, les fonctions de Bessel, les fonctions elliptiques, les fonctions sphériques, etc.

Les auteurs ont eu soin d'accompagner la plupart des tables numériques de la représentation graphique de la fonction correspondante. Cela permet au lecteur d'avoir immédiatement une idée de la marche de la fonction.

W. Lietzmann. — **Stoff und Methode im mathematischen Unterricht** der norddeutschen höheren Schulen auf Grund der vorhandenen Lehrbücher. (*Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlasst durch die internationale mathematische Unterrichtskommission.* Herausgegeben von F. Klein. Band I, Heft 1.) — 1 fasc. in-8°, XII-102 p.; en vente séparément, 2 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

C'est par ce fascicule que débute la série des rapports dus à l'initiative de la Délégation allemande de la Commission internationale de l'enseignement mathématique. Les délégués pensaient tout d'abord se borner à publier les communications et les travaux concernant la Commission internationale dans la *Zeitschrift für math. u. nat. Unterricht*, et à les éditer ensuite à part sous le titre de *Berichte und Mitteilungen ;* mais, en raison du développement qu'ont pris les travaux, on s'aperçut bientôt que la place ne suffirait pas et qu'il était nécessaire de réunir les rapports d'une certaine étendue sous le titre : *Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland.*

Ce premier fascicule a pour objet *les matières et les méthodes de l'enseignement mathématique dans les établissements secondaires supérieurs de l'Allemagne du Nord, d'après les manuels.* M. Lietzmann y donne un aperçu très intéressant des caractères et des tendances des principaux manuels de l'Allemagne du Nord. Dans une *première partie*, il donne des considérations générales sur les manuels : leur but, les différents types, le livre méthodique et le livre systématique, recueil de problèmes. Il fait ensuite une statistique des manuels, dans laquelle il constate une prédominance des livres introduits depuis longtemps. Il est donc de toute importance, pour les tendances modernes de l'enseignement, que les idées nouvelles trouvent accès dans ces livres-là. Dans ses remarques générales, M. Lietzmann signale, entre autres, le fait que les auteurs des manuels sont exclusivement des maîtres des établissements secondaires supérieurs. Le nombre des profes-

seurs des Universités qui s'occupent activement de l'enseignement secondaire est très restreint; il semble cependant qu'actuellement il se fait un revirement. On pourrait souhaiter, dit M. Lietzmann, que les manuels se fassent par collaboration de plusieurs maîtres, afin d'éviter une trop grande particularisation; car ce qu'il importe de répandre, ce sont des vues générales et non pas des idées personnelles.

La *seconde partie* est consacrée aux manuels de planimétrie, de trigonométrie et de stéréométrie. L'auteur examine tout d'abord les manuels destinés à l'enseignement préparatoire de la Géométrie. Dans la plupart des écoles, on trouve, pour cet usage, un petit précis. Ces manuels sont généralement caractérisés par un passage progressif de la méthode inductive à la méthode déductive. Certains livres traitent à la fois des figures planes et de l'espace. D'autres se bornent tout d'abord au plan. Puis viennent les traités de Géométrie. L'auteur examine successivement la part qu'on y fait aux fondements de la Géométrie, au système, à la méthode déductive et à la méthode inductive, aux problèmes de géométrie, aux constructions, à la notion de mouvement. Il y a là une foule de remarques du plus grand intérêt.

Dans les degrés supérieurs, le programme de planimétrie a reçu une extension comprenant l'étude des transversales, de la division harmonique et des sections coniques. Quelques auteurs introduisent des notions de Géométrie de position. Quant à la trigonométrie, on a prévu dans bien des programmes une division en deux degrés, le premier ayant un caractère essentiellement préparatoire. Ordinairement la définition des fonctions trigonométriques n'est donnée d'abord qu'à l'aide du triangle rectangle. Certains auteurs donnent immédiatement la définition générale en partant du cercle.

La trigonométrie sphérique comprend généralement trois divisions : le triangle rectangle, le triangle quelconque et les applications. Pour les calculs, les élèves font usage des tables de logarithmes à quatre ou même à trois décimales; autrefois ils se servaient des tables à sept décimales.

En stéréométrie, on distingue deux domaines : Le premier comprend les théorèmes fondamentaux concernant le plan et la droite et ordonné généralement comme suit : perpendiculaire, oblique, droite parallèle à un plan, intersection de deux plans, trois plans ; angles solides. Le second domaine traite des corps de l'espace et spécialement de la mesure des surfaces et des volumes. Après les solides usuels, la plupart des manuels traitent le prismatoïde et quelquefois les corps de révolution d'après la règle de Guldin.

L'enseignement de la Géométrie descriptive se borne à l'étude de la perspective par rayons parallèles. Dans bien des cas aussi, on aborde la perspective centrale. Quant au dessin linéaire, il est mentionné brièvement, étant donné qu'il fera l'objet d'un rapport spécial.

Dans la *troisième partie,* M. Lietzmann donne un aperçu des ouvrages d'Arithmétique, d'Algèbre et d'Analyse. Ces trois domaines se pénètrent les uns dans les autres dans l'enseignement, mais, dans les manuels, on tend à les séparer. Pour le début, les manuels méthodiques font fréquemment usage de vérifications numériques des propriétés ; en effet, le calcul est à l'Arithmétique ce que l'intuition est à la Géométrie. La résolution des équations constitue l'un des principaux objets de l'enseignement de l'Algèbre. Aux équations du second degré, on joint souvent celles qui s'y ramènent (équations trinomes, équations réciproques). La résolution des équa-

tions du troisième degré se fait à l'aide de la formule de Cardan et de la méthode trigonométrique dans le cas irréductible. Les équations binomes sont traitées à l'aide de la formule de Moivre. Dans les degrés supérieurs, on mentionne le théorème fondamental des équations algébriques, mais sans démonstrations, et on en déduit les conséquences concernant le nombre des racines et les relations entre les coefficients et les racines.

Pour ce qui est des exercices et des problèmes d'Algèbre, il existe une grande différence entre les anciens recueils et les recueils modernes. Dans ceux-ci, le cadre dans lequel les problèmes sont placés est très différent. Les applications se rattachent principalement à des questions concernant la Géométrie, la Physique, les Sciences techniques, l'Astronomie, la Nautique, etc. La notion de fonction n'est traitée que pour le cas d'une variable. Ce n'est que depuis une dizaine d'années que l'usage de la notion de fonction et de la représentation graphique s'est introduit dans les degrés inférieurs.

Le champ de la Géométrie analytique comprend la Géométrie plane jusqu'aux sections coniques inclusivement. Autrefois on donnait, dans les écoles réales, quelques notions de la Géométrie analytique de l'espace. La matière est ordonnée généralement comme suit : Les coordonnées rectangulaires; le point; longueur d'un segment. — La droite (en coordonnées obliques). — Le cercle. — Coordonnées polaires ; transformation des coordonnés. — Paraboles. — Ellipse. — Hyperbole. — On termine ordinairement par l'équation générale des sections coniques.

Calcul infinitésimal. Il y eut une époque où, dans les établissements réaux de Prusse, le calcul différentiel et intégral était enseigné régulièrement. Plus tard, les programmes le supprimèrent, mais, depuis lors, il s'est fait un mouvement très marqué en faveur de son rétablissement. Il en est résulté l'apparition d'un grand nombre de manuels nouveaux et, peu à peu, le sujet fut également réintroduit dans les nouvelles éditions des anciens livres. Le champ comprend la dérivation des fonctions simples et quelques règles de différentiation. On introduit rarement les fonctions implicites et les dérivées partielles. On y trouve également quelques notions de calcul intégral avec application aux problèmes de rectification, de quadrature et de volume.

L'exposé se termine par la liste des ouvrages et manuels consultés. Bien que le sujet puisse paraître aride, la lecture de l'ouvrage est d'un grand intérêt, en raison de la forme sous laquelle le sujet a été présenté.

J.-P. Dumur (Genève).

G. Loria. — **Il passato ed il presente delle principali Teorie geometriche.** — Terza edizione, accresciuta di uno sguardo allo sviluppo della Geometria in quest'ultimo decennio. — 1 vol. gr. in-8°, XXIII et 475 p. ; H. Rinck, Turin.

Il s'agit ici d'une troisième édition, considérablement revue et augmentée, de l'aperçu historique dans lequel le savant professeur de Gênes passe en revue les principales théories géométriques. L'ouvrage est déjà bien connu des géomètres par les éditions italiennes ou par sa traduction allemande. Par cette nouvelle édition, il continuera à servir de guide dans les recherches historiques dans le domaine de la Géométrie.

Les matières ont été groupées comme suit : Les origines et le développement de la Géométrie jusqu'en 1850. — Théorie des courbes algébriques

planes. — Théorie des surfaces algébriques. — Théorie des courbes algébriques gauches. — Géométrie infinitésimale. — Forme des courbes et des surfaces. Analysis situs. — Géométrie de la droite dans l'espace. — Correspondance, transformation. — Géomètrie numérative. — Géométrie noneuclidienne. — Géométrie dans l'espace à 4 dimensions.

Cette édition est augmentée d'un *Appendice* de plus de 120 pages, dans lequel l'auteur expose le développement de ces théories géométriques au cours des dix dernières années.

W.-Franz Meyer. — **Allgemeine Formen und Invariantentheorie**. Erster Band : Binäre Formen (*Sammlung Schubert* XXXIII). — 1 vol. cart. in-16°, 376 p.; G. M. 60; G.-J. Göschen, Leipzig.

M. W.-Fr. Meyer a déjà consacré plusieurs études d'ensemble à la dérivée des formes algébriques et des invariants. L'une fait partie de la remarquable collection de rapports publiés par l'Association des mathématiciens allemands (*Jahresbericht* der D. M. V. 1892; édition française 1897; édition italienne 1899). L'autre exposé se trouve dans l'*Encyclopédie des sciences mathématiques*.

Cette nouvelle étude poursuit un but différent. Elle est destinée à initier le lecteur aux principes essentiels de la théorie des invariants en tenant compte des différentes branches mathématiques dans lesquelles ils interviennent. Malgré le rôle important que joue la théorie des invariants, son étude n'a pas encore dans l'enseignement la place qu'elle mérite. Le livre de M. Meyer est donc appelé à rendre de grands services aux étudiants.

Ce premier volume est consacré aux *formes binaires*. Dans la *première partie* l'auteur initie le lecteur aux principes fondamentaux de la théorie en se bornant aux formes binaires quadratiques et aux formes bilinéaires. Il insiste comme il convient sur les applications géométriques.

La *seconde partie* a pour objet l'étude des équations différentielles des formations invariantes d'une forme binaire.

Dans le second volume, en préparation, l'auteur étendra cette étude aux formes ternaires et d'ordre supérieur.

Vte de Salvert. — **Mémoire sur l'attraction du parallélépipède ellipsoïdal**. Ier fascicule. — 1 vol in-8° de XII-430 p., 7 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

L'auteur désigne par ce nom de *Parallélépipède ellipsoïdal* le solide à six faces courbes délimité par trois couples de surfaces homofocales du second ordre appartenant tous les trois à un même système ellipsoïdal, mais chacun d'un genre différent, c'est-à-dire alors composés, respectivement, d'hyperboloïdes à deux nappes pour le premier, d'hyperboloïdes à une nappe pour le second, et d'ellipsoïdes quant au troisième. Il se borne d'ailleurs à traiter l'hypothèse du point attiré situé dans l'un des trois plans principaux du système ellipsoïdal mentionné tout à l'heure.

Ce problème qui, même ainsi réduit, serait encore absolument rebelle, non seulement pour l'exécution des calculs d'intégration, mais même quant à la seule écriture explicite des résultats, avec tous les différents systèmes de coordonnées précédemment connus, devient au contraire abordable sans que les calculs en soient jamais trop pénibles, et l'écriture en devient possible et relativement facile, en employant le système des coordonnées de Lamé, modifié par l'auteur, sous la forme où il l'a présenté dans le Chapi-

tre VI et dernier de son précédent Ouvrage intitulé *Théorie nouvelle du système orthogonal triplement isotherme ;* et cela parce que ce système offre le très grand avantage, tout en n'utilisant dans ses formules, pour l'écriture des transcendantes, que les types classiques d'Abel et de Jacobi, de permettre à chaque instant néanmoins l'emploi de la permutation circulaire.

D'ailleurs, le corps proposé se réduisant, comme dernière limite, à la masse d'un ellipsoïde entier homogène, lorsqu'on donne à la variation de chacune des deux premières coordonnées toute l'extension dont elle est susceptible, en attribuant en même temps à la dernière deux valeurs égales et de signes contraires, l'auteur prend soin de montrer, à titre de vérification, que ses propres résultats, envisagés pour les mêmes limites des coordonnées, concordent bien exactement avec les formules classiques de l'attraction des ellipsoïdes.

F. Gomes Teixeira. — **Obras sobre Mathematica** publicadas por ordem do Governo portuguez. Vol. V : *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches*, tome II. — 1 vol. gr. in-4°, 497 p. ; Imprimerie de l'Université, Coïmbre.

L'*Ens. Math.* a déjà signalé le premier volume de ce Traité des courbes spéciales planes et gauches, couronné par l'Académie des Sciences de Madrid et dont le texte français, revu et bien augmenté, paraît maintenant dans les *Obras* du distingué directeur de l'Académie polytechnique de Porto. Ce second volume se rapporte surtout aux courbes transcendantes planes et aux courbes gauches : courbes transcendantes remarquables ; spirales ; paraboles et hyperboles générales, spirales correspondantes ; les courbes cycloïdales ; sur les diverses classes de courbes ; sur les cycliques sphériques ; sur quelques courbes sphériques ; sur les hélices ; sur les courbes algébriques gauches ; sur diverses classes de courbes gauches ; la polhodie et l'herpolhodie. Pour chacune de ces familles de courbes, l'auteur présente l'histoire, les propriétés les plus importantes et les principaux problèmes dans lesquels elles interviennent.

L'ouvrage se termine par une table alphabétique des courbes, au nombre de plus de 250, étudiées dans les deux volumes.

On sait le rôle important que jouent la plupart de ces courbes en mathématiques et en mécanique ; aussi croyons-nous que cette remarquable monographie, qui représente un travail considérable, sera très consultée et très appréciée des professeurs. H. F.

G. Veronese. — **Elementi di Geometria intuitiva,** à l'usage des écoles techniques, publié avec la collaboration de P. Gazzaniga.

Elementi di Geométria, à l'usage des gymnases, des lycées et des instituts techniques ; Ire partie. 4me édition — 1 vol. 134 p. ; Drucker, Padoue.

L'idée première qui a dicté ces éléments au savant auteur a été le désir de répandre dans l'enseignement officiel les conceptions et les méthodes contenues dans ses publications sur les « *Fondamenti di Geometria* » adaptant la matière soit aux programmes ministériels soit au but que se propose l'enseignement dans les écoles moyennes. Le premier de ces volumes sert aussi de préparation au deuxième, la géométrie rationnelle.

La méthode suivie par l'auteur ne demande pas à l'écolier, comme c'est ordinairement le cas, de suivre passivement un raisonnement, mais elle

l'oblige à une collaboration active en lui demandant de faire des comparaisons et des vérifications continuelles, soit avec les objets soit avec les figures qu'il rencontre. Par ce moyen l'écolier voit l'utilité pratique de ce qu'il a appris et il éprouve aussi le besoin de savoir; après avoir vérifié qu'une propriété d'une figure donnée est exacte, il se demande pourquoi il en est ainsi. Pour ne pas laisser inassouvie cette curiosité naturelle, l'auteur donne parfois, à côté de la vérification des propositions une démonstration simple, basée sur le raisonnement, et il en profite pour comparer dans les années suivantes les deux méthodes, la méthode expérimentale et la méthode rationnelle.

Les principaux caractères du livre peuvent se résumer rapidement : chaque proposition y est énoncée seulement pour les figures qui correspondent à des objets qu'on peut directement observer : c'est pour cela qu'on n'y parle ni de droites, ni de plans, ni d'espace illimité, et en ceci particulièrement ce livre diffère des livres analogues qui, sans aucune justification, étendent toutes les notions des objets qu'on peut observer directement, à la droite, au plan, à l'espace illimité, que personne ne peut ni ne pourra jamais observer. Chaque proposition y est assujettie à des constatations ou à une vérification expérimentale, demandant le secours d'instruments d'un usage commun, comme la règle graduée, l'équerre, etc.; — on n'y énonce pas des propositions sous une forme logiquement déterminée, mais on recourt à l'image des figures pour leur donner les noms opportuns, pour en relever les propriétés les plus évidentes. On voit que l'auteur vise toujours à ce que ce livre serve plus particulièrement de préparation à l'étude de la géométrie rationnelle et que pour cela, il fait en sorte que quand l'écolier commencera l'étude de celle-ci, il ne se trouve jamais en contradiction, même apparente, avec les conceptions, les définitions ou les règles qu'il a apprises.

Le deuxième volume en est déjà à sa quatrième édition et cela montre clairement avec quelle sympathie il a été accueilli dans les écoles. La géométrie intuitive faisait pressentir, comme je l'ai déjà dit, la possibilité d'une autre méthode, la méthode rationnelle, méthode faite d'observation intuitive et de raisonnement où, partant de la plus petite série d'observations intuitives et de propriétés des figures matérielles, on donne sous forme de postulats les propriétés mêmes des figures géométriques comme des données fondamentales. On en déduit ensuite par le raisonnement seulement, et comme conséquence logique des premières, toutes les autres propriétés, sans le secours d'aucune vérification pratique, et avec la condition que, faisant abstraction de l'intuition, base nécessaire pour établir la signification des conceptions abstraites et pour énoncer les postulats, il reste un ensemble bien ordonné de propositions logiquement déterminées et ordonnées, indépendantes de la signification géométrique fournie par l'intuition.

L'un et l'autre de ces deux volumes sont enrichis d'une large série d'exercices très bien imaginés et propres à faire ressortir et à rappeler les propriétés apprises. C. Alasia (Brindisi).

A. Wangerin. — **Théorie des Potentials und der Kugelfunktionen** (*Sammlung Schubert LVIII*). 1. Teil. — 1 vol. rel. VIII + 255 p.; M. 6.60; Göschen, Leipzig.

L'Ouvrage de M. Wangerin fait partie de la collection Schubert, bien connue des lecteurs de l'*Ens. Math.* Le premier volume, seul paru, est consacré à cette belle théorie du potentiel qui a donné lieu à tant d'admirables tra-

vaux et à laquelle se rattachent les importantes recherches de ces dernières années sur le principe de Dirichlet et l'électrodynamique nouvelle. Déjà M. Grimsehl en a donné des applications intéressantes dans le numéro 38 de la même collection, mais il n'entrait pas dans le plan de son ouvrage d'exposer la théorie mathématique du potentiel. Ici, au contraire, cette théorie est le but principal visé par l'auteur et les exemples ne servent qu'à mettre en lumière des résultats abstraits parfois difficiles à démontrer.

Dans les premiers chapitres du livre, M. Wangerin établit les propriétés caractéristiques du potentiel et des composantes de l'attraction newtonienne dans le cas où le point attiré est extérieur aux masses attirantes. Pour faciliter cette étude, l'auteur commence par traiter quelques exemples simples où l'attraction s'obtient par le calcul direct des intégrales fondamentales. L'auteur passe ensuite à l'étude beaucoup plus difficile du potentiel et de ses dérivées des deux premiers ordres dans le cas où le point attiré est situé au sein des masses attirantes. Que deviennent alors les intégrales fondamentales ? M. Wangerin explique comment les définitions primitives doivent être modifiées pour que ces intégrales aient un sens. Dans le cas d'un volume attirant les propriétés classiques du potentiel sont établies en partant des formules connues de Gauss et ce sont les variations du laplacien qui fournissent les sauts brusques des dérivées secondes lorsque le point attiré franchit la surface du volume attirant. Le cas d'une surface attirante se traite à l'aide des mêmes formules et l'auteur en déduit sans peine les propriétés caractéristiques des composantes de l'attraction dans le voisinage de la surface. Il s'arrête moins longuement sur le cas d'une ligne attirante, et après avoir résumé les propriétés fondamentales du potentiel relatives aux cas considérés il montre que ces propriétés sont caractéristiques du potentiel newtonien. Tels sont les points principaux traités dans la première partie du livre de M. Wangerin.

Dans la seconde, l'auteur passe à l'étude de l'attraction obéissant à des lois différentes de celle de Newton. Cette étude conduit à des rapprochements curieux, qui permettent de nous rendre mieux compte de la valeur relative des propriétés établies dans la première partie du livre. Nous passons ensuite à la théorie du potentiel logarithmique qui, dans le plan, joue un rôle analogue à celui du potentiel newtonien dans l'espace à trois dimensions. Un long chapitre est consacré au potentiel de doubles couches. Pour établir les propriétés caractéristiques de ce potentiel, M. Wangerin s'appuie sur la formule célèbre de Stokes, dont il donne une démonstration intuitive, et sur les propriétés déjà connues du potentiel de simple couche.

Enfin, la troisième et dernière partie du livre est consacrée à l'attraction des ellipsoïdes homogènes. Dans le cas où le point attiré est intérieur à la masse attirante, les composantes de l'attraction s'obtiennent directement en transformant convenablement les intégrales fondamentales, mais le cas plus difficile d'un point extérieur à l'ellipsoïde est traité à l'aide du théorème connu d'Ivory, qui permet de ramener le second problème au premier. Parmi les conséquences très curieuses indiquées par M. Wangerin, je signalerai le théorème de Mac-Laurin sur l'attraction de deux ellipsoïdes homofocaux, et l'étude de l'attraction d'une couche infiniment mince comprise entre deux ellipsoïdes semblables. Dans le dernier chapitre du livre, M. Wangerin applique les résultats obtenus à l'étude des figures d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation.

L'excellent ouvrage de M. Wangerin n'est pas destiné aux spécialistes, bien que des spécialistes puissent trouver du profit à lire un livre où se trouvent résumés, sous un aspect nouveau, des résultats connus. Mais il rendra surtout de réels services aux étudiants et aux débutants et leur donnera le goût de ces études et le désir de les approfondir. Du reste, M. Wangerin renvoie lui-même aux sources originales toutes les fois qu'il se contente d'indiquer un résultat sans le démontrer.

Il est à regretter que l'auteur de la « Théorie des Potentiels » n'ait pas songé à se servir, dans la théorie des champs newtoniens, de quelques-unes des notations si commodes de l'analyse vectorielle. Il y aurait cependant un avantage réel à introduire dans l'étude de ces champs les notions de « curl », de « gradient », de « divergence cubique » et de « divergence de surface », comme le fait, par exemple, M. Abraham, dans son excellent traité « Theorie der Elektrizität ».

D. Mirimanoff (Genève).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Publications périodiques :

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Direttore G.-B. Guccia : Tome XXVII, 1er semestre, 1909.

U. Sbrana : Sulle varietà ad $n - 1$ dimensioni deformabili nello spazio euclideo ad n dimensioni. — E. Landau : Neue Beiträge zur analytischen Zahlentheorie. — D. Hilbert : Wesen und Ziele einer Analysis der unendlichvielen unabhängigen Variabeln. — W. von Dyck : Die Encyklopädie der mathematischen Wissenchaften. — W. Schnee : Ueber Dirichlet'sche Reihen. — A. Kneser : Integralgleichungen und Darstellung willkürlicher Funktionen von zwei Variabeln. — G. Scorza : Sulle varietà a quattro dimensioni di s_r $(r \geqq 9)$ i cui s_4 tangenti si tagliano a due a due. — E. Borel : Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. — G. Remoundos : Sur la réductibilité des équations algébriques par des substitutions linéaires. — Brusotti : Ricerche sui fasci di quadriche nello spazio ordinario. — Poincaré : Sur la réduction des intégrales abéliennes et les fonctions fuchsiennes. — H. Dulac : Intégrales passant par un point singulier d'une équation différentielle. — H. Weyl : Ueber beschränkte quadratische Formen, deren Differenz vollstetig ist. — J. Lüroth : Bemerkungen über die Auflösung der trinomischen Gleichungen.

Tome XXVIII, 2e semestre, 1909. — M. Abraham : Zur Elektrodynamik bewegter Körper. — O. Nicoletti : Sulla caratteristica delle matrici di Sylvester e di Bezout. (Da una lettera al Prof. Alfredo Capelli). — F. Severi : Fondamenti per la Geometria sulle varietà algebriche. — O. Tœplitz : Ueber die Auflösung unendlichvieler linearer Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten. — G. Pucciano : Contributo alla critica di alcune questioni che si riattaccano all'integrazione dell'equazione differenziale di Laplace. —

E. Landau : Ueber das Konvergenzproblem der Dirichlet'schen Reihen. — M. de Franchis : Sull'invariante ρ_0 di una classe di superficie. — A. Sellerio : Le curve limiti di poligonali che si deformano con legge assegnata. — U. S. Hanna : The equations of Bitangential Curves of the General Plane Quintic and Sextic Curves. — G. Tzitzeica : Sur une nouvelle classe de surfaces (2me partie). — E. Ciani : Le quartiche piane projettive a sè stesse. — G. Remoundos : Sur la réductibilité des équations algébriques et les nombres exponentiels. — G. Bagnera : Una nuova dimostrazione di un teorema del sig. Borel. — U. Broggi : Il teorema della probabilità composta e la definizione descrittiva di probabilita. — P. Bucca : Il problema delle forme per il gruppo G_{168} e la risolvente di 7° grado per questo problema. — H. von Koch : Sur la convergence des déterminants infinis. — L. Lichtenstein : Zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen und der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die Lösungen als Funktionen der Randwerte und der Parameter. — U. Cisoti : Sul moto di un solido in canale. — G. Marletta : Sui complessi di rette del primo ordine dello spazio a quattro dimensioni. — G. Scorza : Sopra una certa classe di varietà razionali. — G. Fejér : Eine stetige Funktion deren Fourier'sche Reihe divergiert.

Zeitschrift für das Realschulwesen, herausgegeben von Em. Czuber, Ad. Bechtel und Mor. Glöser. — XXXIV Jahrg. 1909 ; Alfr. Hölder, Wien.

Nos 4 à 12. — H. Seidler : Bipolare Koordinaten. — G. v. Sensel : Die Elektronentheorie im Physikunterricht der Mittelschule. — H. Rothe : Ueber Systeme monofokaler Kegelschnitte. — E. Vogel : Die Grundsätze der stereographischen Projection. — A. Grünwald : Der formbestimmte Schnitt eines dreiseitigen Prismas. — Vereinfachtes Quadrieren.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von Dr. H. Schotten. — B. G. Teubner, Leipzig.

Jahrgang 40 (1909), n° 6-12. — A. Flechsenhaar : Die Gleichung $x^n + y^n - z^n \equiv 0$ (n^2). — Chr. Schmehl : Das Bilden von Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene, in denen möglichst rationale Zahlen vorkommen. — K. Krüse : Diskussion und Anwendungen der allgemeinen Kegelschnittsgleichung. — Friedrich Haacke : Die Körperberechnung als Einleitung in die Integralrechnung. — K. Hagge : Zur Berechnung des Sehnenvierecks. — M. Milankovitch : Eine graphische Darstellung der geometrischen Progressionen. — P. Werkmeister : Herleitung des Taylorschen Satzes mit Hilfe der Figur. — L. Hänert : Ueber Fußpunktpolygone. — A. Witting : Zur Konstruktion der Parabel. — Kurt Liewald : Die Anschaulichkeit im geometrischen Anfangsunterricht. — J.-Ph. Weinmeister : Das Achsenproblem des Kegels zweiter Ordnung. — Oscar Janzen : Die komplexen Zahlen im Unterricht der höheren Lehranstalten. — K. Hagge : Beiträge zur Geometrographie. — W. Meinecke : Bildort bei einfacher Brechung. — Ernst Eckhardt : Der Satz des Ptolemäus im beliebigen Viereck. Zum Aufgaben-Repertorium. — Pädagogische Zeitung. — Literarische Berichte.

Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben von R. Mehmke u. C. Runge. 57, Band, 1909. — B. G. Teubner, Leipzig.

A. Daunderer : Ueber die Beziehung zwischen Dichte und Mittelpunktspotential im Innern eines würfelförmigen, von elektrisch leitenden Wänden

begrenzten Raumes. — P. Ernst : Bemerkungen zu Petzvals Theorie der Tonsysteme. — R. Greiner : Ueber das Fehlersysteme der Kollektivmasslehre. — H. Liebmann : Bemerkung zu dem Aufsatz des Herrn Tolle « Zur Keplerschen Bewegung ». — R. v. Mises . Theorie der Wasserräder. — E. Stubler : 1. Rollbewegung einer homogenen schweren Kugel auf einer Zylinderfläche. — 2. Das Fräsen von Schraubengewinden. — Johs. Thieme : Beitrag zur graphischen Behandlung der statisch unbestimmten Systeme. — P. Werkmeister : Beitrag zur graphischen Darstellung von Gleichungen der Form $ab - c = 0$ (Multiplikations — *bzw.* Divisionstafeln). — Fr. A. Villers : Ueber die Steighöhe von Drachen. — J. Bojko : 1. Eine neue Tafel der Viertelquadrate. — 2. Eine neue Näherungskonstruktion für π. — 3. Beitrag zum Ausziehen höherer Wurzeln. — M. Einhorn : Eine Konstruktion für den Schwerpunkt eines beliebigen Vierecks. — E. Wolffing : Abhandlungsregister 1907-1908.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von K. Hensel. — Georg Reimer, Berlin.

Band 136. — S. Gundelfinger : Ueber die Kennzeichen, welche die Lage eines Punktes in bezug auf ein Tetraeder unter Zugrundelegung allgemeiner projektiver Koordinaten entscheiden. — O Perron : Ueber einen Satz des Herrn Poincaré. — E. Busche : Zur Theorie der Funktion [x]. — G. Remoundos : Sur la tendance des systèmes matériels à échapper au frottement. — G. Voronoï : Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques ; second mémoire, recherches sur les paralleloèdres primitifs. — K. Hensel : Ueber die su einer algebraischen Gleichung gehörigen Auflösungskörper. — E. Hellinher : Neu Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlichvielen Veränderlichen. — A. Hurwitz : Ueber die Kongruenz $ax^e + by^e + cz^e \equiv 0 \pmod{p}$. — A. Wieferich : Zum letzten Fermatschen Theorem. — Zur Dreiecksgeometrie. — L.-W. Thomé : Ueber simultane lineare Differentialgleichungen.

Band 137. — L. Fejer : Beispiele stetiger Funktionen mit divergenter Fourierreihe. -- O. Perron : Ueber die Poincarésche lineare Differenzengleichung. — R. Weitzenbock : Zum System eines linearen Komplexes und einer Fläche 2. Ordnung. — A. Meder : Analytische Untersuchung singulärer Punkte von Raumkurven. — R. Nauendorff : Zur Theorie der Kreispunktpolarkurven. — E. Steinitz : Algebraische Theorie der Körper. — H.-W.-E. Jung : Ueber den kleinsten Kreis, der eine ebene Figur einschliesst. — G. Frobenius : Ueber den Fermat'schen Satz.

Nouvelles Annales de Mathématiques, dirigées par C.-A. Laisant, C. Bourlet et R. Bricard, 4me série. — Gauthier-Villars, Paris.

Tome IX, juillet-décembre 1909. — G. Fontené : Sur certaines quadratures. — Emile Turrière : Sur les surfaces de Monge et sur la composition de calcul différentiel et intégral du concours d'agrégation (1908). — L. Godeaux : Sur un complexe bilinéaire de coniques, — A. Myller · Sur le mouvement d'une chaîne pesante sur une courbe fixe. — A. Buhl : Sur les surfaces dont les lignes asymptotiques se déterminent par quadratures. — L. Zoretti : Sur la résolution des équations numériques — Philbert du Plessis : Concours d'admission à l'Ecole Polytechnique en 1909. Composition de géométrie analytique et mécanique. — Jean Servais : Concours d'admission à l'Ecole Polytechnique en 1909. Composition d'algèbre et trigonomé-

trie. — L. Zoretti : Les questions de sens en Géométrie. — E. Turrière : Sur les trajectoires orthogonales de certaines surfaces et sur les intégrales homogènes de l'équation de Laplace. — B. Hostinksy : Sur un théorème analogue au théorème de Meusnier. — J. Servais : Concours d'admission à l'Ecole Normale supérieure et aux Bourses de Licence en 1909. — E. Turrière : Une application géométrique de la série considérée par Airy dans la diffraction des ouvertures circulaires. — R. Alezais : Sur la transformation de l'équation du troisième degré en elle-même. — L.-A. Paillard : Sur la longueur de la circonférence. — Concours d'agrégation des Sciences mathématiques en 1909 (Mathématiques élémentaires). Solution par *un Anonyme*. — Ch. Méray : Sur les lignes brisées et les aires polygonales dans le plan, à propos de la décomposition d'un polygone en triangles. — L. Desaint : Théorèmes sur les limites. — M.-F. Egan : Note sur les quadriques circonscrites à deux sphères. — Ch. Méray : Sur les lignes brisées et les aires polygonales dans le plan, à propos de la division du polygone en triangles *(suite)*. — G. Fontené : Contribution à la théorie du tétraèdre. — Agrégation des Sciences mathématiques (Concours de 1909). — Certificats d'Astronomie, d'Analyse supérieure et de calcul diff. et intégral. — Solutions de questions proposées.

Annali di Matematica. Directeurs : L. Bianchi, U. Dini, G. Jung, C. Segre. Série III, t. XVI. — Rebeschini di Turati e C., Milan.

Nos 3 et 4. — E. E. Levi : Caratteristiche multiple e Problema di Cauchy. — Sibirani : Sulla rappresentazione approssimata delle funzioni. — Ciani : Una interpretazione geometrica del gruppo totale di sostituzioni sopra sei elementi. — Scorza : Le superficie a curve sezioni di genere 3.

Archiv der Mathematik und Physik, herausgegeben von E. Lampe, W. Meyer, E. Jahnke, 15. Band. — B. G. Teubner, Leipzig und Berlin.

P. Ernst : Die Clairautschen Multiplikatrixkurven. — S. Gundelfinger : Ueber eine spezielle Gattung gruppentheoretischer Probleme. — E. Hoppe : Das Sexagesimalsystem und die Kreisteilung. — K. Kommerell : Oskulierende und hyperoskulierende Flächen zweiter Ordnung in einem Flächenpunkt. — Y. Mikami : A remark on the Chinese Mathematics in Cantor's Geschichte der Mathematik. — A. G. Miller : Groups formed by prime residues with respect to modular systems. — M. Remak : Elementare Verallgemeinerung einer bekannten Eigenschaft der Zahl 30. — L. Saalschutz : Elementare Konvergenzkriterien. — C. Schmidt : Ueber die obere Grenze für die Anzahl der positiven und negativen Wurzeln einer algebraischen Gleichung. — A. Schreiber : Differentialformeln beim Pothenotschen Problem und Bedingungsgleichungen für Rückwärtsschnitte. — J. Schumacher : Ueber Resolventen. J. Valyi : Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. — G. Vivanti : Ueber den gegenwärtigen Stand der Theorie der ganzen transzendenten Funktionen. — G. Wallenberg : Ueber die Vertauschbarkeit homogener linearer Differenzenausdrücke. — H. Weber : Ueber die Definition des Doppelintegrals. — W. Weber : Anwendungen des Pohlkeschen Satzes. — M. Winkelmann : Untersuchungen über die Variation der Konstanten in der Mechanik.

Atti della Reale Accademia dei Lincei. Anno CCCVI. Rendiconti. — Rome. Septembre à décembre 1909. — E. Bertini : 1. Sopra la teoria dei moduli

di forme algebriche. — 2. Sopra una formula generale nel calcolo delle estensioni. — G. Graziani : 1. Sulla formula integrale di Fourier. — 2. Funzioni rappresentabili con la formula integrale di Fourier. — G. Lauricella : 1. Sull'integrazione dell'equazione $\Delta^{ri} U = 0$ per le aree piane. — 2. Sull equazione integrale di 1ª specie. — L. Orlando. Nuove osservazioni sulla formula integrale di Fourier. — E. Pascal : 1. Osservazione su di una proprietà degli integrali di una classe di equazioni differenziali. — 2. L'integratore meccanico per le equazioni differenziali lineari di 1º ordine e per altre equazioni differenziali. — S. Pincherle : Sopra certe equazioni integrali. — F. Sibirani : Su l'integrazioni di alcune equazioni alle derivate parziali mediante funzioni di Bessel. — L. Tonelli : Sull' integrazione per parti. — E. Almansi : Azione esercitata da una massa liquida in moto sopra un corpo fisso. — P. Burgatti : Sulla forma più generale delle equazioni della dinamica. — U. Crudeli : Metodo diretto per risolvere, dati gli spotamenti in superficie, il problema dell'equilibrio dei corpi elastici omogenei ed isotropi. — L. S. Darios : Sul moto dei filetti vorticosi di forma qualunque. — N. Kryloff : Sur le problème des vibrations transversales des verges élastiques. — L. Somigliana : Sopra una estensione della teoria dell'elasticità. — V. Volterra : 1. Sulle equazioni integro-differenziali della teoria dell'elasticità. — 2. Equazioni integro-differenziali della elasticità nel caso dell' isotropia.

Bulletin of the American mathematical Society. — New-York. Vol. XVI. Année 1909-1910.

Fasc. 1 et 2. — Morehead and Western : Note on Fermat's Numbers. — J.-E. Wright : An Extension of Certain Integrability Conditions. — C.-A. Nolle : Necessary Conditions that Three or More Partial Differential Equations of the Second Order shall have Common Solutions. — R.-G.-D. Richardson and W.-A. Hurwitz : Note on Determinants whose Terms are certain Integrals. — W.-H. Bussey : On the Tactical Problem of Steiner. — A.-S. Chessin : On the So-Called Gyrostatic Effect. — A.-C. Lunn : A Continuous Group Related to Von Seidel's Optical Theory. — G.-A. Miller : The Groups which may be Generated by Two Operators s_1, s_2 Satisfying the Equation $(s_1 s_2)^{\alpha} = (s_2 s_1)^{\beta}$, α and β being Relatively Prime. — E.-W. Davis : A note on Imaginary Intersections. — G.-A. Vacca : Maurolycus, the First Discoverer of the Principle of Mathematical Induction.

Fasc. 3 à 5. — H. Onnen : Gergonne's Pile Problem. — G.-C. Evans : The integral Equation of the Second Kind, of Volterra, with Singular Kernel. — G.-A. Miller : Note on the Groups Generated by Two Operators Whose Squares are Invariant. — I.-S. Dederick : The Solution of the Equation in Two Real Variables at a Point Where Both Partial Derivatives Vanish. — W.-H. Bussey : Tables of Galois Fields of Order Less than 1,000. — R.-D. Carmichel : Note on a New Number Theory Function. — Notes. — New Publications.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris.

Second semestre 1909 (fin). — 29 novembre 1909. — Jean Merlin : Sur les équations algébriques. — M et Mme Paul Dienes : Sur les singularités algébrico-logarithmiques. — Frédéric Riesz : Sur les opérations fonctionnelles linéaires. — L. Lichtenstein : Sur la détermination des intégrales d'une équation du second ordre pour leurs valeurs le long d'un contour fermé dans le cas des pointes.

6 décembre 1909. — H. Poincaré : Sur les courbes tracées sur les surfaces algébriques. — E. Fabry : Ordre d'une série de Taylor. — Galbrun : Sur la représentation d'une solution des équations avec différences finies pour les grandes valeurs de la variable. — A. Denjoy : Sur les ensembles parfaits discontinus. — D. Pompeiu : Sur les singularités discontinues des fonctions analytiques uniformes. — C Guichard : Sur les surfaces telles que les tangentes à une série de lignes de courbure touchent une quadrique. — J. Haag : Familles de Lamé composées d'hélicoïdes. — R. Garnier : Sur les surfaces du quatrième ordre qui admettent un groupe infini discontinu de transformations birationnelles. — L. Remy : Sur les transformations birationnelles des surfaces du quatrième ordre à points doubles isolés. — Ravigneaux : Généralisation de la formule de Willis sur les trains épicycloïdaux.

27 décembre 1909. — J. Haag : Sur les familles de Lamé composées des surfaces admettant un plan de symétrie variable. — E. Picard : Sur une classe de développements en séries des fonctions fondamentales se rattachant à certaines équations fonctionnelles. — D. Pompeiu : Sur la représentation des fonctions analytiques par des intégrales définies. — Ch. Reignier : Sur le calcul des volants de laminoirs. — L. Lecornu : Sur le volant des moteurs d'aviation. — E. Jouguet : Sur la vitesse des ondes de choc et combustion.

Premier semestre 1910. — 3 janvier. — A. Demoulin : Sur la transformation de Ribaucour. — G. Tsitzeiga : Un problème sur les systèmes triples orthogonaux. — A. Denjoy : Sur les fonctions analytiques uniformes à singularités discontinues non isolées.

10 janvier. — C. Russyan : Un théorème de M. W. Stekloff (théorème généralisé de Jacobi) et les formules généralisées de la transformation de contact. — H. Lebesgue : Sur l'intégrale de Stieljes et sur les opérations fonctionnelles linéaires. — J. Le Roux : Sur les formes quadratiques définies à une infinité de variables. — E. Jouguet : Impossibilité de certaines ondes de choc et combustion. — C. Guichard : Sur les surfaces à courbure totale constante qui correspondent à des systèmes singuliers d'ordre quelconque.

17 janvier. — A. Demoulin : Sur les systèmes et les congruences K. — U. Cisotti : Sur une application de la méthode de Jacobi. — Ludovic Zoretti : Sur les ensembles de points.

24 janvier. — J. Le Roux : Sur les conditions de maximum ou de minimum d'une fonction analytique d'une infinité de variables. — Galbrun : Sur la représentation des solutions d'une équation aux différences finies, linéaire pour les grandes valeurs de la variable. — D. Mirimanoff : Sur le dernier théorème de Fermat.

7 février. — A. Demoulin : Sur les systèmes et les congruences. — K.-Johannes Mollerup : Une remarque sur les équations intégrales de première espèce. — N. Kryloff : Sur les développements procédant suivant les polynômes hypergéométriques. — M. Plancherel : Sur la représentation d'une fonction arbitraire par une intégrale définie. — R. Birkeland : Sur des intégrales irrégulières des équations différentielles linéaires,

14 février. — E. Borel : Sur la définition de l'intégrale définie. — J. Le Roux : Les formes quadratiques positives et le principe de Dirichlet. — F. Boulad : Sur la disjonction des variables des équations nomographiquement rationnelles d'ordre supérieur. — C Bourlet : Sur la résistance de l'air.

21 février. — G. Humbert : Sur les minima des classes de formes quadratiques binaires et positives. — W. Stekloff : Sur un théorème général d'existence des fonctions fondamentales correspondant à une équation différentielle linéaire de second ordre. — D. Pompeiu : Sur les singularités des fonctions analytiques uniformes. — J. Chazy : Sur les équations différentielles dont l'intégrale générale possède une coupure essentiellement mobile. — G. Cotty : Sur la transformation des fonctions abéliennes. — G. Darboux : Rapport sur le mémoire de M. Gabriel Kœnigs sur « les courbes conjuguées dans le mouvement relatif le plus général de deux corps solides ». — M. Brillouin : Les fonctions données par leur valeur sur une partie de la frontière, et celle de leur dérivée normale sur le reste de la frontière. Développements correspondants.

28 février. — E Picard : Un théorème général sur certaines équations intégrales de troisième espèce. — E. Borel : Sur une condition générale d'intégrabilité. — E. Cotton : Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles. — J. Marty : Sur une équation intégrale. — L. Fejer : Sur une paire de séries de Fourier conjuguées. — J. Boussinesq : Sur la manière dont le potentiel des vitesses, dans le problème des ondes par émersion, dépend de l'état initial.

Monatshefte für Mathematik und Physik, herausgegeben von G. v. Escherich, F. Mertens u. W. Wirtinger. — Eisenstein & C°, Wien.

XXI. Jahrgang (1910) ; 1., 2. Vierteljahr. — W. Blaschke : Untersuchungen über die Geometrie der Speere in der Euklidischen Ebene. — M. Schleser : Asymptotische Gesetze im kubischen Kreisteilungskörper. — R. Weitzenböck : Zum System von drei Strahlenkomplexen im vierdimensionalen Raum. — W. H. Young : On parametric integration. — E. Muller : Ueber die Hüllflächen von Flächenscharen, die durch krumme Schiebung erzeugt werden. — J.-F. Lewandowski : Ueber die æquianharmonische Funktion. — L. Lichtenstein : Zur Theorie der partiellen Differentialgleichung

$$D(u) \equiv \Delta u + a \frac{du}{dx} + b \frac{du}{dy} + cu = 0, c < 0$$

M. Kohler : Die Grenzflächen der Strahlennetze (Strahlensysteme erster Ordnung und Klasse).

Proceedings of the London Mathematical Society. Série 2, vol. 8.

N°s 1 à 3. — J. Larmor : The Kinetic Image of a Convected System formed in a Conducting Plane Sheet. — E. W. Hobson : On change of the Variable in a Lebesgue Integral. — E. W. Hobson : On some Fundamental Properties of Lebesgue Integrals in a Two-Dimensional Domain. — W. H. Young : On Indeterminate Forms. — E. Cunningham : The Principle of Relativity in Electrodynamics and an Extension thereof. — W. H. Young : On Term-by-Term Integration of Oscillating Series. — W. H. Young : On the Discontinuities of a Function of one or more Real Variables. — G. N. Watson : The Solution of the Homogeneous Linear Difference Equation of the Second Order. — G.-N. Watson : The Solution of a certain Transcendental Equation. — H.-R. Hassé : The Equations of Electro dynamics and the null Influence of the Earth's motion in optical and electrical Phenomena. — T.-E. Littlewood : On a class of conditionally convergent infinite Products. — J.-G. Leathem : On Gauss's Theorem concerning the

surface integral of normal force in the Theory of attractions. — F.-I -W. Whipple : On the Behaviour at the Poles of a series of Legendre's Functions representing a Function with infinite discontinuities. — H. Bateman : The transformation of Electrodynamical Equations.

Bulletin de la Société Mathématique de France. T. XXXVII. Paris. Fasc. 4. — E. Goursat : Sur quelques points de la Théorie des équations intégrales. — Emile Cotton : Sur les équations différentielles dépendant de paramètres arbitraires. — Ch. Bioche : Sur les dégénérescences des surfaces desmiques. — L. Raffy : La méthode de la coordonnée isotrope dans le problème de la déformation des surfaces. — G. Rémoundos : Sur la représentation uniforme des surfaces algébriques. — Table des matières du tome XXXVII.

Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften, Wien. — Math.-Naturw. Klasse. CXVII. Band, Jahrgang 1908. — Gerold's Sohn. Vienne.

J.-A. Barrau : Spezielle Kummer'sche Konfigurationen im Masspolytop. — A. Denizot : Ueber die axonometrischen Verkürzungsverhaltnisse. — Ph. Frank : Die Integralgleichungen in der Theorie der kleinen Schwingungen von Fäden und das Rayleigh'sche Prinzip. — J.-A. Gmeiner : Kriterien der Divergenz und Konvergenz von alternierenden unendlichen Kettenbrüchen. — L. Hanni : Kinematische Interpretation der Maxwell'schen Gleichungen mit Rücksicht auf das Reziprozitätsprinzip der Geometrie. (Fortsetzung). — G. Kohn : Ueber einige Eigenschaften der allgemeinen Fläche dritter Ordnung. — E. Landau : 1. Ueber einen Grenzwertsatz. — 2. Ueber die Primzahlen in einer arithmetischen Progression und die Primideele in einer Idealklasse. — G. Majcen : Ueber eine Abbildung der allgemeinen Fläche 3. Ordnung und einige daraus abgeleitete Eigenschaften der rationalen ebenen Kurven 3. und 4. Ordnung. — F. Mertens : 1. Die kubischen Abel'schen Gleichungen des Bereichs $(-\sqrt{31})$. — 2. Ueber die Irreduktibilität der Kreisteilungsgleichungen. — G. Pick : Zur hypergeometrischen Differentialgleichung. — L. Tuschel : Zur Verwertung der sphärischen Abbildung in der darstellenden Geometrie. — K. Zahradnik : Konstruktion der rationalen Kurven dritter und vierter Ordnung, respektive Klassen vermittels der kollinear incidenten Elementen.

Acta Mathematica, dirigé par Mittag-Leffler, T. XXXIII Stockholm. Fasc. 1. — B. Gambier : Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est à points critiques fixes. — H. Poincaré : Remarques diverses sur l'équation de Fredholm. — A. Markoff : Recherches sur un cas remarquable d'épreuves dépendantes.

Wiadomosci Matematyczne, dirigé par S. Dickstein, Varsovie. Tome XIII, N° 5-6.

S. Zaremba : Aperçu sur l'histoire du développement et l'état actuel de la théorie des équations de la Physique. — W. Sierpinski : Sur un produit infini semi-convergent. — H. Minkowski : L'espace et le temps.

Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège, 3e série, tome VIII.

Luc Godeaux : Notes de Géométrie. — J. Deguëldre : Sur une surface particulière du 7e ordre. — G. Cesaro : Éléments d'analytique sphérique. — A. Gob ; Note sur les hypocycloïdes tricupsidales inscrites à un triangle

fixe. — M. Beaupain : Sur la transformation d'intégrales à circuit fermé en intégrales à circuit ouvert. — Luc. Godeaux : Études de Géométrie synthétique. — J. Malaise : Sur quelques générations des coniques et des quadriques. — Neuberg et Deguelдre : Sur quelques lieux géométriques dans l'espace. — J. Neuberg : Relations entre les volumes de certains tétraèdres — H. Janne : Sur la variation des latitudes. — A. Gol : Sur l'hypocycloïde de Steiner.

American Journal of Mathematics, edited by Fr. Morley, Baltimore. Vol. XXXII, (1910), n° 1.

J. C. Fields : The Complementary Theorem. — L. Pfahler Eisenhart : The Twele Surfaces of Darboux and the Transformation of Moutard. — Ar. Ev. Young On the Problem of the Spherical Representation and the Characteristic Equations of Certain Classes of Surfaces. — F. R. Sharpe : The Generale Circulation of the Atmosphere — G. A. Miller : Generalizations of the Tetrahedral and Octahedral Groups. — O. E. Glenn : The Theory of Degenerate Algebraical Curves and Surfaces.

2. Livres nouveaux :

W. Ahrens. — **Mathematische Unterhaltung und Spiele.** Erster Band. Zweite vermehrte und verbesserte Auflage. — 1 vol. in-8°, relié, 400 p. ; 7 M. 50 : B. G. Teubner, Leipzig.

P. Bachmann. — **Niedere Zahlentheorie.** Zweiter Teil : *Additive Zahlentheorie.* — 1 vol. in-8°, 480 p. ; B. G. Teubner, Leipzig.

G. Bauer. — **Vorlesungen über Algebra.** Zweite Auflage. — 1 vol. in-8°, 366 p. ; 12 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

O. Bolza. — **Vorlesungen über Variationsrechnung.** — 1 vol. in-8°, relié, 705 p. ; 20 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Gunther Bugge. — **Strahlungserscheinungen, Radioaktivität** *(Bücher der Naturwissenschaft herausgegeben von Siegmund Günther).* — 1 vol. in-16°, relié ; 80 Pf. ; Phil. Reclam. jun., Leipzig.

P. Crantz. — **Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht.** I. Zweite Auflage *(Sammlung « Aus Natur und Geisteswelt »).* — 1 vol. in-16°, relié, 124 p. ; 1 M. 25 ; B. G. Teubner, Leipzig.

O. D. Chwolson. — **Traité de Physique.** Ouvrage traduit sur les éditions russe et allemande, par E. Davaux. Édition revue et considérablement augmentée par l'auteur. *Tome IV*, 1er fasc. : *Champ électrique constant.* — 1 vol. gr. in-8°, 430 p. ; 12 fr. ; A. Hermann. Paris.

F. Dingeldey. — **Sammlung von Aufgaben zur Anwendungen der Differential- und Integralrechnung.** Erster Teil. — 1 vol. in-8°, relié, 202 p. ; 6 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

O. Dziobek. — **Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung.** — 1 vol. in-8°, relié, 648 p. ; 16 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

J. Gajdeczka. — **Uebungsbuch zur Arithmetik und Algebra** für die oberen Klassen der Gymnasien, Realgymnasien und Realschulen. 8. Auflage. — 1 vol. in-8, relié, 248 p. ; 3 M. 20 ; F. Tempsky, Vienne

R. Guimaræs. — **Les Mathématiques en Portugal.** Deuxième édition. — 1 vol. in-8°, 655 p. ; 24 fr. ; Imprimerie de l'Université, Coïmbre.

F. Hocevar. — **Lehr- und Uebungsbuch der Geometrie** für Gymnasien.

Realgymnasien und Realschulen. Unterstufe. 9. Auflage. — 1 vol. in-8°, relié, 105 p.; 1 M. 80; F. Tempsky, Vienne.

La Langue internationale et la Science. Considérations sur l'introduction de la langue internationale dans la science. — 1 fasc. in-8°, 65 p.; 1 fr.; Ch. Delagrave, Paris.

W. v. Ignatowsky. — **Die Vektoranalysis und ihre Anwendungen** in der theoretischen Physik. II. Teil. Anwendungen (*Mathem. Physikalische Schriften für Ingenieure und Studierende*, herausgegeben von E. Jahnke). — 1 vol. in-8°, relié, 123 p.; 3 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

M. Lange. — **Das Schachspiel** (*Sammlung « Aus Natur und Geisteswelt »*). — 1 vol. in-16°, relié, 107 p.; 1 M. 25; B. G. Teubner, Leipzig.

E. Lebon. — **Gaston Darboux,** biographie, bibliographie analytique des écrits (Collection des *Savants du jour*). — 1 fasc. gr. in-8°, 72 p.; 7 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

E. Lutz. — **Analytische Geometrie der Ebene,** elementares Lehrbuch für höhere Lehranstalten. — 1 vol. in-8°, relié, X und 301 p.; 9 M.: G. Braun, Karlsruhe.

M. Mandl. — **Lehrbuch der Geometrie.** I. Ausgabe für die oberen Klassen der Gymnasien und Realgymnasien (IV-VIII. Klasse). 1 vol., 364 p. — II. Ausgabe für die oberen Klassen der Realschulen (IV-VII Klasse). 1 vol. in 8°, 382 p. — Chaque vol. relié; 4.50 K.; Manz, Vienne.

G. Mannoury. — **Methodologisches und Philosophisches zur Elementar-Mathematik.** — 1 vol. in-8°, 276 p.; P. Visser, Haarlem,

Mocnik. — **Lehr- und Uebungsbuch der Arithmetik** für die I. und II. Klasse der Gymnasien, Realgymnasien und Realschulen. 40. Auflage bearbeit von K. Zahradnicek. 1 vol. in-8°, relié, 156 p.; 2 M. 50. — Ausgabe für die III. und IV. Klasse der Mittelschulen. 30. Auflage. 1 vol. in-8°, relié, 228 p.; 3 M.; F. Tempsky, Vienne

Mocnik. — **Anfangsgründe der Geometrie** für die I. bis III. Klasse der Mittelschulen. 28. Auflage bearbeitet von J. Spielmann. — 1 vol. in-8°, relié, 107 p.; 1 M. 80; F. Tempsky, Vienne.

H. Poincaré. — **Sechs Vorträge aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik.** — 1 fasc. in-8°, relié, 60 p.; 2 M. 40; B. G. Teubner, Leipzig.

C. Schoy. — **Beiträge zur konstruktiven Lösung sphärisch-astronomischer Aufgaben** — 1 vol. in-8°, 40 p., avec 3 fig. et 8 planches; 1 M. 60; B. G. Teubner, Leipzig.

Schwab u. Lesser. — **Mathematisches Unterrichtswerk** zum Gebrauch an höheren Lehranstalten. — Lehr- und Uebungsbuch der **Geometrie,** von K. Schwab. Erster Teil, Ausgabe A, für die mittleren Klassen der Realanstalten. 1 vol. in-8°, relié, 290 p.; 4 M. — Lehr- und Uebungsbuch für den Unterricht in der **Arithmetik und Algebra,** von O. Lesser. Zweiter Teil, Ausgabe A, für die oberen Klassen der Realanstalten. 1 vol. in-8°, relié, 238 p.; 3 M.; F. Tempsky, Vienne.

R. Suppantschitsch. — **Lehrbuch der Geometrie** für Gymnasien u. Realgymnasien. Mittelstufe: Planimetrie u. Stereometrie. Mit 349 Fig. u. 1296 Fragen u. Aufgaben. — 1 vol. in-8°, cart., 340 p.; 4 Kr. 50; F. Tempsky, Vienne.

COMMISSION INTERNATIONALE DE L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Sous-Commission française.

RAPPORT SUR LES DIPLOMES D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DE SCIENCES MATHÉMATHIQUES EN FRANCE

Par A. DE SAINT-GERMAIN (Paris).

L'étude des matières d'ordre supérieur a été récemment développée d'une manière appréciable, dans nos Facultés des Sciences, par l'introduction d'une épreuve nouvelle imposée aux candidats au concours d'agrégation[1]. Ce concours, on le sait, a pour objet principal le recrutement des professeurs titulaires dans nos lycées. Jusqu'en 1907, les candidats, munis de quatre *certificats d'études* correspondant à la licence, avaient seulement à subir, dans un intervalle de cinq ou six semaines, les épreuves du concours proprement dit, les unes écrites, les suivantes orales et pratiques, permettant de juger leur savoir et leurs aptitudes pédagogiques. Le Ministre estima qu'après avoir conquis le grade de licencié, les candidats gagneraient à poursuivre, pendant une année au moins, leurs études générales et théoriques dont la sanction serait le *Diplôme d'études supérieures*, organisé par arrêté du 18 juin 1904 ; ils pourraient ensuite mieux se préparer à un concours dont le caractère serait nettement professionnel, le sujet des leçons à faire comme épreuves étant tiré des programmes des lycées.

Pour le diplôme d'études supérieures de mathématiques, il y a *deux sortes d'épreuves :*

1° Composition d'un Mémoire sur un sujet agréé par la Faculté :

[1] Au sujet du rapport de M. de SAINT-GERMAIN, nous sommes heureux de rappeler que l'*Enseignement mathematique* a deja entretenu ses lecteurs des Diplômes d'études supérieures. Un article de M. BUHL (T. X, 1908, p. 372) a attiré l'attention sur eux et plus particulièrement sur leur preparation a la Faculté des Sciences de Montpellier. Cet article est suivi du résumé d'un mémoire écrit, pour l'obtention du diplôme, par M. Costabel, éleve de la Faculté. M. de Saint-Germain mentionne d'ailleurs plus loin ce mémoire sous la rubrique : Analyse superieure.

N. d. l. R.

2° Interrogations sur ce travail et sur des questions indiquées trois mois à l'avance et se rapportant à la même partie des mathématiques.

Le Mémoire a pour objet soit un travail original, soit l'exposé. total ou partiel, d'un mémoire ou d'un cours d'ordre supérieur aux programmes fondamentaux du calcul infinitésimal et de la mécanique. Dans ce dernier cas, un simple résumé ne saurait suffire; le candidat doit présenter les théories et les démonstrations sous une forme nouvelle, ou démontrer des propositions, effectuer des calculs que l'auteur ou le professeur n'ont fait qu'indiquer, ou enfin traiter quelques applications originales.

L'arrêté de 1904 ajoute que seront tenus pour équivalents au *diplôme* d'études supérieures de mathématiques les *certificats* portant sur l'une des matières suivantes : Analyse supérieure, Géométrie supérieure, Mécanique céleste, Physique mathématique, Mécanique physique et expérimentale. Ces certificats ne sont délivrés que dans quelques Facultés; mais là, ils sont généralement recherchés de préférence au diplôme : celui-ci exige, dans une certaine mesure, des découvertes que le candidat peut ne pas trouver dans le domaine dont il tente l'exploration; au contraire, l'étudiant qui suit avec zèle et intelligence le cours fait par un bon maître en vue d'un des certificats équivalents au diplôme est presque sûr d'obtenir le certificat; en outre il aura acquis un bagage de connaissances plus considérable que le camarade qui aura concentré ses efforts, plus ou moins inexpérimentés, sur une question spéciale. En tous cas, les uns et les autres auront utilement fortifié leur éducation scientifique avant d'aborder la préparation du concours professionnel.

La statistique montre bien que les certificats ont été recherchés. de préférence au diplôme supérieur de mathématiques, dans les Facultés où l'option était possible. Pendant les années 1906, 1907, 1908 et 1909, les Facultés françaises ont délivré 27 diplômes de mathématiques contre 65 de sciences physiques et 40 de sciences naturelles : à Paris, en particulier, 59 diplômes ont été conférés, pas un seul pour les mathématiques. Et l'on doit noter que les candidats à l'agrégation de mathématiques sont sensiblement plus nombreux que ceux qui concourent pour l'agrégation des sciences physiques et surtout des sciences naturelles.

Nous bornant aux diplômes de mathématiques, nous voyons qu'il en a été délivré 1 en 1906, 11 en 1907, 6 en 1908, 9 en 1909.

Au point de vue de leur répartition entre les diverses Facultés, on a les résultats suivants :

7 pour la Faculté de Montpellier,

6 pour la Faculté de Grenoble,

3 pour les Facultés de Bordeaux et de Nancy,

2 pour celles de Lyon et de Marseille,

1 pour celles de Clermont, Dijon, Rennes, Toulouse;
aucun pour celles de Besançon, Caen, Lille, Paris, Poitiers.

Ces diplômes ont été obtenus par des élèves des Facultés, aspirant à l'agrégation, quoique en principe ils puissent être recherchés par tout le monde, sans conditions de grades ni de nationalité.

Pour les épreuves orales, d'ailleurs éliminatoires, on ne peut guère que constater que les jurys d'examen les ont toujours déclarées satisfaisantes ou très satisfaisantes et je crois peu utile d'indiquer les sujets proposés aux candidats, généralement en dehors des programmes fondamentaux. Au contraire, il y a peut-être quelque intérêt à passer en revue les questions traitées dans les différents Mémoires, avec une appréciation sommaire du travail présenté. Je les grouperai d'après la branche des Mathématiques à laquelle ils se rapportent, en essayant, pour chaque groupe, de commencer par les meilleurs.

I. — Géométrie infinitésimale et théorie des surfaces.

Cette branche a tenté le plus grand nombre et nous fournit sept Mémoires. Je commencerai par celui de M. Turrière (Toulouse, 1907) : *Sur le problème de Transon.* Le candidat aborde la question d'un point de vue nouveau : il cherche les surfaces qui sont normales aux droites d'un complexe donné; les définissant à l'aide de coordonnées tangentielles, il obtient l'équation du problème sous une forme remarquable, d'où découle une remarque importante de M. Darboux; il applique cette équation à des exemples très bien choisis. Puis, il rattache à son sujet des études intéressantes, surfaces dont la développée a une nappe conique, surfaces correspondant aux complexes dont l'équation est homogène en L, M, N, etc. Ce travail important dénote beaucoup de savoir et d'habileté, il est plus que satisfaisant.

M. Roby (Clermont, 1909) : *Surfaces sur lesquelles les trajectoires orthogonales d'une famille d'asymptotiques sont des géodésiques.* Le candidat étudie le mouvement d'un trièdre dont les arêtes sont dirigées suivant les tangentes aux asymptotiques considérées, les tangentes aux trajectoires et les normales à la surface : il en déduit l'équation aux dérivées partielles du 2e ordre des surfaces cherchées, envisage la représentation sphérique de leurs deux familles d'asymptotiques, puis cherche des cas particuliers parmi diverses classes de surfaces, réglées, de révolution, etc. Le sujet est limité mais en grande partie original, traité avec habileté et élégance, encore très satisfaisant.

M. Cousson (Dijon, 1908) : *Sur la déformation et l'applicabilité des surfaces.* Le candidat, après des généralités, recherche les surfaces applicables sur celles où ds^2 a une forme donnée : il

arrive analytiquement à l'équation de Bour, puis reprend la question à l'aide du trièdre mobile et des formules de Codazzi dont il montre les avantages; il cherche enfin comment on peut voir si deux surfaces données peuvent s'appliquer l'une sur l'autre. Sujet étendu, bien traité, avec une part d'originalité suffisante.

M. Sauvigny (Lyon, 1909) : *Des surfaces sur lesquelles les lignes de courbure d'un système sont planes.* D'abord, par la Géométrie, le candidat établit quelques propriétés générales des lignes de courbure, leur enveloppe, les congruences de leurs tangentes, etc.; puis, les appliquant au cas où les lignes de courbure sont planes et même circulaires, il trouve les caractères des surfaces correspondantes et leur construction théorique. Ensuite, il reprend la question analytiquement : il obtient sans intégration la solution du problème pour le cas où les plans des lignes de courbure doivent envelopper un cône. Travail étendu, souvent ingénieux, a le mérite d'obtenir par deux méthodes uniformes des résultats déjà trouvés en suivant des voies très diverses.

M. Quéméneur (Nancy, 1909) : *Surfaces minima applicables sur des surfaces de révolution.* Le candidat identifie les ds^2 des deux surfaces exprimés à l'aide des coordonnées symétriques de la sphère : il obtient analytiquement, puis par la considération du trièdre mobile, des résultats énoncés par Bour et par M. Darboux. Applications très bien choisies; étude détaillée du groupe alysséide-hélicoïde à plan directeur. Sujet limité mais fort bien présenté, avec des résultats élégants et personnels.

M. Raynaud (Grenoble, 1907): *Des lignes de courbure.* Le candidat passe en revue les principaux chapitres de cette théorie, propriétés fondamentales, ... , développées des surfaces, transformation de S. Lie, etc. La partie personnelle consiste dans l'exposé de démonstrations nouvelles, quelques-unes d'une rigueur contestable; néanmoins, ce travail considérable, bien ordonné et bien clair, a pu être jugé suffisant.

M. Charrasse (Montpellier, 1908) : *Propriétés générales des surfaces.* Le candidat avoue que son Mémoire est surtout l'exposé d'un cours d'ordre supérieur fait par M. Vessiot: il démontre quelques résultats simplement énoncés et résout plusieurs problèmes proposés par MM. Vessiot, Niewenglowski et les *Nouvelles Annales.* Le Jury, estimant que M. Charrasse eût pu obtenir un certificat de Géométrie supérieure, lui accorde le diplôme.

II. — Géométrie analytique.

Sous ce titre, je réunirai deux Mémoires ayant trait à des sujets limités, et tous deux bien satisfaisants.

M. Bresse (Nancy, 1908) : *Les équations différentielles de deux*

familles de courbes planes. La première est celle des coniques, la seconde celle des cubiques définies par une équation de la forme

$$y^3 + X_2 y + X_3 = 0 .$$

Le candidat, suivant des méthodes indiquées par Fuchs et par M. Tannery, montre que, *en général*, les ordonnées des deux familles de courbes satisfont respectivement à deux équations différentielles du 2me ordre, linéaires et sans second membre: il trouve les intégrales générales, qui représentent respectivement des coniques et des sextiques dont il étudie les propriétés géométriques. Enfin, et c'est le chapitre le plus personnel, il déduit ces propriétés de l'étude des singularités des intégrales.

M. Soula (Montpellier, 1909) : *Les courbes gauches de 4me ordre et de 2me espèce.* Le candidat expose clairement, avec les notations usitées en France, les résultats énoncés dans un Mémoire de Cremona (1860) et dans plusieurs de M. Adler (1883) : à l'aide de coordonnées homogènes, il établit les propriétés des courbes données, qui peuvent être de 6me, 5me ou 4me classe ; il étudie chacun des groupes, puis retrouve des résultats énoncés par M. Bioche en 1907 et rattache à son sujet les complexes circonscrits à deux quadriques. Il montre un réel talent d'adaptation et de synthèse.

III. — Singularités des intégrales des équations du 1er ordre.

Nous avons ici trois Mémoires se rapportant à l'équation

$$(\alpha) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$$

f et g désignant des polynômes.

M. Gay (Grenoble, 1909). *Singularités des intégrales des équations différentielles du 1er ordre.* Le candidat se proposait d'étudier le Mémoire de M. Poincaré relatif à la question quand x et y sont réels ; sur le conseil de M. Zoretti, il envisagea d'abord le cas de x et y complexes. Il démontre par 3 méthodes l'existence de l'intégrale de l'équation (α), puis expose les délicates recherches de M. Painlevé sur les singularités de l'intégrale et élucide la théorie par un exemple très bien choisi et traité à fond. Venant au domaine réel, il expose les résultats trouvés par MM. Poincaré et Bendixson, avec applications bien appropriées. Ce travail fort bien rédigé, implique des notions exactes sur une théorie difficile et a des parties originales : il est excellent.

M. Perfetti (Montpellier, 1907) : *Etude d'une équation différentielle du 1er ordre.* Le Mémoire est inspiré par un cours de M. Boutroux au Collège de France. Rappelant les principes posés par

M. Painlevé, la classification des singularités d'après M. Boutroux, le candidat applique les méthodes du maître à l'équation

$$2xy \frac{dy}{dx} = ay^2 + x(X_0 + X_1 y + X_2 y^2 + X_3 y^3) .$$

a constante complexe, les X polynômes en x. Le candidat a su choisir un exemple conduisant à des résultats précis et permettant de suivre les diverses déterminations de l'intégrale en un point multiple. Vu la difficulté du sujet, ce travail bien rédigé, est bien satisfaisant.

M. Médy (Nancy, 1909). *Allure d'une branche d'intégrale en un point singulier à l'infini.* Le candidat s'inspire aussi du cours précité de M. Boutroux : il considère une branche d'intégrale de l'équation (α) présentant un point singulier rejeté à l'infini et étudie l'allure et la croissance des branches qui y passent : applique convenablement les résultats à un exemple indiqué par M. Boutroux. Travail soigné, mais assez peu personnel ; néanmoins acceptable.

IV. — Equations aux dérivées partielles du 1er ordre.

Sur l'intégration de ces équations, qui ne dépasse pas beaucoup les programmes fondamentaux, nous trouvons 4 Mémoires qu'on peut regarder seulement comme assez satisfaisants.

M. More (Lyon, 1908) : *Sur la simplification que donne la connaissance de quelques intégrales premières du système des caractéristiques pour l'intégration d'un système d'équations qui sont en involution.* Le candidat a été guidé par un cours de M. Vessiot, le livre de M. Goursat et aussi par les travaux de Lie et de M. Saltykow ; il expose avec habileté les travaux de ces maîtres et cherche à les comparer entre eux ; il glisse sur le rôle joué par l'idée de transformation de contact, mais il fait des applications à quelques exemples bien choisis.

M. Vigié (Montpellier, 1909) : *Sur la permutation des intégrales d'une équation de la forme*

$$X_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots\ldots + X_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 .$$

Ceci se rattache à un point important de la théorie des groupes.

Le candidat, s'inspirant largement d'un Mémoire de M. Buhl, montre que, connaissant une intégrale u_1, on peut en déduire élémentairement une autre de la forme

$$Y_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \ldots\ldots + Y_n \frac{\partial u_1}{\partial x_n} ;$$

de celle-ci on pourra revenir à u_1 par une voie analogue quand une certaine identité est vérifiée ; cette théorie peut découler du théorème de Poisson. Le candidat explicite la démonstration de la réciproque, énoncée par M. Appell ; puis il donne une interprétation géométrique de l'identité considérée.

Viennent ensuite deux Mémoires présentés à la Faculté de Marseille en 1907 par MM. Franceschini et Sauvaire : ce sont des exposés partiels d'un cours fait à la Faculté sur l'étude détaillée des équations dont nous nous occupons ; ils donnent les méthodes d'intégration de Boole, de Mayer et de Cauchy ; ils considèrent spécialement le cas des systèmes en involution. Le grain d'originalité demandé consiste en des remarques intéressantes sur les méthodes exposées et en plusieurs applications, géométriques chez M. Franceschini, numériques chez M. Sauvaire, lequel montre en outre qu'on ne saurait rencontrer un cas singulier sur lequel M. Collet avait simplement appelé l'attention.

V. — Fonctions elliptiques.

Sur cette théorie, nous avons deux bons Mémoires.

M. Mario (Rennes, 1906) : *Sur l'équation de Lamé*. Dans un Mémoire de 103 pages, le candidat expose avec soin les principaux résultats acquis à cette importante question. Il prend l'équation sous la forme de Weierstrass, indique les recherches de Lamé ; avec Hermite, il cherche pour le cas général, une intégrale de la forme

$$y = \frac{1}{(\sigma u)^n} \sigma(u + a_1) \ldots\ldots \sigma(u + a_n) e^{-u(\zeta a_1 + \ldots + \zeta a_n)} ;$$

on sait que $pa_1, \ldots, pa_n$ doivent être les racines d'une équation de degré n : le candidat montre la suite d'opérations qui permettent d'éviter la résolution de cette équation ; il a le mérite très réel d'avoir réuni nombre de résultats trouvés notamment par Hermite, Halphen et aussi par M. Krauze pour le cas où $yz' - zy'$ est nul, z se déduisant de y par le changement de u en $-u$; il démontre d'une façon très correcte un grand nombre de propositions simplement énoncées par ses guides.

M. Raynaud (Grenoble, 1907) : *Étude des cubiques de genre un à l'aide des fonctions elliptiques*. Le candidat se sert partout des notations de Weierstrass ; il passe en revue les représentations classiques des cubiques ; il fait la remarque, qui semble nouvelle, que si l'on pose

$$x = \frac{apu + bp'u + c}{a''pu + b''p'u + c''}, \quad y = \frac{a'pu + b'p'u + c'}{a''pu + b''p'u + c''},$$

la représentation devient impropre si le déterminant $| a, b', c'' |$ est nul. Il étudie méthodiquement les propriétés des cubiques, démontre de nombreuses propositions simplement énoncées par les maîtres, notamment par M. Humbert; enfin il donne les propriétés de courbes déduites dualistiquement des cubiques.

VI. — Intégrales abéliennes.

Nous trouvons deux Mémoires (Bordeaux, 1907), constituant d'intéressants exposés partiels d'un cours fait par M. P. Cousin.

M. Monchaux : *Propriétés fondamentales des intégrales abéliennes de 1re espèce, des intégrales élémentaires de 2me et de 3me espèces.* Après avoir rappelé quelques définitions d'Halphen, la notation homogène de Clebsch, le candidat étudie la formation de ses intégrales et les discute pour les courbes n'ayant que des points singuliers à tangentes distinctes ou des rebroussements de 1re espèce; il applique sa théorie à 4 courbes bien choisies, et l'étend à deux autres courbes non comprises dans la discussion générale.

M. de Sarrau : *Problème de Jacobi sur l'inversion des intégrales abéliennes.* Employant les fonctions Θ de plusieurs variables, le candidat développe avec une grande clarté la méthode donnée par Riemann dans un Mémoire où la concision est excessive, les notations difficiles à suivre; il effectue divers calculs qui étaient simplement indiqués et termine par le cas limite des intégrales elliptiques. Si on dit que ces deux Mémoires sont les travaux d'élèves d'un maître excellent, on doit ajouter qu'eux aussi ont été d'excellents élèves.

VII. — Analyse supérieure.

Sous ce titre, je réunis deux Mémoires relatifs à des questions nouvelles et tous deux bien satisfaisants.

M. Carron (Grenoble, 1907) : *Sur la mesure des ensembles.* Le candidat coordonne et compare les travaux de MM. Cantor, Jordan, Borel, Lebesgue, qui ont envisagé cette mesure à des points de vue différents ; sans apporter d'importantes contributions personnelles à des théories qui sont loin d'être classiques, il a le mérite de les avoir exposées le premier, d'avoir heureusement modifié plusieurs démonstrations, fait quelques rectifications de détail, et signalé la relation qui existe entre l'idée de mesure et le nombre des dimensions d'un ensemble.

M. Costabel (Montpellier, 1908) : *Sur le prolongement analytique d'une fonction méromorphe.* Le candidat expose les idées de MM. Borel et Buhl sur les séries divergentes et leur application au prolongement analytique de la série de Taylor ; puis il géné-

ralise la méthode exponentielle de M. Borel en se servant des intégrales curvilignes de M. Buhl et en substituant à la fonction sommatrice exponentielle des fonctions entières plus compliquées. Il obtient ainsi de nouvelles sortes de prolongement analytique dans des régions dont il donne une représentation précise. L'*Enseignement mathématique* a publié un résumé de cet intéressant travail (T. X, 1908, p. 377).

VIII. — Mécanique.

La Mécanique est représentée par trois Mémoires, tous trois relatifs à la stabilité de l'équilibre. M. Marcellin (Grenoble, 1907) rappelle les travaux de Lagrange et de Dirichlet ; après quelques essais relatifs aux vitesses, il démontre nettement la réciproque du théorème de Dirichlet quand on n'a qu'un seul paramètre et une fonction de forces U holomorphe. Il reprend les recherches de Liapounow pour le cas où le non maximum de U est indiqué par les termes du 2me degré, et pour le cas où U n'existe pas. Il cherche si l'addition de liaisons, holonomes ou non, renforce la stabilité ; enfin il analyse les travaux de M. Kneser, Painlevé, Hamel sur le cas des mouvements plans. Sans trancher la très délicate question qu'il a choisie, le candidat fait preuve de connaissances étendues et de critique avisée.

M. Caillet (Grenoble, 1908) : *Stabilité de l'équilibre d'un point mobile dans un plan*. Le mobile M, sollicité par une force F, ne dépendant que de sa position, est en équilibre au point O. Le candidat établit quatre propositions : soit un domaine limité autour de O : le point M, légèrement dérangé, en sortira dans un temps fini si F et v_0 ont des projections positives sur OX ou sur OM, ou des moments de même signe... Si U existe, la courbe $U = 0$ a un point singulier en O ; si c'est un point isolé, équilibre stable : un point à tangentes distinctes, il est instable ; dans le cas de deux tangentes confondues, le candidat démontre les résultats seulement énoncés par M. Painlevé ; il glisse un peu sur le cas du point multiple quelconque et celui où U n'existe pas ; mais son travail est plus qu'acceptable.

M. Dellac (Montpellier, 1907) : *Stabilité de la courbe d'équilibre d'un fil pesant et homogène*. Pour le cas de la chaînette, le candidat établit très bien la stabilité par une méthode géométrique donnée par M. Kneser dans le *Journal de Crelle ;* l'extension de la méthode au cas du fil posé sur une surface prête à quelques objections qui n'ont pas empêché le Jury d'accepter le travail.

IX. — Mécanique céleste.

M. Stapfer (Bordeaux, 1909) : *Sur la rotation de la Terre.* Le candidat, assistant à l'Observatoire, traite la question d'après MM. Klein et Sommerfeld ; il a su grouper les matériaux épars dans des ouvrages étendus et les bien présenter avec les notations usitées en France ; il introduit quelques perfectionnements de détail, pour rendre compte de plusieurs observations récentes et délicates. Le travail, très important, a été jugé comme bien satisfaisant.

X. — Calcul des probabilités.

M. Vézian (Montpellier, 1909) : *Sur quelques points du calcul des probabilités.* Dans $x + y$ observations, l'événement A s'est produit x fois, B, y fois. Quelle est la probabilité de A lors d'une $(x + y + 1)^{\text{me}}$ observation ? — Le candidat trouve qu'elle satisfait à une équation aux différences dont il donne quelques solutions. Il applique les résultats au théorème de Poisson sur les grands nombres, généralisation qui, d'après Bertrand, manque de rigueur et de précision ; M. Vézian montre qu'en modifiant l'énoncé de Poisson, il échappe à ce double reproche. Il termine par quelques problèmes relatifs à la probabilité des causes. Ce travail, portant sur un sujet toujours délicat, a été bien accueilli par le Jury.

Conclusion.

Les Mémoires présentés portent sur des questions suffisamment variées ; le tiers au moins d'entre eux sont parfaitement satisfaisants sans qu'aucun peut-être eût pu être accepté comme thèse de doctorat ; très peu sont médiocres. Il n'est ni téméraire ni regrettable de supposer que leurs auteurs aient été plus ou moins guidés par leurs maîtres ; mais en définitive le résultat cherché a été atteint, la culture des mathématiques a été développée dans plusieurs centres, au grand profit des étudiants et de leurs futurs élèves.

JUNIUS MASSAU (1852-1909)

COURTE NOTICE SUR SA VIE ET SES TRAVAUX EN MÉCANIQUE ET EN GÉOMÉTRIE VECTORIELLE

I

Le récent article de M. Jahnke *sur la Science extensive de Grassmann*[1] ainsi que les notes de MM. Burali-Forti et Marcolongo[2] *sur les notations vectorielles* m'ont amené à faire connaître un mathématicien belge, enlevé trop tôt à la science et dont les idées personnelles et originales sur cette question sont généralement très peu connues. Je veux parler de Junius Massau, l'un des professeurs les plus distingués de l'Université de Gand, où il enseigna pendant trente ans le cours de Mécanique analytique et plus tard ceux de Mécanique céleste et de graphostatique. Il était en même temps inspecteur général des Ponts et Chaussées et correspondant de l'Académie Royale de Belgique.

Né à Gosselies le 9 avril 1852, J. Massau est décédé à Gand le 10 février 1909. Après de solides études moyennes à l'Athénée Royal de Mons, il se distingua comme élève à l'Ecole des Ponts et Chaussées de Gand. Je laisse à une plume plus autorisée que la mienne le soin de retracer les principales étapes de sa laborieuse carrière scientifique qui comprend plus de trente-cinq années. Les détails biographiques qui suivent sont extraits du discours prononcé le jour des funérailles de Massau, au nom de la Classe des Sciences de l'Académie de Belgique, par M. A. Demoulin, professeur à l'Université de Gand, correspondant de ce Corps savant.

« Le talent mathématique se révèle souvent de bonne heure. En « 1874, à l'âge de 22 ans, Massau fut couronné au concours de « l'Enseignement supérieur. Au mémoire qu'il composa à cette « occasion étaient jointes des thèses fort remarquables. Trois « d'entre elles contenaient en germe ses recherches ultérieures sur « l'*Intégration graphique*. Cette branche nouvelle, toute entière « due à Massau, est aujourd'hui bien connue des ingénieurs ; elle

---

[1] *E. M.*, n° de nov. 1909, p. 417-429.
[2] *E. M.*, n° de nov. 1909, p. 459-466.

« permet de traiter facilement de nombreux problèmes techniques
« que l'on ne résolvait autrefois qu'à l'aide de longs calculs.

« Pendant dix ans, de 1878 à 1887, Massau poursuivit le développement de cette théorie dans une suite de travaux qui furent « réunis en un volume sous le titre de *Mémoire sur l'Intégration* « *graphique et ses applications*[1]. Je ne puis donner ici une idée, « même rapide, du contenu de cet ouvrage capital ; je viens d'en « indiquer l'importance au point de vue de l'ingénieur. Toutefois, « je désire en signaler une partie qui ne se rapporte pas à l'intégration graphique et à laquelle mon regretté maître attachait, « avec raison, un grand prix. Je veux parler de la branche que « M. d'Ocagne devait désigner plus tard sous le nom de *Nomographie*. En partant de l'anamorphose de Lalanne, Massau a « formulé de la manière la plus générale les principes essentiels « de la Nomographie, et il a eu pleine conscience de l'importance « et de l'utilité de ces principes qu'il a d'ailleurs appliqués à « plusieurs reprises au cours de son mémoire. Récemment, en « 1907, Massau est revenu sur ce sujet, et il a publié dans les « *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*[2], une note « substantielle où il résout un problème difficile relatif aux « abaques.

« En 1889, Massau ajouta au Mémoire sur l'intégration graphique un *Appendice*[3] fort étendu où sont étudiées des questions « d'un ordre fort élevé. Je citerai surtout sa théorie des accords « qui lui permit de traiter, après Hermite, le problème de la « détermination de l'intégrale n^e d'une fonction.

« A la fin de 1878, Massau avait été chargé de faire, à l'Université de Gand le cours de mécanique rationnelle[4]. Il renouvela « l'enseignement de cette branche par l'emploi systématique des « vecteurs et de leurs combinaisons : le produit et le moment « géométriques. Il introduisit aussi dans ses cours la théorie des « limites relatives et en fit d'élégantes applications.

« Tous ces travaux avaient placé Massau au premier rang; ils « lui valurent en 1894, le prix quinquennal des sciences physiques et mathématiques pour la période 1889-1893.

« Au cours de ces dernières années, Massau a publié des travaux non moins remarquables que les précédents. J'ai surtout « en vue le *Mémoire sur l'intégration graphique des équations aux* « *dérivées partielles*[5] et la *Note sur les cordes vibrantes*[6].

---

[1] *Annales de l'association des ingénieurs sortis des écoles de Gand (A. I. G.)*, 1883-1884. 1886-1888. puis en volume à part de 735 pp. avec atlas de 310 fig.

[2] 29 juillet 1907.

[3] *A. I. G.*, 1888-1889, puis volume a part de 264 pp.

[4] Le cours de mécanique de Massau a eu trois éditions autographiées en 1882, 1883 et 1891-1893-1896.

[5] *A. I. G.*, 1900, 1901, 1903-1904. Le premier fascicule a aussi paru en une autographie de IV-144 pp.

[6] *A. I. G.*, 1905.

« Parmi les problèmes que se posent les géomètres relative-
« ment aux équations aux dérivées partielles, certains ont pour « objet la détermination d'une solution satisfaisant à des condi- « tions aux limites analytiques. Mais les problèmes qu'on ren- « contre en mécanique peuvent être plus compliqués, les condi- « tions aux limites peuvent ne pas être analytiques. Les théories « classiques sont alors en défaut et il faut reprendre la question « à l'origine. A Massau revient le grand mérite d'avoir reconnu « quelle est, dans ce cas, la nature des solutions et d'avoir appliqué « sa théorie générale aux difficiles problèmes du mouvement varié « des eaux et de la poussée des terres.

« En 1906, l'Académie des Sciences de Paris lui décerna le prix « Wilde pour l'ensemble de ses travaux, et je sais combien il fut « sensible à ce témoignage de haute estime que lui donnait l'il- « lustre compagnie.

« J'ai dû passer sous silence bien des recherches originales et « profondes ; je citerai toutefois, avant de terminer ce rapide ex- « posé, la *Note sur les pièces chargées de bout* [1] et la *Note sur les* « *Géométries non-euclidiennes* [2]. Là encore, on peut admirer toutes « les ressources de ce puissant esprit.

« Telle est l'œuvre de Junius Massau ; non seulement elle est « destinée à rester, mais je suis convaincu qu'elle sera étudiée et « appréciée comme elle le mérite par un public de plus en plus « nombreux. »

Massau a publié en outre les notes suivantes : 1. *Note sur les intégraphes* (*B. I. G.*, 1887). — 2. *Calcul des cotisations des sociétés de secours* (*B. I. G.*, 1887). — 3. *Note sur la résolution graphique des équations du premier degré* (*A. I. G.*, 1887-1888). — 4. *Note sur les transformations par bielle et par manivelle* (*A. I. G.*, 1891). — 5. *La représentation proportionnelle* (2 broch. de 19 et 47 pp. in-8°, 1891-1892) ; Massau y défend le principe de la plus forte fraction forcée. — 6. *Discours sur les ballons dirigeables*, suivi d'une *note sur l'aviation* (*A. I. G.*, 1903). — 7. *Calcul du taux réel des emprunts à primes.* (1896).

Ainsi que le fait remarquer très judicieusement M. Demoulin, l'œuvre du mathématicien belge est peu connue. Cela s'explique quelque peu par le fait que Massau, dont la modestie était proverbiale, n'a jamais fait imprimer ses magistrales leçons de mécanique. Il se contentait de les faire autographier, et, à la fin de sa carrière, la dernière édition en étant épuisée, il ne voulut même pas en entreprendre la réimpression, malgré les sollicitations réitérées de ses élèves.

L'oubli relatif qui a entouré son œuvre s'explique mieux encore

---

[1] *A. I. G.*, 1904.
[2] *A. I. G.*, 1904-1905.

si l'on tient compte du fait que la majorité de ses élèves se composait de futurs ingénieurs, sollicités surtout vers la mécanique appliquée et n'accordant au cours de mécanique rationnelle que l'intérêt dû à son importance relative à l'examen. Quant aux futurs docteurs en sciences mathématiques, peu ont osé se hasarder à entreprendre des études spéciales sur la mécanique. Non pas par défiance à l'égard du professeur ou moins encore par antipathie, mais par suite de l'organisation particulière des études du doctorat. Car Massau jouissait à juste titre d'une popularité de bon aloi dans les milieux universitaires; toutes les sympathies allaient instinctivement à cette figure franche, ouverte et empreinte de la bonhomie la plus sincère. C'était le père des étudiants : au milieu de leurs réunions fraternelles, il se sentait redevenir jeune et il redevenait, pour un instant, le joyeux compagnon de jadis ; en un mot, il était pour ses élèves bien moins un maître qu'un ami.

D'autre part, à Gand, les cours du doctorat ès sciences mathématiques ne sont suivis que par de très rares élèves, la carrière offrant peu de ressources. De sorte que très peu ont eu l'occasion d'écouter ses leçons sur la partie la plus intéressante de son ouvrage, qui, malgré l'originalité des questions traitées, n'a pas eu la publicité qu'il méritait. Et cependant, quelle mine inépuisable de matériaux variés ; quelles méthodes simples et élégantes ! L'esprit est émerveillé devant ces généralisations hardies et ces concepts d'une profondeur remarquable.

II

Le lecteur me permettra de feuilleter avec lui les deux tomes de la *Mécanique rationnelle* de mon vénéré maître ; il se proposait d'y ajouter une troisième partie sur les compléments et la mécanique céleste.

L'ouvrage débute par une introduction de quatre-vingts pages, dans laquelle l'auteur expose les principes de la géométrie vectorielle dont il fera usage dans son cours de mécanique. Ce dernier comprend trois parties : statique, cinématique, dynamique, et se termine par un appendice sur lequel j'aurai l'occasion de revenir plus loin.

Chose digne de remarque : la mécanique est exposée en faisant usage d'une façon systématique des notations vectorielles ; l'exposition y gagne en clarté et en concision. Il se sert presque exclusivement des trois symboles $\overline{a}$, $\overline{ab}$, $\mathrm{M}\overline{ab}$. Le premier $\overline{a} \equiv \overline{\mathrm{AB}}$ est le *vecteur* joignant les deux points A et B et de longueur a, dans lequel on distingue une grandeur, une direction et un sens. Le

second $\overline{ab}$ est le *produit géométrique* de deux vecteurs $\overline{a}$ et $\overline{b}$; il est égal au produit algébrique de leurs grandeurs par le cosinus de leur angle. Quant à $\mathcal{M}\overline{ab}$ ou le *moment géométrique* des vecteurs $\overline{a}$ et $\overline{b}$, c'est un vecteur dont la grandeur est proportionnelle à la surface du parallélogramme construit sur a et sur b comme côtés et dont la direction est perpendiculaire au plan de ce parallélogramme. Pour achever de le définir, on suppose le contour de ce parallélogramme parcouru dans le sens OACBO ($\overline{OA} = \overline{a}$, $\overline{OB} = \overline{b}$); le sens du moment géométrique sera pris tel qu'un observateur placé le long de ce vecteur, les pieds à l'origine O et la tête à l'extrémité verrait le mobile se mouvoir dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre.

Le produit géométrique a été défini par Resal (*Traité de cinématique pure*, Paris, Malley-Bachelier, 1862); la notion du moment géométrique est due à Massau (*Cours de mécanique de l'Université de Gand*, 1879, Gand, Lobel; Paris, Gauthier-Villars). A la vérité, avant ces auteurs, et à peu près à l'époque où Grassmann publiait ses recherches, de Saint-Venant (*C. R.*, 1844, 2me semestre, p. 620) avait défini, sous le nom de produit géométrique d'une aire et de produit géométrique de deux vecteurs, des combinaisons analogues à celles qui ont été étudiées par Resal et Massau; mais si l'on se reporte à la note citée, on reconnaîtra sans peine que les équations aréaires et celles qu'on peut en déduire n'ont pas la précision qu'offrent les équations qui résultent de l'emploi du produit et du moment géométriques. Pour leur donner cette précision, il faudrait substituer aux aires planes les vecteurs qui les représentent; c'est précisément en cela que consiste le progrès réalisé par Massau.

Ces définitions étant admises, un point M quelconque est déterminé par rapport à un point O pris comme origine quand on connaît le vecteur OM. Alors $\overline{e} = \overline{OM}$ est la *coordonnée vectorielle* de M.

On conçoit que lorsque M décrit une courbe (C) ou une surface (S), $\overline{e}$ varie; dans le premier cas, $\overline{e}$ dépend d'une seule variable indépendante t et on a $\overline{e} = \overline{f}(t)$; dans le second, au contraire, $\overline{e}$ dépend de deux variables indépendantes t et t' qui peuvent être les coordonnées de Gauss, et $\overline{e} = \overline{f}(t, t')$.

On conçoit que toute la théorie des courbes et des surfaces peut se faire par la géométrie vectorielle; c'est la méthode suivie par M. Demoulin dans la théorie des complexes, congruences et surfaces réglées (Bruxelles, Castaigne, 1894) et dans son cours de géométrie infinitésimale de l'Université de Gand. On éprouve un véritable plaisir à manier les équations vectorielles qui, chaque fois, remplacent trois équations analytiques de projection sur trois axes rectangulaires.

Ces fonctions géométriques sont soumises aux mêmes règles que les fonctions ordinaires de l'analyse infinitésimale et l'auteur a soin chaque fois d'interpréter les résultats géométriquement.

Mais où l'originalité de son esprit s'affirme avec le plus de netteté, c'est quand il introduit la notion de *limite relative :* un infiniment petit d'ordre k étant mis sous la forme $\overline{M}dt^k$ (dt convergeant vers zéro), si on remplace le vecteur $\overline{M}$ par sa limite $\overline{m}$, on obtient un autre infiniment petit $\overline{m}dt^k$ qui est la limite relative du premier.

Cette définition s'applique évidemment aux infiniment petits analytiques ; elle s'applique aussi aux quantités finies : leurs limites relatives se confondent avec leurs limites absolues. Ces limites relatives jouissent de plusieurs propriétés intéressantes ; ainsi *la limite relative d'une figure est la limite absolue d'une figure semblable à la figure infiniment petite; les limites relatives des longueurs, des aires et des volumes infiniment petits sont les longueurs, les aires, les volumes pris dans la limite relative de la figure.* Toute figure infiniment petite a pour limite absolue un point qui est le *pôle de convergence;* si on prend ce pôle comme origine, tout point de la figure donnée a une coordonnée vectorielle de la forme $\overline{M}dt^k$; aux limites relatives, ce point est remplacé par un autre dont la coordonnée est $\overline{m}dt^k$.

Les relations entre deux figures infiniment petites sont régies par la théorie des *lignes de rappel.* Deux figures infiniment petites ont respectivement pour pôles de convergence les points P et Q ; deux points A et B de ces figures sont réunis par une ligne de rappel AB ; ces points sont soumis par là à une condition ; il s'agit de savoir ce que devient cette condition aux limites relatives. La droite AB est une ligne qui a pour limite absolue PQ ; on suppose que la droite AB coupe sa limite en un point O ; la limite O′ du point d'intersection O est ce que Massau appelle le *foyer* de la ligne de rappel.

Ces notions fondamentales ont permis à l'auteur de construire une méthode de calcul qui se suffit à elle-même et de développer son cours de mécanique suivant la voie qu'il s'était tracée, c'est-à-dire en se servant exclusivement des notations vectorielles. Ceux qui veulent se convaincre de la beauté des procédés employés n'ont qu'à lire ces pages, où l'auteur a traité d'une façon magistrale les principales théories de la statique. Il a adopté la division suivante dans l'étude de cette branche : Statique du point. — Statique des systèmes solides invariables. — Statique des systèmes quelconques. — Principe des vitesses virtuelles. — Applications. Les deux derniers chapitres sont particulièrement intéressants : à signaler, parmi les applications, la détermination des centres de gravité.

La cinématique a fourni à Massau l'occasion d'exposer avec simplicité et élégance ses théories fondamentales et de montrer ainsi la portée de la méthode vectorielle. A mentionner tout particulièrement le mouvement du point aréolaire, le mouvement élémentaire d'une figure glissant dans son plan, le mouvement d'une surface mobile invariable sur une surface fixe, le mouvement fini d'un système invariable, le mouvement d'un système invariable autour d'un point fixe. Dans l'étude du mouvement parallèle à un plan fixe, l'auteur, par l'emploi de méthodes très simples, arrive à des résultats très remarquables au point de vue géométrique. Le paragraphe traitant du mouvement relatif lui donne l'occasion d'établir la formule très curieuse suivante :

$$\mathrm{M}\bar{c}\,\mathrm{M}\bar{a}\bar{b} = \bar{a}(\bar{b}\bar{c}) - \bar{b}(\bar{a}\bar{c})$$

qu'il applique aux différentielles et aux dérivées de fonctions géométriques.

Cela nous amène à consacrer quelques lignes à l'étude d'une question où la personnalité et l'originalité du penseur se sont affirmées avec le plus de netteté ; il s'agit de la *fonction linéaire* la plus générale. On écrira $\bar{\mathrm{E}} = \varphi\,\bar{e}$, et on dira que $\bar{\mathrm{E}}$ est une fonction linéaire de $\bar{e}$, si l'on a

$$\bar{\mathrm{E}} = \bar{a}_x x + \bar{a}_y y + \bar{a}_z z$$

x, y, z étant les projections de $\bar{e}$ sur trois axes rectangulaires. La *fonction linéaire inverse* est $\bar{e} = \varphi^{-1}\,\bar{\mathrm{E}}$. La fonction φ' est *conjuguée* de φ si $\bar{e}\varphi\,\bar{\mathrm{E}} = \bar{\mathrm{E}}\varphi'\,\bar{e}$, quelles que soient $\bar{e}$ et $\bar{\mathrm{E}}$. Ces relations définissent des transformations géométriques qui ont été étudiées par l'auteur avec le plus grand soin. Il appelle *fonction autoconjuguée* une fonction linéaire identique à la conjuguée : dans ce cas, la transformation est particulièrement intéressante ; ainsi la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

se transforme en un ellipsoïde

$$\left(\frac{\mathrm{X}}{g_1}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{Y}}{g_2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{Z}}{g_3}\right)^2 = 1\ ,$$

$g_1\ g_2\ g_3$ étant des éléments propres à cette transformation. M. Wasteels a appliqué cette méthode à l'étude de certains volumes dans les quadriques et en a déduit une généralisation du théorème de Lexell (M., 1907, p. 33).

Après avoir étudié ensuite la *fonction linéaire égale et contraire à sa conjuguée*, montré comment on peut décomposer la fonction

linéaire la plus générale, Massau applique les résultats précédents à l'étude des déplacements finis autour d'un point, à la dilatation linéaire et à la dilatation cubique. Il y démontre le théorème suivant si intéressant et si inattendu : *le mouvement élémentaire autour d'un point* M *pendant un intervalle de temps* dt *se décompose en une déformation pure et une rotation instantanée (tourbillon).*

Enfin, pour terminer cette longue série de questions, viennent les applications aux problèmes des tangentes, de l'enveloppe d'une courbe invariable, des rayons de courbure, des roulettes; la règle de Savary; la théorie des axes dépendants et indépendants; une esquisse de la théorie des complexes, congruences et surfaces réglées et leur génération statique; les tétraèdres de Möbius.

La dynamique de Massau retiendra particulièrement notre attention par plusieurs questions où l'auteur s'écarte plus ou moins des théories exposées dans les traités. Tout d'abord il y a lieu de citer les nombreuses applications de la fonction vectorielle dans la théorie des moments d'inertie, la rotation des solides et la théorie des tourbillons en hydrodynamique. La démonstration des équations de Lagrange et d'Hamilton a été considérablement simplifiée. Tandis que beaucoup d'auteurs admettent comme évident l'existence d'un mouvement plan ou rectiligne, le mathématicien belge a soin d'établir deux théorèmes pour démontrer qu'il en est réellement ainsi.

La projection d'un point qui décrit une spirale logarithmique lui donne la solution générale du mouvement d'un point sollicité par une force centrale proportionnelle à la distance au centre d'action dans un milieu qui résiste comme la vitesse.

Lorqu'il y a une fonction de forces, la durée des petites oscillations d'un point sur une courbe est donnée par une formule simple où figurent le rayon de courbure de la courbe et celui d'une section normale de la surface de niveau qui passe par la position d'équilibre.

De plus, plusieurs changements ont été apportés à la théorie des tautochrones et des brachystochrones. Dans l'étude de l'influence de la rotation de la terre sur le mouvement des projectiles, l'auteur discute complètement la direction de la déviation comparée à celle du plan de tir.

Dès 1874, Massau a préconisé la *méthode de l'observatoire auxiliaire* dans l'étude des mouvements en général et particulièrement dans l'étude des mouvements relatifs. Il applique cette méthode aux mouvements relatifs des projectiles et du pendule à la surface de la terre. Pour ce qui concerne le mouvement des projectiles dans l'hypothèse de l'attraction terrestre constante, il retrouve, presque sans calcul, l'interprétation géométrique donnée par Bour et critiquée à tort par Resal et Gilbert.

On sait que les équations de translation des systèmes matériels

conduisent au théorème du mouvement du centre de gravité. Il établit un théorème analogue en interprétant les équations de moment : c'est le théorème du centre de gravité des points aréolaires.

Massau fait suivre la théorie des moments d'inertie de la composition des quantités de mouvement et des forces d'inertie. Il a été ainsi ramené à composer un système de forces parallèles proportionnelles aux masses et aux distances de ces masses à un plan ; le centre de ces forces est le pôle du plan par rapport à l'image d'inertie.

Le mouvement du gyroscope de Foucault a été étudié approximativement par Quet dans l'hypothèse de la pesanteur constante. Bour a trouvé une solution exacte dans le cas de l'attraction terrestre constante. Les calculs de Quet et de Bour sont excessivement longs. En appliquant la méthode de l'observatoire auxiliaire, le mathématicien gantois retrouve la solution de Bour sans calcul.

Dans l'hydrostatique et l'hydrodynamique, qui terminent son cours de mécanique, l'auteur établit l'équation du mouvement varié des fluides, en partant d'une hypothèse plus vraisemblable que l'hypothèse du parallélisme des tranches.

Le dernier chapitre a pour objet la théorie des tourbillons. Massau s'inspire quelque peu de l'Ouvrage de M. H. Poincaré sur le même sujet. Mais sa méthode vectorielle lui permet d'exposer les principaux résultats avec plus de simplicité. C'est un fait connu que le théorème de Helmholtz sur la persistance des tourbillons conduit à une méthode pour étudier le mouvement des liquides. Massau montre que *le théorème de Helmholtz est insuffisant pour étudier le mouvement des gaz et qu'il est nécessaire d'y joindre un nouveau théorème, qu'il appelle le théorème de l'accélération de la dilatation cubique*. Pour faire voir que la distribution des vitesses obtenues par la comparaison électro-magnétique est la seule solution possible, quand le fluide est en repos à l'infini, l'auteur démontre le théorème suivant : « *Si les dérivées premières d'une fonction qui satisfait à l'équation de Laplace ne deviennent pas infinies, elles sont constantes* ». Au lieu de déduire cette proposition des théorèmes d'analyse qui sont la conséquence du principe de Dirichlet, Massau en donne une démonstration directe. Il applique ensuite la méthode des transformations au mouvement d'un fluide et il cherche une transformation de l'espace et des vitesses laissant subsister les débits et les flux de tourbillon. Appliquée au mouvement plan, cette transformation conduit à une généralisation de la méthode de la représentation conforme.

Les quelques lignes qui précèdent ne peuvent donner qu'une très vague idée du cours de mécanique de Massau ; il faut lire ces

pages, écrites dans un langage clair et concis, pour se rendre compte de la supériorité de sa méthode et des richesses inépuisables contenues dans cet ouvrage. Mais ce qui intéresse les mathématiciens à un degré plus élevé, c'est la multiplicité des questions traitées dans l'*Appendice* du tome I. L'auteur y montre, par une série d'exemples particulièrement bien choisis, les divers problèmes géométriques qui peuvent se résoudre en faisant usage des limites relatives.

Après avoir établi les différences essentielles entre la méthode infinitésimale et la méthode des limites en analyse, l'auteur se demande « s'il n'est pas possible de combiner les deux méthodes pour en former une seule qui soit rigoureuse comme la méthode des limites et qui puisse s'appliquer aux questions géométriques aussi facilement que la méthode des infiniment petits ». La méthode des limites relatives lui paraît réunir ces conditions. Ainsi qu'il le fait encore remarquer « la méthode infinitésimale est plus qu'une justification de la pratique des infiniment petits. L'intuition infinitésimale suffit dans les questions faciles ; mais il en est d'autres où l'on risquerait de s'égarer en s'abandonnant à l'intuition infinitésimale, tandis que la méthode des limites relatives conduit toujours au but ».

Il s'occupe d'abord du *problème des tangentes*, et il étudie particulièrement les tangentes aux cissoïdales, aux courbes algébriques, à la strophoïde, à la trisectrice de Mac-Laurin, aux surfaces et aux courbes parallèles, aux courbes diamétrales et à la courbe isoptique. Il donne ensuite ce qu'il appelle la règle suprême des normales aux courbes et aux surfaces.

Le *probème des rayons de courbure* fait l'objet d'un paragraphe spécial. Il y détermine les rayons de courbure des courbes algébriques, des courbes $F(r, P) = 0$ (r est le rayon vecteur, P distance du pôle à la tangente), des podaires et des antipodaires, des roulettes généralisées ; il retrouve plusieurs formules établies précédemment par Delaunay, Mannheim et Habich. Dans d'autres problèmes, il traite des rayons de courbure en un point multiple d'une courbe algébrique, des courbes diamétrales, des courbes conchoïdales. Il fait les mêmes recherches relativement aux rayons de courbure des surfaces et particulièrement des surfaces polaires réciproques, des surfaces inverses, des surfaces podaires et antipodaires.

Malheureusement, ces procédés sont peu connus et on ne les trouve pas dans les traités relatifs aux courbes. Il serait à souhaiter que les prochaines éditions des ouvrages suivants : G. Loria, *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven* ; F.-G. Teixeira, *Traité des courbes spéciales remarquables* ; H. Wieleitner, *Spezielle ebene Kurven* fassent mention des travaux de Massau et exposent les principes fondamentaux de sa méthode.

Dans le second chapitre de l'Appendice, l'auteur s'occupe des *compléments de géométrie symbolique à trois dimensions.* Il y traite successivement des produits et des moments de vecteurs et en particulier de ce qu'il appelle la formule d'expulsion, de la composition des points, des droites et des aires, de la généralisation des théorèmes des moments, des équations de composition et de leurs applications, des produits régressifs, du produit stationnaire des segments et de certains déterminants relatifs aux distances de 5 points.

Dans un troisième chapitre, il étudie la méthode des quaternions et il prouve que certains symboles dérivés des quaternions sont identiques aux notations vectorielles usitées par lui. Et il ajoute cette observation critique : « La méthode des quaternions ne s'est pas répandue ; il est aisé d'en trouver la raison. Les quaternions peuvent être utilisés en géométrie, en analyse, en mécanique ; pour en tirer le plus grand parti, il faudrait les enseigner dès le début des études mathématiques ; qui oserait tenter une pareille expérience ? On pourrait, il est vrai, sacrifier les applications géométriques et exposer les quaternions comme introduction à la mécanique ; mais, même à ce moment, la théorie des quaternions paraîtrait bien abstraite, et c'est sans doute pour ce motif qu'il n'existe pas encore de traité de mécanique ainsi conçu. » Les mêmes critiques ne s'appliquent pas aux symboles $\Sigma\overline{a}$, $(a\overline{a}')$; aussi ils se sont vulgarisés ; *nous avons l'espoir que le symbole* $M\overline{a}\overline{a}'$ *aura le même succès, et alors, on aura tous les avantages des quaternions, sans avoir rencontré leurs difficultés* ».

Il donne ensuite une nouvelle théorie des quaternions, explique les dénominations de verseur et de tenseur et esquisse, d'après Tait, une théorie des quaternions par les verseurs, tout en la critiquant.

Le chapitre suivant, du plus haut intérêt, traite de la *géométrie symbolique à 4 dimensions.*

Massau transporte ses définitions dans ce domaine et, avec une clarté digne d'éloges, il expose les principes de cette partie de la géométrie. Il établit une série de formules généralisant celles qu'il a rencontrées dans la géométrie à trois dimensions et il applique ses résultats à la géométrie à n dimensions. Je ne connais pas d'exposé plus limpide touchant cette géométrie, à laquelle il applique même la généralisation de sa fonction linéaire. Il définit les coordonnées homogènes et les hypercoordonnées ; il s'occupe des transformations géométriques, de l'involution des masses, des segments et des aires, du système focal de réciprocité. Autant d'idées originales, malheureusement trop peu connues !

Enfin, cette étude se termine par l'examen de la méthode de H. Grassmann. Tout en reconnaissant à ce dernier les mérites rappelés par M. Jahnke dans son mémoire cité plus haut, Massau

ne partage cependant pas complètement les idées du professeur de Stettin. Dans la critique de l'édition de 1844, le mathématicien belge écrit : « On y lit de longues considérations philosophiques, mais on y cherche en vain une définition bien précise des grandeurs extensives : on y trouve seulement que le vecteur d'un système à m dimensions peut changer de m manières différentes et indépendantes, qu'il a un commencement β et une fin γ et que, de là, résulte évidemment (?)

$$[\beta\gamma] = [\beta\alpha] + [\alpha\gamma]$$

α étant un autre élément ».

Massau trouve également que les explications de Grassmann relatives à l'harmonie et à la disharmonie des vecteurs sont peu satisfaisantes. « Il est difficile de comprendre, d'après cela, une équation de classe k dans un espace à m dimensions ».

Plus loin, à propos de la seconde partie de *Diē lineale Ausdehnungslehre*, Massau ajoute encore : « Il semble que c'est par définition que Grassmann admet que l'on engendre des équations géométriques en multipliant les équations entre les points. Il pose $\alpha\beta = -\beta\alpha$. Ces équations sont aussi vagues que les équations entre les produits de vecteurs. On n'est pas certain qu'en appliquant les règles admises, on n'arrivera pas à des résultats contradictoires ».

A propos de *Die Ausdehnungslehre* de 1862, Massau fait remarquer que, malgré la réclamation de Grassmann relativement à la priorité des clefs de Cauchy, il y a, dans la note de ce dernier, une idée qui n'existait pas chez le maître de Stettin. Comme on le sait, les clefs de Cauchy (*C. R.*, 1853) permettent d'exprimer les déterminants par des produits de quantités complexes. Selon lui, l'idée nouvelle de Cauchy est la base de l'exposition faite par Grassmann en 1862. « En résumé, dit-il, on peut dire que la méthode de Grassmann est la géométrie des points ; les vecteurs n'apparaissent que comme des cas particuliers ; ce sont des points à l'infini. C'est le contraire de la marche que nous avons suivie ; nous avons établi la théorie des vecteurs ; nous en avons déduit après les compositions ».

Pour terminer, mon vénéré maître s'occupe du *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre de Grassmann*, par G. Peano. Et il conclut : « Autant les livres de Grassmann sont obscurs et d'une lecture pénible, autant l'exposition de M. Peano est claire et intéressante. Cependant, nous persistons à croire que la géométrie des points ne peut avoir la simplicité de la géométrie vectorielle ; mais c'est, croyons-nous, parce que la méthode de Grassmann est imperfectible, malgré le beau livre de M. Peano ».

Ce rapide exposé ne permet pas de se représenter la valeur de l'œuvre de mon regretté professeur. Pour être complet, j'aurais dû analyser succintement les diverses questions qu'il a effleurées dans ses Compléments de mécanique et dans la Mécanique céleste. Malheureusement, il n'a pu laisser sur ce sujet des leçons écrites et il n'a donné ce cours qu'à des intervalles très irréguliers, par pénurie d'élèves se destinant au doctorat spécial en mécanique. J'ai eu l'occasion de suivre ces leçons ; qu'il me suffise d'affirmer que, là encore, son exposition n'a rien perdu de son originalité ni de sa simplicité. En mécanique céleste, il transporte ses notations vectorielles habituelles et la même simplification se produit dans l'exposé sans rien lui faire perdre de sa clarté ni de sa rigueur.

Mes connaissances sont insuffisantes pour pouvoir apprécier l'Intégration graphique de Massau, laquelle fait plutôt partie du domaine des sciences appliquées. M. d'Ocagne, à plusieurs reprises, a rendu hommage à l'élégance et à la profondeur des procédés de Massau. J'en appelle également à l'autorité de mes anciens condisciples, aujourd'hui ingénieurs distingués, qui ne tarissent pas d'éloges sur la beauté des théories du maître.

Au moment où il y a une tendance à uniformiser les notations vectorielles, malgré la divergence d'opinions à ce sujet, qu'il me soit permis de recommander à l'attention des mathématiciens qui s'occupent de cette question, les notations simples de Massau. En étudiant son cours complet de mécanique, on se rend compte du cachet tout spécial de sa méthode. Cela m'étonne même que, dans le tableau des deux mathématiciens italiens (*E. M.*, 1909, p. 41), il ne soit pas fait mention des notations de Resal, de Saint-Venant et de Massau. Selon moi, cela tient à ce que nos auteurs contemporains s'inspirent trop des idées grassmanniennes et hamiltoniennes. Je suis quelque peu effrayé, en parcourant ce tableau, par la diversité et la multiplicité des notations préconisées. Je me demande ce que doit être un cours de mécanique rédigé avec de tels symboles et j'ai quelque peine à me décider à lire un ouvrage de ce genre, habitué comme je le suis aux notations si simples de mon ancien professeur. Que le lecteur ne s'offusque pas de cette prétention de ma part ; qu'il n'y voie qu'un hommage rendu à la mémoire de Massau et qu'une revendication en faveur de son œuvre quelque peu délaissée.

Peut-être le simple titre de Cours de Mécanique a-t-il écarté les géomètres ; mais il est comme ces fruits dont l'écorce rugueuse cache une chair savoureuse ou un liquide parfumé. Aux géomètres particulièrement, je me permets de recommander la lecture de ce traité de mécanique, qui est autant, si ce n'est plus, un livre de géométrie. Ils y feront une ample moisson de découvertes et y trouveront une quantité de matériaux pour leurs recherches ultérieures.

Du reste, je me propose, si mes loisirs me le permettent, d'emprunter quelque jour encore l'hospitalité bienveillante de cette revue pour faire connaître à ses lecteurs quelques-unes des méthodes du mathématicien belge et en particulier le procédé si inattendu des limites relatives.

J'ai la ferme conviction que son œuvre sera étudiée de plus en plus par ses contemporains et que les générations futures le désigneront comme un novateur et un protagoniste de la méthode vectorielle.

J. Rose (Chimay, Belgique).

POUR UNE THÉORIE DE LA MESURE

(2me article.)[1]

La question des principes de la Géométrie (métrique) a été pleinement résolue par S. Lie, qui a déterminé les conditions auxquelles doit satisfaire un groupe continu de transformations pour définir une métrique euclidienne ou noneuclidienne. La condition essentielle est d'admettre un invariant binaire $J(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$.

Mais un tel groupe de transformations étant entièrement défini par son invariant, il y aurait évidemment économie logique à prendre pour objet des axiomes les fonctions numériques de deux points elles-mêmes. De plus, l'analogie serait ainsi complète avec l'idée de mesure telle qu'elle a été établie pour les continus à une dimension[1], enfin l'on éliminerait ainsi des principes de la géométrie la notion de groupe de transformations, bien complexe comme notion fondamentale, malgré le rôle prépondérant qu'elle joue en réalité au point de vue physique.

La propriété essentielle des *fonctions de distance* (j'adopterais aussi volontiers le terme de *fonctions métriques*) est

---

[1] Voir le 1er article de l'*Enseignement mathématique* du 15 mars 1910; t. XII, p. 89-97.

connue depuis longtemps. Elle sert de base à un mémoire très remarqué de M. de Tilly[1]; mais il restait à décider, ainsi que le fait d'ailleurs observer cet auteur, si cette propriété suffit pour caractériser complètement les deux catégories de fonctions susceptibles de définir des métriques euclidiennes ou non-euclidiennes.

Les résultats obtenus par S. Lie permettent de résoudre complètement cette question, c'est-à-dire de déterminer les propriétés qui caractérisent les fonctions de distance. L'objet de cet article est de les mettre en lumière.

I

Soit J une fonction de deux points, que nous appellerons leur distance, pour simplifier le langage; nous supposons qu'un point quelconque M peut être déterminé par ses distances à trois points donnés A, B, C, pourvu que ces quatre points occupent des positions générales les uns par rapport aux autres; en d'autres termes, les coordonnées d'un point quelconque M doivent s'exprimer, *en général*, en fonction de ses distances aux points A, B, C et des coordonnées de ceux-ci, c'est-à-dire que le système d'équations

$$J(x', y', z', x'_1, y'_1, z'_1) = J(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = k_1$$
$$J(x', y', z', x'_2, y'_2, z'_2) = J(x, y, z, x_2, y_2, z_2) = k_2$$
$$J(x', y', z', x'_3, y'_3, z'_3) = J(x, y, z, x_3, y_3, z_3) = k_3$$

admet, en général, une solution en x', y', z'.

On peut faire varier d'une manière continue les coordonnées des points A, B, C en laissant constantes leurs distances respectives. Les neuf coordonnées étant alors soumises à trois relations, la position du système des trois points dépend évidemment de six paramètres indépendants.

On peut faire participer au déplacement tous les points de l'espace en déterminant la position d'un point quelconque par la condition de conserver constantes ses distances aux

[1] R. de Tilly, *Essai de Géométrie générale.*

points A, B, C et par la continuité du déplacement. On obtient ainsi une série continue S de transformations définies par les équations précédentes, eu égard aux trois relations mentionnées entre les paramètres x'_1, y'_1, z'_1, x'_2, y'_2, z'_2, x'_3, y'_3, z'_3.

Si J est l'invariant d'un groupe continu de transformations, ce groupe est nécessairement contenu dans la série S et, s'il n'admet pas d'autre invariant indépendant, on reconnait facilement qu'il se confond avec cette série, dont les transformations laissent alors constante la distance $M_1 M_2$ de deux points quelconques; autrement dit cette distance reste constante lorsque les coordonnées des points A, B, C, M_1 et M_2 varient d'une manière continue en laissant constantes les autres distances déterminées par ce système de cinq points. *La distance $M_1 M_2$ est donc, dans ce cas, déterminée en fonction des neuf autres.*

Réciproquement, si la distance $M_1 M_2$ possède cette dernière propriété, elle restera évidemment constante dans toutes les transformations de la série S. Celle-ci, se trouvant alors composée de toutes les transformations qui admettent un invariant, constitue un groupe. Comme celui-ci ne saurait admettre d'invariant indépendant de J et qu'il est d'ailleurs par hypothèse continu, il doit figurer parmi les groupes à invariant binaire et unique déterminés par S. Lie.

Comme les considérations précédentes s'étendent manifestement aux continus à un nombre quelconque de dimensions, les invariants de ces groupes sont bien caractérisés par la propriété essentielle des fonctions de distance, qui peut être énoncée de la manière suivante :

A) *Pour un continu à* n *dimensions, il existe une relation entre les valeurs que prend la fonction de distance pour les* $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ *couples formés par* n + 2 *points.*

La proposition A) constitue donc l'axiome essentiel de la Géométrie métrique et l'on reconnait aussi, pour $n = 1$, la propriété fondamentale des métriques des continus à une dimension.

Pour ce dernier cas, l'on a pu déterminer l'expression gé-

nérale des fonctions métriques et l'on a vu[1] qu'il était toujours possible, moyennant un choix convenable du système de coordonnées, de prendre la fonction sous la forme $x_2 - x_1$ ou[2], ce qui revient au même, $(x_2 - x_1)^2$. On connaît aussi les expressions générales des fonctions susceptibles de définir des métriques euclidiennes ou non euclidiennes pour les continus à plusieurs dimensions. Il reste à déterminer les propriétés qu'il faut adjoindre à celle qui est exprimée par la proposition A) pour caractériser ces fonctions.

§ II.

S. Lie a déterminé, pour les continus à deux et à trois dimensions, tous les groupes continus de transformations admettant des invariants binaires. Si l'on ne distingue pas le domaine réel du domaine imaginaire, les invariants de ces groupes, c'est-à-dire les fonctions de distance des métriques correspondantes, peuvent toujours, par un choix convenable des coordonnées, être mises sous l'une des formes suivantes :

Espace.

$$(1)\quad \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 + (y_1 z_2 - z_1 y_2)^2 + (z_1 x_2 - x_1 z_2)^2}{(1 + x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2}$$

$$(2)\quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$(3)\quad z_1 + z_2 - \log(x_2 - x_1)^2 - c \log(y_2 - y_1)^2$$

$$(4)\quad z_2 - z_1 - \frac{(y_2 - y_1)^2}{2(x_2 - x_1)}$$

$$(5)\quad z_1 + z_2 - \log(x_2 - x_1)^2 - 2\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$(6)\quad z_2 - z_1 + x_1 y_2 - y_1 x_2 .$$

[1] G. Combebiac, *Pour une Théorie de la mesure*, 1er article, *L'Ens. math.*, p. 89-97.

[2] Il est à peine besoin d'indiquer que toutes les fonctions d'une fonction de distance définissent la même métrique.

Plan.

(1)' $$\frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2}{(1 + x_1 x_2 + y_1 y_2)^2}$$

(2)' $$\frac{y_2 - y_1}{(x_2 - x_1)^c}$$

(5)' $$(x_2 - x_1)\, e^{-\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

(6)' $$x_1 y_2 - y_1 x_2 .$$

Les métriques non euclidiennes (elliptiques ou hyperboliques) relèvent des expressions (1) et (1)'; les métriques euclidiennes relèvent, pour l'espace, de l'expression (2) et, pour le plan, de l'expression (2)', qui, pour $c = -1$ et en remplaçant en outre x et y respectivement par $x + yi$ et $x - yi$, devient en effet : $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

Les expressions (1) à (6) définissent aussi des fonctions de distance pour le plan des xy. Si l'on y fait en effet $z = 0$, les expressions (1) et (6) se réduisent à (1)' et à (6)'; (2) et (4) rentrent dans (2)', à laquelle devient équivalente (3); enfin, (5) devient équivalente à (5)'.

Observons aussi que les expressions (1) et (2) se réduisent à la même si l'on y annule les coordonnées y et z, ce qui montre bien que le classement des métriques en euclidiennes et non euclidiennes n'a aucun sens pour les continus à une dimension.

Les fonctions (3), (4), (5) et (6) présentent une particularité. Si J_1 et J_2 désignent les distances d'un point quelconque de coordonnées x, y, z à deux points fixes situés sur une même parallèle à l'axe des z, l'on a

$$J_2 = J_1 \pm (z_2 - z_1) .$$

C'est-à-dire que les deux fonctions J_1 et J_2 de x, y, z sont fonctions l'une de l'autre. Dans ce cas, le nombre des *pseudo-sphères* est ∞^3 au lieu de ∞^4, les points situés sur une même parallèle à l'axe des z étant les centres des mêmes pseudo-sphères.

Ainsi, pour l'espace, seules les fonctions (1) et (2) jouissent de la propriété négative suivante :

B) *Les distances d'un point variable d'une manière quelconque dans l'espace à deux points déterminés ne sont jamais fonctions l'une de l'autre.*

Les axiomes A) et B) caractérisent donc complètement les fonctions correspondant aux expressions (1) et (2). Il résulte d'ailleurs des travaux de S. Lie que ces conclusions s'étendent aux continus à n dimensions, pour $n > 3$, en substituant, bien entendu, aux expressions (1) et (2) les expressions correspondantes contenant $2n$ variables.

On peut enfin, parmi les métriques relevant des expressions (1) et (2), ne retenir que celles qui ont été généralement étudiées sous les dénominations d'euclidiennes et de non euclidiennes, en stipulant qu'*aucune pseudo-sphère ne doit passer par son centre*, ce qui implique, en particulier, que la surface représentée par l'équation

$$\mathrm{J}(x, y, z, x_0, y_0, z_0) = \mathrm{J}(x_0, y_0, z_0, x_0, y_0, z_0)$$

ne doit pas avoir de nappe *réelle* passant par le point x_0, y_0, z_0. Si le système de coordonnées est cartésien ou seulement projectif, on écarte ainsi les métriques pour lesquelles les pseudo-sphères sont des surfaces du second ordre réglées, c'est-à-dire celles que l'on obtient en remplaçant, dans les expressions (1) et (2), une ou deux des coordonnées x et y par les imaginaires ix et iy.

La question posée est donc bien résolue pour les continus à plus de deux dimensions ; si l'on s'en tient au point de vue analytique et que l'on ne fasse pas de distinction entre le domaine réel et le domaine imaginaire, l'on n'a bien à envisager que deux catégories de métriques caractérisées par les expressions (1) et (2).

La question n'est pas aussi simple pour les continus à deux dimensions. L'axiome B) élimine bien les métriques déterminées par l'expression (6)′ et par l'expression (2)′ pour $c = 1$; mais il laisse subsister d'autres métriques très différentes de celles qui ont fait jusqu'à présent l'objet d'études géométriques.

Pour $c \neq 1$, l'expression (2)' donne lieu à des métriques dont les *pseudo-cercles*, si le système de coordonnées est cartésien, ont des formes se rapprochant plus ou moins de l'ensemble formé par deux hyperboles équilatères complémentaires (en prenant pour fonction de distance le carré de l'expression (2)').

En remplaçant x et y respectivement par $x + yi$ et $x - yi$ et le paramètre c par un autre $b = 2i\frac{1-c}{1+c}$, il est facile de voir que l'on peut prendre la fonction de distance sous la forme

$$[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]\, e^{b \operatorname{arc\,tang} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}.$$

Si le nouveau système de coordonnées est cartésien, les pseudo-cercles sont des spirales s'enroulant dans un sens ou dans l'autre suivant que b est positif ou négatif et qui se réduisent à de vrais cercles pour $b = 0$ (métrique ordinaire).

Enfin, l'expression (5)' interprétée en coordonnées cartésiennes donne lieu à des pseudo-cercles constitués par des courbes à branches infinies.

On ne poussera pas plus avant cette étude, dont le principal objet était de mettre en lumière la simplicité des principes sur lesquels on peut fonder à la fois la Géométrie et une théorie de la mesure.

Il faut reconnaître pourtant que, si ces principes sont simples, ils ne sont pas facilement maniables ; entre l'axiome réellement essentiel A) et les expressions (1) et (2), il y a les puissantes analyses de S. Lie et l'on n'aperçoit aucun moyen simple de déduire des axiomes, par exemple, les propriétés primordiales des lignes qui jouent dans les diverses métriques le rôle des lignes droites. La même observation s'appliquerait d'ailleurs aux axiomes de Lie, les deux points de vue étant intimement liés. Voici en effet comment la question se pose.

La définition habituelle de la ligne droite est celle-ci : ensemble des points qui restent fixes dans tous les déplacements sans déformation laissant fixes deux points détermi-

nés M_1 et M_2. Mais cette définition est fort médiocre au point de vue analytique, car les déplacements qui laissent fixes les points d'une droite, laissent également fixes tous les points (imaginaires il est vrai) des deux plans isotropes qui passent par cette droite. De plus, la définition n'est pas valable pour le plan. Il conviendrait évidemment d'adopter une définition d'un caractère plus général et s'appliquant également au domaine réel et au domaine imaginaire. Cette définition pourrait être la suivante : l'ensemble des points x, y, z tels que les deux pseudo-sphères passant par un de ces points et ayant pour centres les points M_1 et M_2 aient un élément superficiel commun. Il est facile de voir que les équations de la ligne ainsi définie sont :

$$\frac{dJ_1}{dx} : \frac{dJ_1}{dy} : \frac{dJ_1}{dz} = \frac{dJ_2}{dx} : \frac{dJ_2}{dy} : \frac{dJ_2}{dz} .$$

en désignant par J_1 et J_2 les distances du point (x, y, z) aux points M_1 et M_2.

Mais de cette définition on ne peut déduire que la ligne passe par les deux points M_1 et M_2 ni que chacune des lignes ainsi définies est déterminée par deux quelconques de ses points, c'est-à-dire que cette détermination dépend de quatre paramètres. Cette dernière propriété est d'ailleurs intimement liée à celle ci : trois sphères dont les centres sont en ligne droite et qui ont un point commun passent par le même cercle, proposition qui peut se traduire dans le langage des fonctions de distance de la manière suivante : il existe une relation entre les distances d'un point variant d'une manière quelconque dans l'espace à trois points en ligne droite. Cette propriété s'exprime évidemment, en désignant par J_1, J_2 et J_3 les trois distances, par l'égalité suivante, qui doit être satisfaite pour toute les valeurs des variables x, y, z.

$$\begin{vmatrix} \frac{dJ_1}{dx} & \frac{dJ_1}{dy} & \frac{dJ_1}{dz} \\ \frac{dJ_2}{dx} & \frac{dJ_2}{dy} & \frac{dJ_2}{dz} \\ \frac{dJ_3}{dx} & \frac{dJ_3}{dy} & \frac{dJ_3}{dz} \end{vmatrix} = 0 .$$

On voit que ce n'est pas sans quelques difficultés que l'on pourra parvenir à établir une Géométrie rationnelle sur la seule notion de distance; mais quelle clarté pour ses fondements en comparaison de l'édifice lourdement artificiel que constitue le système des axiomes de caractère purement logique?

En terminant, je signale que l'axiome A_1, appliqué au plan, permet d'établir avec la plus grande simplicité la notion d'égalité des angles ainsi que les cas d'égalité des triangles, à condition toutefois que l'on ait pu, au préalable, établir que la fonction de distance détermine une métrique sur les lignes droites[1]. On voit que l'on est toujours ramené à édifier une théorie des lignes droites en fonction de la notion de distance.

G. COMBEBIAC (Montauban).

Appendice : Sur le Nombre irrationnel.

Dans mon premier article au sujet de la mesure, publié dans le numéro de mars de l'*Enseignement mathématique*, j'ai émis l'opinion que l'on pourrait se passer de la notion de nombre irrationnel dans toutes les applications des Mathématiques. Je dois reconnaître que l'expression a dépassé ma pensée.

Ce qui paraît incontestable, c'est que cette notion ne saurait être rattachée, pas plus historiquement que logiquement, à celle de mesure, car ce qui est naturel, c'est précisément d'admettre que toutes les grandeurs de même espèce sont commensurables deux à deux, conception qui suffit parfaitement tant que l'on se borne à mettre en œuvre leur mesure. Si le nombre irrationnel s'est imposé avant qu'il en eût été donné une définition correcte, c'est évidemment en Géométrie avec certains rapports dans la détermination desquels interviennent d'autres notions que celle de mesure, notamment la notion de fonction.

La nécessité (ou, ce qui revient au même, la convenance) de l'emploi du nombre irrationnel dans le domaine physique, paraît plutôt devoir être recherchée dans l'idée de continuité, non pas des ensembles, mais des fonctions. L'intuition expérimentale

[1] La fonction J détermine évidemment une métrique sur chacune des pseudo-sphères et sur chacun des pseudo-cercles; il suffit, pour le voir, d'appliquer l'axiome A à cinq points, savoir: pour la pseudo-sphère, le centre et quatre points quelconques de la surface; pour le pseudo-cercle, les centres de deux pseudo-sphères contenant la courbe et trois points quelconques de celle-ci.

exige, en effet, qu'une fonction continue définie physiquement prenne, dans un intervalle quelconque, toutes les valeurs comprises entre ses valeurs extrêmes, propriété qui appartient bien aux fonctions appelées continues par les mathématiciens. Rien n'empêche d'ailleurs, comme on sait, d'étendre cette dernière notion aux champs purement rationnels (la définition peut en effet se résumer dans la formule :

$$\lim_{x=a} f(x) = f(a) ;$$

mais alors la propriété énoncée ne subsiste pas ; c'est ainsi que la fonction x^2 ne prend plus la valeur rationnelle 2. On est conduit à compléter le champ rationnel par tous ses points-limites, ce que n'exigeait à aucun degré l'idée seule de la mesure.

Il semble donc bien, en définitive, que ce soit dans l'idée de fonction continue, et non dans celle de mesure que l'on doit chercher la raison d'être du nombre irrationnel dans les applications des Mathématiques.

G. Combebiac (Montauban).

SUR LES DÉVELOPPÉES D'UNE COURBE GAUCHE[1]

Les propriétés connues des développées d'une même courbe gauche permettent de soupçonner que la recherche de toutes ces développées se ramène à l'étude d'une même équation différentielle dont il suffit de connaître une intégrale particulière, pour en trouver l'intégrale générale.

Effectivement, le problème se traduit par une équation de Ricatti ; mais un examen quelque peu attentif de cette équation permet d'en exprimer l'intégrale générale au moyen d'une quadrature.

Soient x, y, z, les coordonnées rectangulaires d'un point M, mobile sur une courbe donnée S, t l'angle que fait, avec

[1] La même question a été traitée, sous une forme toute différente, par M. Bianchi, dans le premier chapitre de son traité de Géométrie infinitésimale : le lecteur voudra bien, je l'espere, reconnaître que chacune des deux méthodes a son intérêt propre.

l'axe Ox, la tangente au point m, projection de M sur le plan des xy, à la courbe lieu de m, s l'arc de cette courbe compté à partir d'un point fixe, de sorte que l'on ait

$$dx = \cos t ds \ , \quad dy = \sin t ds \ ; \tag{1}$$

on peut compléter la détermination de la courbe S, en posant

$$dz = \frac{ds}{T} \tag{2}$$

T désignant une fonction donnée de t.

Soient encore α, β, γ, les angles que fait, avec les axes de coordonnées, une normale, en M, à la courbe S. Pour que cette normale soit tangente à une courbe Σ, développée de la courbe S, il faut que l'on ait

$$\frac{d \cos \alpha}{d \cos \gamma} = \frac{dx}{dz} \ , \quad \frac{d \cos \beta}{d \cos \gamma} = \frac{dy}{dz} \ , \tag{3}$$

comme on le démontre dans tous les cours de calcul différentiel. Mais il y a, entre α, β, γ, la relation,

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \ ,$$

qu'on peut remplacer par celles-ci :

$$\cos \alpha = \cos \varphi \sin \gamma \ , \quad \cos \beta = \sin \varphi \sin \gamma \ , \tag{4}$$

φ désignant une fonction de t, définie par une relation que nous voulons établir.

A cet effet, nous transformons les équations (3), au moyen des formules (1), (2), (4), et nous trouvons :

$$- \sin \varphi \frac{d\varphi}{d\gamma} + \operatorname{cotg} \gamma \cos \varphi = - T \cos t \ ,$$

$$\cos \varphi \frac{d\varphi}{d\gamma} + \operatorname{cotg} \gamma \sin \varphi = - T \sin t \ .$$

Nous en déduisons :

$$\frac{d\varphi}{d\gamma} = T \sin(\varphi - t) \ , \quad \operatorname{cotg} \gamma = - T \cos(\varphi - t) \ , \tag{5}$$

ou bien :

$$\gamma = \frac{\pi}{2} + \text{arc tg } T \cos(\varphi - t)$$

et

$$d\gamma = \frac{T' \cos(\varphi - t)\, dt - T \sin(\varphi - t)(d\varphi - dt)}{1 + T^2 \cos^2(\varphi - t)} \tag{6}$$

Des équations (5) et (6) résulte celle-ci

$$(1 + T^2 \cos^2(\varphi - t))\, d\varphi = T \sin(\varphi - t)[T' \cos(\varphi - t)\, dt - T \sin(\varphi - t)(d\varphi - dt)] ,$$

équivalente à

$$(1 + T^2)\, d\varphi = T \sin(\varphi - t)[T' \cos(\varphi - t) + T \sin(\varphi - t)]\, dt ,$$

ou bien, à :

$$(1 + T^2)(d\varphi - dt) = [TT' \sin(\varphi - t) \cos(\varphi - t) + T^2 \sin^2(\varphi - t) - (1 + T^2)]\, dt ,$$

ou encore, à :

$$(1 + T^2)\, \frac{d\varphi - dt}{\sin^2(\varphi - t)} = [TT' \cot(\varphi - t) - (1 + T^2) \cot^2(\varphi - t) - 1]\, dt .$$

ou enfin, à :

$$(1 + T^2)\left[- \frac{d \operatorname{cotg}(\varphi - t)}{dt} + \cot^2(\varphi - t)\right] = TT' \operatorname{cotg}(\varphi - t) - 1, \tag{7}$$

et c'est bien là une équation de Riccati, où la fonction inconnue est cotg $(\varphi - t)$.

Mais si l'on pose

$$\operatorname{cotg}(\varphi - t) = - \frac{1}{u} \frac{du}{dt} \tag{8}$$

on transforme l'équation ci-dessus en une équation différentielle du second ordre, savoir

$$(1 + T^2)\, \frac{d^2u}{dt} + TT' \frac{du}{dt} + u = 0 ,$$

dont on trouvera l'intégrale générale comme il suit. Si l'on multiplie son premier membre par $\frac{du}{dt}$, on trouve :

$$D_t\left[\left(1 + T^2\right)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + u^2\right] = 0 ,$$

d'où l'on déduit, en désignant par k une constante arbitraire :

$$(1+\mathrm{T}^2)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + u^2 = k^2 ,$$

ou bien

$$\frac{du}{\pm\sqrt{k^2-u^2}} = \frac{dt}{\sqrt{1+\mathrm{T}^2}} ,$$

et encore

$$\text{arc cos}\,\frac{u}{k} = \int\frac{dt}{\sqrt{1+\mathrm{T}^2}} , \quad u = k\cos\int\frac{dt}{\sqrt{1+\mathrm{T}^2}} \tag{9}$$

Finalement, en vertu des formules (8) et (9), on trouve

$$\text{cotg}\,(\varphi - t) = (1+\mathrm{T}^2)^{-\frac{1}{2}}\,\text{tg}\int\frac{dt}{\sqrt{1+\mathrm{T}^2}} \tag{10}$$

et puisque l'intégrale écrite dans cette dernière équation comporte un terme arbitraire, c'est bien là l'intégrale générale de l'équation (7).

V. Jamet (Marseille).

SUR DES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE L'ÉQUATION DU MOUVEMENT DE LA CHALEUR ET DE L'ÉQUATION DES TÉLÉGRAPHISTES

---

1. — On connaît des exemples de questions de Géométrie qui dépendent d'équations aux dérivées partielles du second ordre réductibles à de certaines équations de la Physique mathématique. C'est ainsi que la détermination des surfaces dont les asymptotiques se projettent sur un plan donné, suivant des courbes données (problème qui a été étudié par divers géomètres, par MM. Kœnigs, Bioche, etc.), a été ramenée, dans des cas particuliers, à l'équation du mouvement de la chaleur dans un espace à une dimension ; Bianchi a établi, pour la première fois, que les surfaces dont les asympto-

tiques d'un système se projettent sur un plan donné suivant des circonférences concentriques, dépendent de cette équation ; ce théorème a été étendu par M. Buhl, dans un Mémoire inséré au *Bulletin de la Société mathématique* de 1903, aux courbes intégrales de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{Q},$$

dans laquelle P et Q sont des fonctions linéaires de x et de y.

Outre l'intérêt de pure curiosité que peuvent présenter de tels résultats, il est possible de tirer profit de nombreux travaux relatifs aux équations de la Physique mathématique, d'utiliser, par exemple, les intégrales qui en ont été indiquées.

I

2. — Dans un de ses Mémoires, Bonnet annonça qu'il étudierait ultérieurement les surfaces qui admettent des hélices pour lignes asymptotiques; cependant aucun travail ne fut publié sur cette question importante et délicate, dont on ne connaît que de rares solutions (surface minima d'Enneper). — En observant que, si une hélice est une asymptotique d'une surface, cette courbe est une ligne de plus grande pente de la surface pour une orientation donnée, et que, réciproquement, si une asymptotique est ligne de plus grande pente d'une surface elle est aussi une hélice, j'ai été conduit à *déterminer les surfaces* (S) *dont les lignes de plus grande pente sont des asymptotiques.* Ces surfaces (S) présentent une particularité intéressante : les hélices qui constituent une famille d'asymptotiques ont toutes la même droite directrice.

Soit un système d'axes rectangulaires Ox, Oy et Oz, ce dernier étant vertical. Les équations respectives des lignes de plus grande pente et des asymptotiques étant

$$pdy - qdx = 0,$$

$$rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = 0,$$

l'équation des surfaces (S) est

$$p^2r + 2pqs + q^2t = 0 \ ;$$

cette équation et l'équation

$$y^2r - 2xys + x^2t = 0$$

des surfaces dont les asymptotiques d'un système sont situées sur des cylindres de révolution autour de Oz, se correspondent par la transformation de Legendre. Il en résulte une propriété immédiate des développables circonscrites aux surfaces (S) le long des lignes de plus grande pente ; il en résulte aussi, ce qui nous intéresse davantage, que la *détermination des surfaces* (S) *est réductible à l'intégration de l'équation du mouvement de la chaleur*, en vertu du théorème de Bianchi.

3. — Considérons alors une surface quelconque, non développable, enveloppée par le plan

$$x \cos\varphi \cos\psi + y \cos\varphi \sin\psi + z \sin\varphi = \varpi \ ;$$

ϖ désigne la distance de l'origine O au plan tangent ; c'est une fonction de la longitude ψ et de la latitude φ de l'image sphérique du point de contact, dans la représentation sphérique de Gauss.

Dans cette représentation tangentielle, l'équation différentielle des images sphériques des lignes de plus grande pente est

$$D'd\varphi + D''d\psi = 0 \ ,$$

et celle des images des asymptotiques est

$$Dd\varphi^2 + 2D'd\varphi d\psi + D''d\psi^2 = 0 \ ;$$

D, D' D'' sont les déterminants de Gauss (notations de Bianchi) ; leurs expressions sont

$$\begin{aligned} D &= \varpi + r \ , \\ D' &= q \operatorname{tg}\varphi + s \ , \\ D'' &= \varpi \cos^2\varphi - p \sin\varphi \cos\varphi + t \ , \end{aligned}$$

p, q, r, s, t désignant les dérivées de ϖ par rapport à φ et à ψ.

En excluant le cas de dégénérescence tangentielle de la surface en une courbe, pour lequel $DD'' - D'^2$ est nul, on voit que les surfaces (S) sont caractérisées par l'équation $D'' = 0$. *Les images sphériques des asymptotiques qui sont lignes de plus grande pente sont les parallèles de la sphère.* En d'autres termes, en adoptant la dénomination de Minding, ces asymptotiques sont les parallèles de la surface (S).

L'équation $D'' = 0$ est une équation du second ordre qu'une transformation fort simple ramène à l'équation du mouvement de la chaleur. Posons en effet

$$u = \log(\operatorname{tg} \varphi), \quad \varpi = V \sin \varphi ;$$

D, D', D'' deviennent en général

$$D = \frac{1}{\sin \varphi \cos^2 \varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial u}\left(V + \frac{\partial V}{\partial u}\right),$$

$$D' = \frac{1}{\cos \varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi}\left(V + \frac{\partial V}{\partial u}\right),$$

$$D'' = \sin \varphi \cdot \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} - \frac{\partial V}{\partial u}\right);$$

l'expression

$$z = V + \frac{\partial V}{\partial u},$$

qui figure dans D et D' n'est autre, d'ailleurs, que la cote du point de contact du plan avec la surface enveloppée. Sous la forme précédente, il est évident que l'équation $D'' = 0$ n'est autre que l'équation

$$\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2}$$

du mouvement de la chaleur.

4. — Les surfaces (S) dépendant de l'équation du mouvement de la chaleur, on pourra leur appliquer des résultats connus et relatifs à cette équation célèbre.

On pourra définir ces surfaces par les formules

$$x = e^u \left[-\cos\psi \frac{\partial V}{\partial u} - \sin\psi \frac{\partial V}{\partial \psi} \right],$$

$$y = e^u \left[-\sin\psi \frac{\partial V}{\partial u} + \cos\psi \frac{\partial V}{\partial \psi} \right],$$

$$z = V + \frac{\partial V}{\partial u},$$

dans lesquelles V sera exprimée en fonction de ψ et de u par l'intermédiaire d'une intégrale définie : on prendra, par exemple, l'intégrale que donna Ampère

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} \Theta(\psi + 2\lambda\sqrt{u})\, d\lambda,$$

ou celle

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(\lambda) \cdot e^{i\lambda\psi - \lambda^2 u}\, d\lambda,$$

que considère M. H. Poincaré.

On pourra aussi prendre pour V un développement en série de la forme

$$V = U_1 + \frac{\psi - \psi_0}{1} U_2 + \frac{(\psi - \psi_0)^2}{2\,!} U'_1 + \frac{(\psi - \psi_0)^3}{3\,!} U'_2 + \dots.$$

où U_1 et U_2 sont deux fonctions arbitraires de u, de dérivées U'_1, U'_2, ...; un tel développement est convergent tant que u diffère de toute valeur qui soit singulière pour U_1 ou U_2. A ce développement contenant deux fonctions arbitraires, peut être sublitué un développement ne contenant qu'une fonction arbitraire Ψ de ψ :

$$V = \Psi + \frac{u - u_0}{1} \Psi'' + \frac{(u - u_0)^2}{2\,!} \Psi^{IV} + \dots;$$

cette solution, lorsque c'est une série convergente, est aussi générale que la précédente, d'après Poisson[1].

[1] Voir à ce sujet une courte note de M. Le Roux « *Sur les intégrales analytiques de l'équation*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ ».}$$

(*Bulletin des Sciences Mathématiques* de M. Darboux, 1895, p. 127-128).

Comme application d'une autre nature, je citerai les formules de transformation à six constantes arbitraires données par M. Appell et qui laissent invariante l'équation du mouvement de la chaleur.

Laissant de côté ces applications de résultats relatifs à l'équation $r = q$, je choisirai parmi les solutions particulières connues

$$V = e^{a\psi + a^2 u}, \qquad V = \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-\frac{\psi^2}{4u}}, \ldots,$$

la première de ces solutions : elle donne des résultats intéressants, relativement à des surfaces étudiées par M. Buhl, dans deux Mémoires insérés aux *Nouvelles Annales* de 1908 et de 1909 [1].

II

5. Je considère donc la solution

$$V = e^{a\psi + a^2 u};$$

je poserai

$$a = \operatorname{cotang} \alpha .$$

Les coordonnées cylindriques d'un point quelconque de la surface (S) correspondante sont pour cette solution particulière :

$$\rho = -\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} e^{u} V, \; \theta = \psi - \alpha, \; z = \frac{V}{\sin^2\alpha};$$

il résulte de ces expressions que l'équation de la surface (S), en coordonnées cylindriques, est de la forme

$$\Phi(z) = a\theta + F(\rho)$$

en posant

$$\Phi(z) = (1 + a^2) \log z + \text{const.} ,$$

$$F(\rho) = a^2 \log \rho ;$$

[1] Je dois cependant signaler qu'à la solution $V = \psi$, correspond l'*hélicoïde gauche* à plan directeur, $\omega = \psi \sin \varphi$, pour lequel les asymptotiques sont les parallèles $\psi =$ const. et les méridiens $\psi =$ const.

on reconnaît là des surfaces spirales qui rentrent dans la catégorie de celles que M. Buhl a étudiées ; en appliquant les résultats auxquels il a été conduit, on voit que les *deux familles d'asymptotiques se projettent sur Oxz suivant des spirales logarithmiques homothétiques :* ces surfaces appartiennent, par suite, et à un *double titre,* à la famille des surfaces dont *une* famille d'asymptotiques se projette sur Oxy suivant des spirales logarithmiques homothétiques, c'est-à-dire aux surfaces étudiées par M. Buhl dans son Mémoire de 1903, antérieurement cité.

Il est intéressant de se reporter aux trois Mémoires de M. Buhl, afin de comparer les résultats obtenus par les méthodes qu'il a indiquées avec ceux que je donne ici.

Je m'occuperai d'abord des asymptotiques qui sont des hélices et des lignes de plus grande pente : j'ai déjà signalé que ces courbes étaient les parallèles de la surface. Le long de l'une d'elles φ et u sont constants; on a donc

$$\rho = e^{a\theta} \times \text{const.} , \quad \frac{\rho}{z} = \text{const.} ;$$

ces relations expriment que les projections des asymptotiques sont des spirales logarithmiques homothétiques (α est précisément l'angle de la tangente et du rayon vecteur) et que ces asymptotiques sont tracées sur des cônes de révolution autour de Oz et de sommet O. D'où il résulte que ce sont des courbes bien connues sous le nom d'*hélices cylindro-coniques.*

En ce qui concerne la seconde famille d'asymptotiques des surfaces (S), l'équation à intégrer est

$$D\,d\varphi + 2D'\,d\psi = 0 ,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial z}{\partial u}\,du + 2\,\frac{\partial z}{\partial \psi}\,d\psi = 0 .$$

Je reviendrai prochainement sur cette équation[1]. Dans le

[1] J'étudierai plus généralement les équations différentielles du premier ordre qui peuvent être mises sous la forme

$$\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + m\,\frac{\partial z}{\partial y}\,dy = 0 ,$$

z étant une fonction connue de x et de y, et m une constante quelconque. Je signalerai notam-

cas particulier actuel, elle donne

$$au + 2\psi = \text{const.},$$

d'où l'équation des projections

$$\rho = e^{-\frac{2+a^2}{a}\theta} \times \text{const.}$$

ce sont bien des spirales logarithmiques homothétiques. Les images sphériques de ces asymptotiques ne présentent rien de remarquable.

Le cas $a = \sqrt{2}\,.\,i$ correspond à l'une des surfaces de Bianchi : les projections des asymptotiques (de la seconde famille) sont des cercles concentriques. Cette surface est d'ailleurs imaginaire.

III

6. — Je terminerai ce Mémoire par une application nouvelle de l'*équation des télégraphistes* : c'est le nom donné par MM. Poincaré, Picard et Boussinesq, dans trois Communications à l'Académie, en 1893 et 1894, à l'équation

$$A\,\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2B\,\frac{\partial V}{\partial t} = C\,\frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

qui représente la variation du potentiel V dans un fil ; les différents termes correspondent respectivement à la self-induction, à la résistance ohmique et à la capacité du fil. Par un choix convenable d'unités, l'unité de vitesse étant la vitesse de la lumière, on peut réduire les coefficients constants A, B, C à l'unité. Posant alors

$$V = U\,.\,e^{-t}.$$

l'équation des télégraphistes prend la forme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + U\,;$$

---

ment un cas d'intégration de l'équation différentielle qui correspond à une fonction z dépendant de deux fonctions arbitraires de x et de deux fonctions arbitraires de y, c'est-à-dire à une fonction z intégrale générale d'une certaine équation aux dérivées partielles du quatrième ordre.

c'est là un type d'équations fréquent en Physique ; un changement bien simple de variables, mais qui introduit les imaginaires, ramène cette équation à celle qui se présente dans les vibrations des membranes

$$\Delta_2 U + U = 0 .$$

Il est préférable de ramener l'équation des télégraphistes à l'équation à invariants égaux et constants

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u \partial v} + U = 0 ;$$

cette dernière équation aux dérivées partielles, dont les rapports avec l'équation différentielle de Bessel sont bien connus, est un type auquel on peut réduire un grand nombre d'équations : je citerai les exemples suivants, empruntés à Ampère et Imschenetsky :

$$rx^2 + 2sx^2 + \left(x^2 - \frac{b^2}{q^2x^2}\right) t - 2x = 0 ,$$

$$r + 2qs + (q^2 - b^2)\, t = 0 ;$$

je citerai également l'équation remarquable

$$s^2 = 4pq ,$$

rencontrée par Craig dans des recherches géométriques, et que M. Goursat ramena ultérieurement à la forme $s = z$.

J'ai établi, dans un autre Mémoire [1], le théorème suivant : *La détermination des surfaces dont les images sphériques des lignes de courbure sont des loxodromies inclinées à 45° sur les méridiens, peut être ramenée à l'intégration de l'équation des télégraphistes.* Ce n'est là qu'un cas particulier d'un théorème plus général concernant des loxodromies quelconques.

Considérons, en effet, les loxodromies

$$d\varphi = \operatorname{cotg} \alpha \,.\, d\psi \,.\, \cos \varphi ,$$

[1] *Application de l'équation des télégraphistes aux surfaces dont les images sphériques des lignes de courbure sont des loxodromies.* (*Nouvelles Annales*, Janvier 1910.)

inclinées à $\alpha°$ sur les méridiens. L'équation des images sphériques des lignes de courbure étant

$$d\varphi^2 - \cos^2\varphi \,.\, d\psi^2 + \frac{D'' - D\cos^2\varphi}{D'}\, d\varphi d\psi = 0 \,,$$

l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$D'' - D\cos^2\varphi + 2\,\mathrm{cotg}\,2\alpha\; D'\cos\varphi = 0 \,,$$

représente les surfaces (Σ) dont les images sphériques des deux systèmes de lignes de courbure sont les loxodromies.

$$d\varphi = -\,\mathrm{tg}\,\alpha \,.\, d\psi \,.\, \cos\varphi \,.$$

$$d\varphi = \mathrm{cotg}\,\alpha \,.\, d\psi \,.\, \cos\varphi \,.$$

Introduisons alors l'argument τ des fonctions hyperboliques liées aux fonctions circulaires de φ par les relations de M. Laisant

$$\sin\varphi = th\tau \,,\; \cos\varphi \,.\, ch\tau = 1 \,,\; \mathrm{tg}\,\varphi = sh\tau \,,$$

et prenons pour nouvelle fonction inconnue la fonction U de ψ et de τ définie par la relation

$$U = \varpi ch\tau \,.$$

Les déterminants D, D′, D″ de Gauss deviennent

$$D = \frac{\partial^2 U}{\partial\tau^2}\, ch\tau - \frac{\partial U}{\partial\tau}\, sh\tau \,,$$

$$D' = \frac{\partial^2 U}{\partial\tau\partial\psi} \,,$$

$$D'' = \left(U + \frac{\partial^2 U}{\partial\psi^2}\right)\frac{1}{ch\tau} - \frac{\partial U}{\partial\tau} \cdot \frac{sh\tau}{ch^2\tau} \,;$$

l'équation considérée devient :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\psi^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial\tau^2} + U + 2\,\mathrm{cotg}\,2\alpha\, \frac{\partial^2 U}{\partial\tau\partial\psi} = 0 \,.$$

Pour $\alpha = 45°$, cette équation est identique à celle en laquelle M. Poincaré transforme l'équation des télégraphistes. C'est bien là le théorème que j'avais établi. Mais il

suffit de poser

$$\varphi = \frac{u+v}{\sin \alpha \cos \alpha}, \psi = \frac{v}{\sin^2 \alpha} - \frac{u}{\cos^2 \alpha},$$

pour transformer l'équation générale en

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u \partial v} = U ;$$

d'où résulte le théorème : *La détermination des surfaces dont les images sphériques des lignes de courbure sont des loxodromies est réductible à l'équation des télégraphistes.*

E. Turrière (Toulouse).

SUR LA NOTION DE PUISSANCE EN MÉCANIQUE

Dans l'enseignement élémentaire de la mécanique, on se contente le plus souvent d'une définition trop rapide de la puissance. Il conviendrait cependant d'insister sur cette notion, d'une grande l'importance pratique. Les élèves entendent parler, dans la vie courante, de *chevaux* ou de *watts* plus souvent que de *kilogrammètres* ou *d'ergs*[1]; il est donc utile de leur apprendre à appliquer les formules de mécanique à l'évaluation des nombres correspondants.

Je vais montrer rapidement ici comment on peut définir avec soin la notion de puissance et la faire avantageusement intervenir à côté de celle de travail élémentaire soit en statique soit en dynamique. Un très léger changement des équations (dérivées figurant à la place de différentielles) amène leurs différents termes à se prêter immédiatement au

[1] L'emploi fréquent de l'*hectowatt-heure* ou du *cheval-an* comme unités pratiques d'énergie est assez significatif au point de vue de l'importance industrielle respective des mesures de puissance et de travail.

calcul numérique[1] et par cela même les rend plus intuitives pour ceux qui étudient la mécanique en vue de ses applications. Quelques propositions d'un caractère plus théorique sur le changement du trièdre de référence sont donnés, à titre d'exercice, à la fin de cet article; elles s'adressent à des lecteurs bien habitués aux principes généraux de la dynamique des systèmes.

1. — **Définitions et unités.** — Etant donné un travail E effectué pendant un certain temps T, la *puissance moyenne* correspondante est une grandeur proportionnelle au travail E et inversement proportionnelle au temps T. On peut dès lors parler du rapport des puissances moyennes correspondant à deux travaux E, E′ effectués respectivement en des temps T et T′, et, par suite, de la *mesure d'une puissance* moyenne rapport de cette puissance à une puissance type choisie comme unité.

Cette puissance (moyenne) unité correspond dans un *système absolu d'unités* à un travail unité effectué dans l'unité de temps; pour les deux systèmes absolus couramment employés, elle est le kilogrammètre par seconde ou l'erg par seconde.

La *pratique* a consacré d'autres unités : le *cheval vapeur* (75 kilogrammètres par seconde), le *poncelet* (100 kilogrammètres par seconde), le *watt* (10^7 ergs par seconde); le *kilowatt* (1000 watts) est sensiblement égal au poncelet $\left(\frac{1000}{981}\text{ poncelet}\right)$.

Avec des unités absolues, *le nombre qui mesure une puissance moyenne est égal au quotient du nombre qui mesure le travail par le nombre qui mesure le temps.* On passe aisément de ce cas à celui des unités pratiques. Bien entendu si les unités ne sont pas spécifiées, les formules de mécanique ne sont applicables qu'à des nombres correspondant à des unités absolues.

Considérons maintenant le travail effectué par un ensemble de forces agissant sur un système matériel en mouve-

---

[1] Il n'en est pas ainsi des équations où figure le travail élémentaire, à moins de faire une confusion fâcheuse entre très petit et infiniment petit.

ment pendant l'intervalle de temps séparant les instants t et $t+h$. Lorsque h tend vers zéro, t restant fixe, la puissance moyenne correspondante tend en général vers une limite qu'on appelle la *puissance à l'instant* t correspondant à l'ensemble de forces et au mouvement considéré.

La puissance instantanée ainsi définie se mesure avec les mêmes unités que la puissance moyenne. L'une et l'autre peuvent être évaluées algébriquement comme les travaux auxquels elles correspondent.

2. — **Expressions diverses de la puissance instantanée.** — En pratique, pour arriver à l'expression de la puissance, il n'est pas nécessaire de passer par l'intermédiaire du travail ; ainsi que le montrent les résultats suivants faciles à obtenir.

La puissance à l'instant t *d'une force agissant sur un point matériel en mouvement est égale au produit de la force par la vitesse du point à l'instant considéré et par le cosinus de l'angle des deux vecteurs représentatifs.*

Donc, si X, Y, Z et v_x, v_y, v_z sont les projections sur trois axes rectangulaires de la force et de la vitesse, la puissance a pour expression

$$p = Xv_x + Yv_y + Zv_z\,. \tag{1}$$

On observe que la puissance correspondant à la résultante de plusieurs forces est la somme des puissances correspondant à ces forces. En décomposant la vitesse en plusieurs composantes, on a une proposition analogue, utilisée plus loin.

Il est à remarquer que la méthode habituellement suivie pour obtenir le travail élémentaire d'un dyname agissant sur un solide fait intervenir la puissance instantanée ; il suffit donc d'énoncer le résultat suivant :

La puissance à l'instant t *d'un dyname agissant sur un solide en mouvement est égale au moment de ce dyname et du torseur des rotations instantanées.*

Deux cas particuliers sont très importants en pratique, leur démonstration directe est d'ailleurs immédiate et accessible aux débutants.

Si le mouvement instantané est une translation, la puissance

égale le produit algébrique de la vitesse de translation par la projection sur cette vitesse de la résultante de translation du dyname considéré.

S'il y a une *rotation tangente*, la puissance est égale au produit de la vitesse angulaire de rotation instantanée par le moment résultant, par rapport à l'axe de cette rotation, du dyname considéré.

Ces cas particuliers se prêtent à des *exercices numériques de caractère pratique*, avec changements d'unités, tels que les suivants :

Déterminer (en chevaux) la puissance correspondant au mouvement uniforme de translation d'un train, la vitesse étant connue (en kilomètres à l'heure) ainsi que la tension (en kilogrammes) des barres d'attelage reliant le train à la locomotive.

Connaissant (en tours par minute) la vitesse de rotation d'une roue de rayon donné (en mètres) et la puissance (en chevaux) produite par l'action d'une force agissant tangentiellement sur cette roue (pression des dents d'un engrenage, différence des tensions des brins d'une courroie, frottement en un point de la roue, etc...) évaluer cette force (en kilogrammes).

3. — **Principes des vitesses virtuelles et des forces vives.** — Nous relierons le second principe au premier en utilisant le principe d'Alembert.

Tout d'abord, on a les deux propositions suivantes :

1. — *Etant donné un système en équilibre, la somme des puissances virtuelles de toutes les forces pour un mouvement quelconque des points du système est nulle.*

2. — *Etant donné un système en équilibre, assujetti à des liaisons sans frottement, la somme des puissances virtuelles des forces données est nulle pour tout mouvement du système compatible avec les liaisons.*

On reconnaît là deux propositions classiques mais énoncées habituellement d'une façon un peu différente.

Nous allons les rapprocher du principe de d'Alembert ; mais nous calculerons au préalable *la puissance des forces d'inertie* en supposant que les vitesses intervenant dans ce

calcul sont les *vitesses réelles* des points du système. Alors l'expression (1) donne pour la puissance de la force d'inertie d'un point de masse m rapporté aux axes fixes $Oxyz$:

$$-m\left[\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt}\right]$$

c'est-à-dire $-\frac{d}{dt}\frac{mv^2}{2}$, v désignant la vitesse du point.

Une sommation étendue à tous les points du système montre que :

La puissance des forces d'inertie, pour le mouvement réel d'un système, est à chaque instant égale à la dérivée par rapport au temps changée de signe de la demi-force vive du système[1].

Les énoncés (1) et (2) du début de ce n° donnent alors les formes suivantes à deux propositions classiques :

1. — *La dérivée par rapport au temps de la demi-force vive d'un système égale la somme des puissances (au même instant) des forces agissant sur le système.*

2. — *Etant donné un système matériel assujetti à des liaisons sans frottement et indépendantes du temps, la dérivée par rapport au temps de la demi-force vive du système est égale à la somme des puissances des forces données agissant sur le système*[2].

L'application des théorèmes précédents, est, comme on sait, particulièrement importante dans la théorie des machines; c'est là précisément qu'il est naturel d'insister sur la notion de puissance. De plus, en rapprochant, comme nous venons de le faire, cette théorie du principe du travail virtuel, on met bien en évidence le fait que la théorie habituelle de l'équilibre des machines simples, utilisées pour la plupart à l'état de mouvement, n'est qu'une première approximation et on a le moyen d'estimer les erreurs qu'elle comporte.

4. — **Changement du système de comparaison.** — Dès qu'on

---

[1] En identifiant ainsi cette dérivée à une puissance, on rend tout à fait intuitive l'analogie entre force vive et travail.

[2] Les énoncés classiques du principe des forces vives appliqué à un intervalle de temps fini pourraient être transformés d'une façon analogue en faisant intervenir les puissances moyennes.

parle de mouvement (ou même de déplacement) il faut, pour être tout à fait précis, indiquer le système de comparaison. On omet le plus souvent de le faire quand on parle de puissance (ou de travail élémentaire) parce que, dans les énoncés précédents, les vitesses (ou les déplacements) correspondent au système invariable, appelé fixe ou absolu, par rapport auquel la résultante de toutes les forces appliquées à un point matériel est définie par le principe de l'inertie.

Il peut être avantageux cependant de considérer des systèmes intermédiaires de comparaison; voici quelques indications à ce sujet.

Appelons $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}_1$ deux trièdres trirectangles mobiles l'un par rapport à l'autre, et envisageons à un même instant les puissances suivantes d'un même ensemble de forces appliquées à un système matériel S : P_1 correspondant aux vitesses des divers points de S par rapport à $\mathfrak{T}_1$ sera appelée la *puissance absolue*, P correspondant aux vitesses par rapport à $\mathfrak{T}$ sera appelée la *puissance relative*, P_e correspondant aux vitesses d'entraînement (le mouvement d'entraînement étant celui de $\mathfrak{T}$ par rapport à $\mathfrak{T}_1$) sera appelée *puissance d'entraînement*. On voit de suite que *la puissance absolue est la somme algébrique de la puissance relative et de la puissance d'entraînement*.

On observe que la distribution des vitesses d'entraînement étant la même que pour un solide en mouvement, *la puissance d'entraînement* P_e *s'obtient en prenant le moment du torseur des rotations instantanées dans le mouvement de* $\mathfrak{T}$ *par rapport à* $\mathfrak{T}_1$ *et du dyname constitué par l'ensemble de forces considéré*.

Dans les cas où il s'agit des forces intérieures, le dernier dyname constitué par des vecteurs deux à deux opposés est géométriquement équivalent à zéro, et P_e est nulle. On retrouve ainsi ce résultat connu et important que *pour la détermination de la puissance des forces intérieures, le choix du système par rapport auquel on prend les vitesses est indifférent*.

Proposons-nous maintenant de *rechercher les relations existant entre les équations qu'on peut obtenir en formant*

pour un même système matériel rapporté à deux trièdres de coordonnées mobiles l'un par rapport à l'autre, les combinaisons des forces vives.

Soit $\mathfrak{T}_1$ le trièdre auquel est applicable le principe de l'inertie, $\mathfrak{T}$ un trièdre mobile par rapport à $\mathfrak{T}_1$; soit M un point matériel du système. Il y a équilibre entre l'ensemble des forces (ordinaires) absolues et la force d'inertie absolue du point M ; nous appelons ainsi celle qui correspond au mouvement de M par rapport à $\mathfrak{T}_1$. [On peut encore énoncer ceci en disant qu'il y a équilibre entre la force d'inertie relative (correspondant au mouvement de M par rapport à $\mathfrak{T}$) et l'ensemble des forces ordinaires relatives défini par l'adjonction a l'ensemble des forces ordinaires absolues de la force centrifuge et de la force centrifuge composée (qui correspondent au mouvement relatif de M (par rapport à $\mathfrak{T}$) et au mouvement d'entraînement de $\mathfrak{T}$ par rapport à $\mathfrak{T}_1$). Ainsi présenté, le principe du mouvement relatif ne modifie pas l'ensemble de toutes les forces appliquées à un point, il change simplement un qualificatif (ordinaire ou d'inertie) appliqué à quelques-unes d'entre elles.

Ceci posé, former *l'équation des forces vives pour le mouvement absolu* revient à appliquer l'énoncé 1 du n° 3 à l'ensemble des forces absolues ordinaires et d'inertie ; *la puissance absolue de cet ensemble est nulle.*

Mais on voit de même que la puissance relative de l'ensemble des forces ordinaires relatives et des forces d'inertie relatives est nulle ; on peut encore énoncer ceci en disant que *la puissance relative de l'ensemble des forces absolues, ordinaires et d'inertie, est nulle;* c'est un énoncé de l'équation des forces vives pour le mouvement relatif.

Décomposons la puissance absolue figurant dans le premier énoncé en puissance relative et puissance d'entraînement, nous voyons qu'on obtient ainsi l'équation du second énoncé à laquelle on aurait ajouté membre à membre une équation exprimant que *la puissance d'entraînement de l'ensemble des forces absolues, ordinaires et d'inertie, est nulle.*

Mais si l'on se reporte au début de ce n°, on voit que cette dernière puissance, moment d'un dyname et d'un torseur,

peut être calculée en ne faisant intervenir que les coordonnées pluckériennes, par rapport à $\mathfrak{E}_1$ par exemple, de l'ensemble de toutes les forces absolues ordinaires et d'inertie. Ces six coordonnées pluckériennes sont nulles d'après les premiers théorèmes de la dynamique des systèmes (ceux où interviennent les quantités du mouvement).

En résumé, on arrive au résultat très simple que voici :

Les diverses équations qu'on peut obtenir en formant, pour un même système, la combinaison des forces vives appliquée aux équations du mouvement relatif par rapport à des axes quelconques ne diffèrent les unes des autres que par des combinaisons linéaires des six équations générales des quantités de mouvement projetées et des moments des quantités de mouvement.

Emile Cotton (Grenoble).

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

L'initiateur mathématique.

La psychologie infantile donne raison aux grands éducateurs d'autrefois qui préconisaient, pour la première enfance, un enseignement d'initiation reposant uniquement sur des expériences et sur des faits à la portée des jeunes cerveaux. L'abstraction viendra plus tard d'elle-même si le terrain est bien préparé. C'est pour réagir contre un enseignement purement abstrait, si néfaste au début des études mathématiques, que M. C.-A. Laisant a rédigé son *Initiation mathématique*, où il montre comment on peut objectiver l'enseignement élémentaire. Cet ouvrage, qui est aujourd'hui à sa neuxième édition, est bien connu de nos lecteurs et il n'a pas tardé à exercer une heureuse influence dans l'enseignement élémentaire et secondaire.

C'est en s'inspirant de l'*Initiation mathématique* que M. J. Camescasse a été amené à son ingénieux système d'assemblage de petits cubes qui constitue l'un des jeux les plus instructifs que l'on puisse mettre entre les mains des enfants. Ce jeu, qu'il ap-

pelle l'*Initiateur mathématique*[1], se compose de petits cubes en bois, les uns rouges, les autres blancs. Ces cubes portent, sur deux faces opposées, deux rainures dont les directions se croisent à angle droit et qui permettent d'assembler les cubes par bandes,

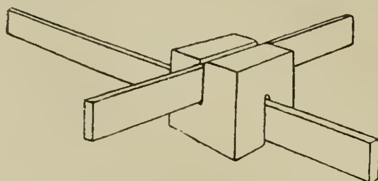


Fig. 1 (cube et réglettes grossis).

au moyen d'une réglette métallique, puis de réunir les bandes ainsi obtenues. La boîte de cubes est accompagnée d'une intéressante *Notice* dans laquelle M. Camescasse donne une énumération rapide des *principales applications* possibles et dont voici un aperçu :

1. Dessins, carrelages, mosaïques, construction d'objets divers.
2. Numération décimale.
3. Opérations arithmétiques élémentaires ; fractions, racines carrée et cubique ; théorèmes arithmétiques et algébriques rendus concrets, par exemple :

$$(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2 \ ; \quad \text{(fig. 2)}$$

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2 \ . \quad \text{(fig. 3)}$$

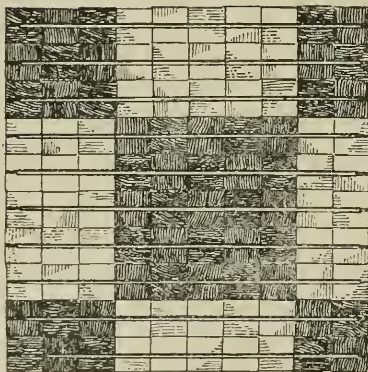


Fig. 2.

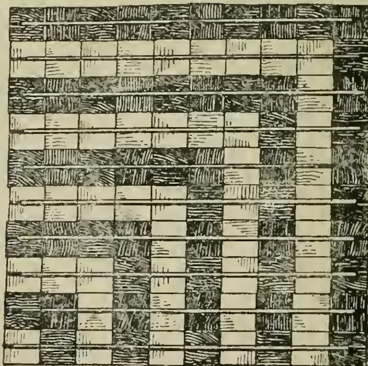


Fig. 3.

[1] *L'Initiateur mathématique*, breveté S. G. D. G., jeu de petits cubes rendant facile dans la famille et à l'école la mise en pratique de l'*Initiation mathématique*, de C.-A. Laisant, avec une Notice de 31 pages et de 15 figures dans le texte, et une planche hors texte en deux couleurs. Prix : 12 fr. ; librairie Hachette, Paris.

4. Système métrique.

« De même que notre système de numération décimale est éclairé par ses rapports avec les formes géométriques élémentaires, de même l'étude du système métrique a été préparée, et sa connaissance est *extrêmement* facilitée par l'usage familier de l'*Initiateur mathématique*.

« Ayant appris à composer par dizaines, centaines, mille et millions, *au moyen* de l'*Initiateur mathématique*, l'enfant n'aura qu'une adaptation instantanée et pour ainsi dire purement verbale à faire, pour nommer « centimètre cube » son unité en forme de cube, et savoir qu'un décimètre cube le contient mille fois, le mètre cube un million de fois, etc.

« La mesure des aires, des surfaces, des volumes, ne se basera plus seulement sur des formules abstraites et souvent si vides de sens, en apparence, qu'elles sont rapidement oubliées.

« Au contraire *(et c'est là une des conséquences les plus heureuses de l'emploi de l'« Initiateur mathématique »)*, il se produira fatalement ce fait que, quiconque, après quelques années, aura oublié une formule, la reconstituera, la *réinventera* rapidement et sans peine, parce qu'il en saura les causes fondamentales et que, pour ainsi dire, il en aura connu la philosophie. » H. F.

Clichés pour séances de projection dans l'enseignement de l'histoire des mathématiques.

Nous avons donné, il y a juste un an, une description complète de l'exposition organisée par le Musée pédagogique de l'Université Columbia de New-York et comprenant de nombreux documents sur l'histoire des sciences mathématiques : instruments mathématiques, mesures, médailles, portraits, livres anciens, etc.

A la suite de nombreuses demandes qui lui ont été adressées, le Musée pédagogique a accepté d'éditer, au prix de revient, des séries de clichés des principaux objets exposés et appartenant à M. Plimpton ou à M. D.-E. Smith. Ces clichés, destinés à illustrer les cours d'histoire des mathématiques, seront fournis[1] uniquement aux établissements d'instruction publique, par série de 25 clichés au moins (10 dollars pour 25 clichés et 40 cents par exemplaire en plus).

Les clichés, au nombre de 278, représentent principalement des faits et documents importants concernant le développement historique de l'Arithmétique, de l'Algèbre, de la Géométrie, de la Trigonométrie, de la Géométrie analytique et de l'usage des méthodes de Calcul mécanique.

---

[1] S'adresser à l'*Educational Museum* du *Teachers College* de la Columbia University, New-York City.

On peut également obtenir, aux mêmes conditions, des clichés représentant les principales illustrations de la *Rara arithmetica* de M. Dav.-Eug. Smith (indiquer le numéro de la page). Nous saisissons cette occasion pour signaler cette importante contribution à l'histoire de l'Arithmétique, publiée sous la forme d'un fort beau volume illustré de nombreuses planches. Comme l'indique le titre détaillé[1], ce volume donne la description d'ouvrages d'Arithmétique publiés avant 1601, avec de nombreuses planches reproduisant des anciens textes, des figures et des titres de volumes. Réunis et décrits avec autant de compétence que de soin, ces documents sont d'un grand intérêt pour tous ceux qui étudient cette partie de l'histoire des mathématiques; ils peuvent, en quelque sorte, servir de textes originaux. Les clichés qu'on vient d'éditer permettront aux professeurs de donner une forme très vivante à leurs leçons ou conférences.

CHRONIQUE

Commission internationale de l'enseignement mathématique.

1. — RÉUNION DE BRUXELLES

Une réunion partielle de la Commission aura lieu à Bruxelles le mercredi 10 août. Elle est principalement destinée à réunir les délégués de la Belgique et des pays limitrophes, et à provoquer entre eux un échange de vues sur les questions à l'étude dans les divers pays. Mais il est bien entendu que tous les délégués qui pourront se rendre à Bruxelles à cette époque seront les bienvenus; cette invitation s'adresse aussi aux membres des différentes sous-commissions nationales et à tous ceux qui collaborent aux travaux de la Commission. Voici, dans ses grandes lignes, le programme de la réunion.

Séance du Comité central : mardi 9 août, à 9 h. du matin et éventuellement à 4 h. de l'après-midi.

---

[1] *Rara Arithmetica,* a catalogue of the arithmetics written before the year MDCI, with a description of those in the library of George-Arthur Plimpton of New-York, by David Eug. Smith, of Teachers College Columbia University. Ginn and Company, publishers. Boston and London.

Réunion préparatoire; mardi soir, 9 août à 8 h. 1/2 Le lieu sera indiqué ultérieurement dans le programme définitif qui sera adressé aux délégués au commencement de juin. — Cette réunion, qui est principalement destinée aux présentations, permettra aux délégués de prendre contact.

Séance des délégués; mercredi matin à 9 h., salle Ravenstein (petite salle), 3, rue Ravenstein, près la Place Royale.

Ordre du jour : 1. Allocution du président.
2. Etat des travaux dans les principaux pays; présentation des rapports partiels déjà terminés.
3. Discussion générale sur l'organisation des travaux.
4. Préavis sur la réunion de 1911.

Les membres des sous-commissions nationales seront les bienvenus à cette séance.

Séance générale publique; mercredi 10 avril, à 4 h. de l'après-midi, salle Ravenstein, 3, rue Ravenstein, près la Place Royale.

Ordre du jour : 1. Allocution d'un représentant de la Belgique.
2. Discours de M. F. Klein, Président de la Commission, sur le but de la Commission et sur l'enseignement en général.
3. Rapide aperçu de l'état des travaux dans les différents pays, par le Secrétaire-général.
4. Conférence de M. C. Bourlet (Paris) sur la pénétration réciproque des mathématiques pures et des mathématiques appliquées dans l'enseignement secondaire.

Les adhésions et les demandes de renseignements doivent être adressées au secrétaire-général.

II. — SOUS-COMMISSIONS NATIONALES

Allemagne. — La délégation allemande compte pouvoir présenter à Bruxelles plusieurs nouveaux rapports partiels qui font suite au fascicule 1 des *Abhandlungen* (Voir *Circulaire* N° 2).

Autriche. — Les rapports seront publiés sous le titre général *Berichte über den mathematischen Unterricht in Oesterreich*, veranlaszt durch die internationale Unterrichtskommission. (Verlag Hölder, Wien). — Un premier fascicule (81 p.) vient de paraître; il contient, après une courte introduction de M. E. Czuber, deux rapports concernant l'un les écoles réales, l'autre les écoles primaires élémentaires et supérieures :

Der mathematische Unterricht an den Realschulen, von Schulrat Franz Bergmann.

Der mathematische Unterricht an den Volks- u. Bürgerschulen, von Schulrat Konrad Kraus.

Nous donnerons un aperçu de ces rapports dans un prochain numéro.

France. — Un premier rapport vient d'être terminé. Il a été rédigé par M. A. de Saint-Germain, président de la délégation française, et a pour objet *les Diplômes d'études supérieures de sciences mathématiques en France.* Il est inséré dans le présent fascicule de l'*Enseignement mathématique*.

Hollande. — La sous-commission s'est adjointe M. N.-C. Grotendorst, directeur des études mathématiques de l'Académie militaire de Breda.

Russie. — La délégation russe nous informe qu'un oubli du copiste a fait omettre sur la liste qu'elle nous a transmise, le nom de M. B. Sollertinski, membre du Comité scientifique du Ministère de l'Instruction publique et ancien Directeur de l'Ecole normale de Gatchina.

L'enseignement scientifique à l'Exposition universelle de Bruxelles.

Comme toutes les branches de l'activité humaine, l'instruction publique tient toujours une place importante dans les expositions universelles. Il en sera encore de même cette année à Bruxelles, dont l'exposition elle-même est un vaste enseignement. Au moment où nous écrivons ces lignes, nous ne sommes pas encore renseignés d'une manière complète sur la place que prend l'enseignement scientifique à l'Exposition. Nous savons que plusieurs grands Etats y participent, mais nous ignorons dans quelle mesure.

Nous pouvons cependant annoncer que l'enseignement scientifique sera particulièrement représenté dans la *section allemande*, où l'on trouvera des installations de laboratoires pour l'enseignement des sciences naturelles (Physique, Chimie et Biologie) dans les établissements secondaires.

Des conférences et séances de démonstration seront organisées les 11 et 12 août, au pavillon de la section allemande, sous les auspices de la Société allemande pour l'avancement de l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles (*Verein zur Förderung des mathem. u. naturw. Unterrichts*[1]). On annonce les conférences de MM.

Treutlein et Schwering, pour les *Mathématiques ;*
Grimsehl et Johannesson, pour la *Physique*,
et Bastian Schmid et Schoenichen, pour la *Biologie*.

[1] Pour tout ce qui concerne ces séances, s'adresser au président, M. le Prof. Dr A. Thaer, Hambourg, 36.

Les conférences auront lieu le matin et les séances de démonstration l'après-midi.

Il serait très désirable que des séances analogues fussent organisées à Bruxelles autour des journées des 10, 11 et 13 août, qui attireront sans doute de nombreux professeurs de l'enseignement scientifique. S'il y a lieu, l'*Enseignement mathématique* les annoncera dans son numéro du 15 juillet.

Universités allemandes. — Thèses de doctorat.

Pendant l'année scolaire 1908-1909, les universités allemandes ont accepté les thèses ci-après :

Berlin. — Lichtenstein, L. « Zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen und der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die Lösungen als Funktionen der Randwerte und der Parameter. »

Breslau. — Freund, E. « Entwicklung willkürlicher Funktionen vermittelst meromorpher. »

Goldman, F. « Ponceletsche Polygone bei Kreisen. »

Jopke, A. « Synthetische Untersuchungen über lineare Kegelschnittsysteme erster, zweiter und dritter Stufe. »

Kliem, F. « Ueber Oerter von Treffgeraden entsprechender Strahlen in eindeutig und linear verwandten Strahlengebilden erster bis vierter Stufe. »

Giessen. — Lepper, H. « Ueber die invarianten Bildungen von Formen mit digredienten Schichten von Variabeln. »

Schmidt, K. « Untersuchungen über Kurven dritter Ordnung im Anschluss an eine Grassmann'sche Erzeugungsweise. »

Wagner, R. « Ueber binäre bilineare und quaternäre quadratische Formen. »

Göttingue. — Boltze, E. « Grenzschichten an Rotationskörpern in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. »

Haar, A. « Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. »

Ihlenburg, W. « Ueber die geometrischen Eigenschaften der Kreisbogenvierecke. »

Koch, H. « Ueber die praktische Anwendung der Runge-Kuttaschen Methode zur numerischen Integration von Differentialgleichungen. »

Schimmack, R. « Axiomatische Untersuchungen über die Vektoraddition. »

Speiser, A. « Die Theorie der binären quadratischen Formen mit Koeffizienten und Unbekannten in einem beliebigen Zahlkörper. »

Greifswald. — Finke, P. « Ueber Scharen von ∞^5 Kurven im gewöhnlichen Raume. »

HAUSSLEITER, H. « Zur Theorie der Pfaffschen Systeme. »

LIEB, O. « Ueber Flächenscharen, die durch Berührungstransformation in Kurvenscharen überführbar sind. »

WERNER, A. « Ueber Systeme von drei Pfaffschen Gleichungen im Raume von fünf Dimensionen. »

ZIEMKE, E. « Ueber partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit Integralvereinen, die als Punktmannigfaltigkeiten zweifach ausgedehnt sind. »

Halle. — BOLDMANN, O. « Zur Theorie der übergeschlossenen Gelenkmechanismen. »

JONAS, H.-J. « Ueber W-Strahlensysteme, Flächendeformation und äquidistante Kurvenscharen. »

Jena. — GÜNTZEL, F. « Ueber Gruppierungen und Realitätsverhältnisse gewisser Punkte bei Raumkurven vierter Ordnung erster Spezies. »

RŒGNER, M. « Die Steiner'sche Hypocykloide. »

Kiel. — JANSEN, H. « Lückenlose Ausfüllung des R_n mit gitterförmig angeordneten n-dimensionalen Quadern. »

NEUENDORFF, R. « Ueber Kreispunktpolarkurven. »

Königsberg. — NEUMANN, A. « Ueber quadratische Verwandtschaften in Ebene und Raum, insbesondere Kreis- und Kugelverwandtschaften. »

Leipzig. — FÖRSTER, R. « Beiträge zur spezielleren Theorie der Riemannschen P-Funktionen 3ter Ordnung. »

MEYER, C. « Zur Theorie des logarithmischen Potentials. »

Munich. — BERWALD, L. « Krümmungseigenschaften der Brennflächen eines geradlinigen Strahlensystems und der in ihm enthaltenen Regelflächen. »

BÖHM, F. « Parabolische Metrik im hyperbolischen Raum. »

BURMESTER, H. « Untersuchung der wahren Hellegleichen auf der Kugel nach dem Lommel-Seeligerschen Satz. »

DEBYE, P. « Der Lichtdruck auf Kugeln von beliebigen Material. »

DEGENHART, H. « Ueber einige zu zwei ternären quadratischen Formen in Beziehung stehende Konnexe. »

HOWLAND, L.-A. « Anwendung binärer Invarianten zur Bestimmung der Wendetangenten einer Kurve dritter Ordnung. »

NŒTHER, F. « Ueber rollende Bewegung einer Kugel auf Rotationsflächen. »

SCHMID, A. « Anwendung der Cauchy-Lipschitzen Methode auf lineare partielle Differentialgleichungen. »

ZAPP, E. « Untersuchung eines speziellen Falles der Drei- und Vierkörperproblems. »

Rostock. — JECKE, R.-H. « Beiträge zur Geometrie der Bewegung. »

LANGE, M. « Vereinfachte Formeln für die trigonometrische Durchrechnung optischer Systeme. »

Strasbourg. — Malessa, G. « Fokale Eigenschaften korrelativer Grundgebilde. »

Tubingue. — Casper, M. « Ueber die Darstellbarkeit der homomorphen Formenschaaren durch Poincaré'schen Z-Reihen. »

Fritz, H. « Die Darstellung willkürlicher Funktionen in Anwendung auf die Statistik. »

Œhler, H. « Ueber die Gleichungssysteme, welche man aus einer Matrix variabler Elemente durch Nullsetzen der Determinanten gegebener Ordnung erhält. »

Würzbourg. — Widder, W. « Untersuchungen über die allgemeinste lineare Substitution mit vorgegebenes *p*ter Potenz. »

Zilling, J. « Ueber die infinitesimale Deformation der Minimalflächen. »

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Allemagne. — *Association des naturalistes et médecins allemands; Association allemande des mathématiciens.* — L'Association allemande des mathématiciens siégera cette année à *Kœnigsberg*, du 18 au 24 septembre, en même temps que l'Association des naturalistes et médecins allemands. Parmi les conférences générales organisées par celle-ci, signalons celle de M. Planck (Berlin) sur la Physique et les théories mécaniques modernes. Les communications d'ordre mathématique seront présentées à l'une des sections: I. Mathématiques et Astronomie. — 2. Physique, Instruments et Mathématiques appliquées, ou 11. Enseignement des sciences mathématiques et naturelles.

— M. Carathéodory, professeur à l'Ecole technique supérieure de Hanovre, a été nommé professeur titulaire à l'Ecole technique supérieure de Breslau.

M. G. Faber a été nommé professeur titulaire de mathématiques à l'Ecole technique supérieure de Stuttgart.

M. Hausdorff, de l'Université de Leipzig, a été nommé professeur extraordinaire de Mathématiques à l'Université de Bonn.

M. O. Perron, de Munich, est nommé professeur extraordinaire à l'Université de Tubingue.

Privat-docents. — Ont été admis en qualité de privat-docents pour les mathématiques, MM. A. Haar et H. Weyl, à l'Université de Gœttingue, et M. W. Schnee, à l'Université de Breslau.

Angleterre. — La *British Association for the Advancement of Science* se réunira cette année à *Sheffield*, à partir du 31 août. La Section des Sciences mathématiques et physiques sera présidée par M. le Prof. Hobson, de l'Université de Cambridge.

— MM. L.-N.-G. Filon (Londres) et G.-H. Hardy (Cambridge) ont été nommés membres de la Société Royale de Londres.

Belgique. — M. A. Gob, professeur de mathématiques à l'Athénée royal de Liège, a été nommé membre de la Société royale des Sciences de Liège.

Danemark. — M. H. Heegard, professeur à l'Académie militaire, est nommé professeur à l'Université de Copenhague, en remplacement de M. le Professeur Zecthen, qui prendra sa retraite à la fin de cette année universitaire.

Etats-Unis. — M. Edw. Kasner a été promu professeur titulaire de Mathématiques à l'Université Columbia de New-York.

MM. W.-B. Carver, A. Ranum et F.-B. Sharpe ont été nommés professeurs adjoints à l'Université Cornell, Ithaca.

France. — L'*Association française pour l'avancement des Sciences* tiendra sa réunion annuelle à Toulouse, au mois d'août. La Section de Mathématiques et d'Astronomie sera présidée par M. E. Belot.

NOTES ET DOCUMENTS

ANGLETERRE

Enseignement de la géométrie et de l'algèbre graphique dans les écoles secondaires[1].

Les observations faites par les fonctionnaires du « Board of Education » sur l'enseignement de la géométrie dans les différentes écoles permettent de formuler des appréciations sur les résultats obtenus avec la nouvelle méthode d'enseignement. L'influence de la réforme est généralement bonne. Cependant, si la majorité des maîtres ne se sont pas suffisamment détachés de la tradition euclidienne en ce qu'elle a de fâcheux, quelques-uns ont été à l'opposé en sacrifiant complètement, en faveur des applications pratiques, l'enseignement de la méthode de déduction ; or, cette méthode devrait être l'élément essentiel de l'enseignement de la géométrie à l'école. Il reste beaucoup à faire pour obtenir partout les meilleurs résultats; cependant, on peut d'ores et déjà se féliciter de ce que la mémorisation inintelligente a disparu. Les connaissances des élèves sont souvent très limitées et il leur manque de la réflexion, mais la majorité d'entre eux comprennent ce qu'ils font.

La multiplicité des méthodes d'enseignement pour les mêmes sujets dans les diverses écoles facilite des comparaisons qui permettent de faire profiter les unes des expériences des autres. Ces différences sont parfois très consi-

---

[1] Circular 711 du *Board of Education*, mars 1909. — Traduit et publié avec l'autorisation de *H. M. Stationery Office*. (Réd).

dérables ; certaines écoles parcourent en une année le champ des livres I et II d'Euclide, tandis que d'autres (la majorité peut-être) mettent trois ans pour le même programme.

Si à un travail plus lent correspondait un travail plus approfondi et un développement plus complet de l'intelligence, cela n'aurait pas d'importance, mais l'inverse est généralement vrai. Cela ne provient pas du plus ou moins grand nombre d'heures accordées à l'enseignement ou des capacités différentes des maîtres, mais des méthodes employées, méthodes dont les bases émanent de conceptions différentes sur le programme nécessaire pour le 1er enseignement.

Il faut se pénétrer de plus en plus de l'idée que la géométrie d'Euclide (telle qu'elle est généralement envisagée) n'embrasse qu'un champ très restreint qui devrait être traité dans toutes les écoles secondaires. Les raisons pour lesquelles cela ne se fait pas encore se trouvent dans le système d'enseignement des premiers éléments. Cette circulaire a pour but principal d'attirer l'attention sur la question.

La compréhension du sujet nécessite la division de l'enseignement en trois degrés successifs correspondant à ce qui se fait pendant les trois premières années dans les écoles où le travail est lent.

Le 1er degré traite des notions géométriques fondamentales et est généralement intitulé : exercices pratiques préliminaires.

Le 2me degré envisage quelques conceptions fondamentales de la géométrie.

Le 3me comprend une étude plus complète de celles-ci et en outre l'introduction de la déduction.

Pour faire œuvre utile, il est indispensable d'entrer parfois dans des détails insignifiants en apparence ; mais ce sont précisément ces détails qui sont à la base de la plupart des difficultés que rencontrent les maîtres dans leur enseignement.

Premier degré.

Il est assez généralement reconnu que le premier enseignement en géométrie doit avoir pour but de familiariser avec les notions géométriques fondamentales, solides, surfaces, lignes, point, direction, angle, etc., et d'initier à l'usage des instruments en géométrie. Il doit donc consister surtout en observations et exercices pratiques. La diversité des opinions sur le choix des sujets et le développement à leur donner dans cette première étude est due principalement à une idée trop confuse du but proposé et de ses relations avec le travail « théorique » qui doit suivre. Ce premier degré est souvent démesurément long, sans résultats patents et le travail théorique est développé indépendamment du reste. Ces écueils seraient évités par une corrélation convenable entre la théorie et la pratique.

Le but de cette première étude est la compréhension complète des notions fondamentales en géométrie. La familiarisation avec les constructions géométriques et l'habileté dans l'emploi des instruments n'y sont que des considérations d'ordre secondaire atteintes plus aisément plus tard lorsque la compréhension des propositions géométriques l'exigera.

La plupart des maîtres sont d'accord sur la méthode d'enseignement des premières notions, c'est-à-dire des notions de solides, surfaces, lignes et points en y associant les idées de volumes, aires et longueurs. Ces notions sont naturellement données sans définitions, celles-ci n'étant en tout cas in-

troduites que plus tard lorsque l'élève a une conception claire de la chose à définir. La définition pourra alors être un bon exercice de composition. L'essentiel est de donner une idée nette du sujet et d'obtenir un emploi exact des noms.

On peut se servir avec succès au début de questions telles que : « Combien faut-il de mesures pour décrire cette boite ? » On amène ainsi aisément à la notion des 3 dimensions d'un solide. On continuera avec des exemples concrets et variés dont quelques-uns semblent à première vue faire exception (une balle, un crayon), deux des dimensions étant numériquement égales ; on comparera avec le nombre de mesures nécessaires pour donner les dimensions d'un plancher ou celles d'une page d'un livre (en opposition à une feuille) et cela jusqu'à la distinction géométrique claire entre les solides et les surfaces.

Il conviendra de poser à cet effet des questions telles que : « Combien de faces, d'arêtes, de sommets a un cube, un cylindre, un cône, etc. ? »

Le travail pratique consistera surtout en fabrication de solides en carton et en dessins de ces corps dans des positions simples.

Les adjectifs qualificatifs (plane, courbe, droit) pourront également être employés. Définir le mot « droit » serait une perte de temps ; les élèves seront généralement déjà familiarisés avec la notion de surface plane et il suffira de ne pas permettre un usage incorrect des termes. Le temps à consacrer à cette première partie et le développement à y donner aux constructions dépend naturellement de l'âge des élèves. Pour de jeunes enfants on se bornerait aux cartonnages en laissant de côté la partie abstraite du sujet. Pour des élèves de 12 ans et plus la partie abstraite est la plus importante, le travail manuel se bornant à la construction occasionnelle d'un solide fait à la maison. Il est superflu de donner des indications pour la construction des figures planes (carrés, triangles, etc.) qui sont comprises dans la construction d'un solide, les élèves les trouvent facilement eux-mêmes et ces indications ne serviraient qu'à distraire l'attention du point principal : le solide.

Il ne faut pas oublier que ce travail est commun au début de l'enseignement mathématique et scientifique et il faut éviter soit une répétition inutile des mêmes sujets, soit une différence trop radicale de méthode.

La notion de direction vient ensuite ; elle est rarement aussi bien traitée et il en résulte plus tard des difficultés pour les angles et les parallèles. Elle est aussi difficile à discuter et encore plus à définir à un point de vue abstrait que celle de couleur.

De même que les enfants acquièrent la notion des couleurs en les observant et en les nommant, de même ils acquéreront la notion de direction, d'une façon claire, en observant et en nommant certaines directions fondamentales telles que verticale, nord, sud, etc.

Au début on évitera l'usage de la représentation sur le papier. On introduira la question ainsi : « Montrez une ligne verticale, comment vérifiez-vous si elle est verticale ou non ? » ce qui conduit à la connaissance du fil à plomb. Ensuite : « Montrez une ligne horizontale, comment vérifier qu'elle est horizontale ? » Cette vérification doit être indépendante de la verticale, ce qui suggère l'idée du niveau d'eau.

Vient ensuite la question : « Peut-on dessiner des lignes verticales sur le mur, sur le pupitre, sur le plancher et de même pour les lignes horizontales.

Puis : Combien de lignes verticales peut-on tracer par un point ? » « Combien d'horizontales ? » et ainsi de suite pour les différentes directions (nord, sud, est, ouest). Les élèves chercheront l'orientation des fenêtres de la chambre et de leur propre position dans celle-ci.

Le maître pourra poser ensuite la question : « Toutes les lignes verticales ont-elles la même direction ? » idem pour les horizontales ; il amènera ainsi à la compréhension des parallèles comme lignes de même direction.

Le maître ne devra pas tolérer, et encore moins pratiquer l'emploi inexact des termes, par exemple : perpendiculaire pour vertical, plane pour de niveau ou horizontal ; il s'assurera que les élèves n'ont pas l'idée que la direction du nord peut être autre chose qu'une horizontale.

La notion d'angle vient ensuite. Elle est généralement traitée d'une manière assez satisfaisante ; cependant il se présente parfois des difficultés dues en partie à une notion insuffisante de la direction, en partie a une représentation prématurée des angles sur le papier. On pourrait avec avantage considérer non seulement la rotation d'une ligne ou de l'une des branches d'un compas, ainsi que cela se fait assez généralement, mais aussi la rotation d'une personne sur elle-même ou de la terre autour de son axe. Des questions simples telles que : « De quel angle tournez-vous au commandement : à droite ? » aideront plus à une conception claire de l'angle qu'un grand nombre d'exercices avec rapporteur sur le papier. Des élèves qui sont censés savoir tout ce qui concerne les angles sont souvent embarrassés par la question : « Un homme se dirigeant vers le nord tourne à droite de 40°, dessiner son parcours. » Ils montrent ainsi que la préoccupation des nombres les a empêchés de saisir la chose elle-même.

La notion générale d'angle acquise, les élèves estimeront des angles par comparaison avec l'angle droit ou la circonférence entière avant d'apprendre à se servir du rapporteur ; ils devront également prendre l'habitude, lorsqu'ils mesureront un angle avec le rapporteur, d'en estimer d'abord approximativement la valeur ; il éviteront ainsi des erreurs grossières dues à une lecture fausse du rapporteur.

Les exercices de mesure d'angle tracés au hasard devront être généralement laissés de côté ; pour le maître ils sont difficiles et longs à bien vérifier et sont avantagensement remplacés par la mesure d'angles obtenus par la construction de triangles. Le mieux est de proposer des problèmes tels que : « Construire un triangle dont les côtés sont ..... et mesurer le plus grand angle. » Le maître en connaît la solution, il peut aisément vérifier le travail de chaque élève, et pour ceux-ci, il est préférable de n'avoir pas à se préoccuper uniquement de la difficulté du maniement du rapporteur.

Les notions fondamentales ayant leur place dans le premier degré sont ainsi traitées. Il est cependant d'usage courant d'introduire encore un grand nombre d'exercices pratiques comprenant non seulement la construction de triangles, la recherche de hauteur et de distances, mais aussi de bissectrices de lignes et d'angles, de dessins, de tangentes à des cercles et même parfois de problèmes de similitude, ceci avant de faire aucun essai d'étude de la géométrie comme science proprement dite. On consacre souvent une année, quelquefois deux, à cette étude. On peut généralement les considérer comme du temps perdu. Lorsque cette étude est faite avant l'étude théorique, les constructions difficiles deviennent facilement des recettes et les plus faciles un amusement avec le compas. Dans les cas où une pratique plus grande du dessin géométrique est désirable, elle pourra s'acquérir plus avantageuse-

ment en dessinant des plans, des élévations, des sections de solides simples, exercices qui développent l'imagination géométrique, mais sont indépendants de la géométrie déductive. A moins que cette étude n'ait été commencée à un âge exceptionnellement tendre, il n'y a pas de raison pour que les principes fondamentaux acquis, les élèves ne s'attaquent pas directement au développement théorique du sujet accompagné d'exercices appropriés.

Il y a encore des doutes sur l'opportunité des définitions, des axiomes et des postulats. Les maîtres ayant personnellement étudié cette question sont rares, et les indications des manuels en usage sont peu satisfaisantes. Les définitions peuvent être considérées comme un but en elles-mêmes et il est peut-être utile de faire formuler aux élèves la définition de choses qu'ils connaissent déjà, comme un carré, un cercle, un plan. La mémorisation de définitions obtenues intelligemment et exprimées sous une forme élégante a certainement de la valeur; mais ce ne sont que des buts secondaires, les progrès en géométrie n'en dépendent pas. Certains termes sont indéfinissables, comme dimension, direction, même peut-être angle, et devront être traités de la manière déjà indiquée. Un grand nombre de termes, tels adjacents, alterne, extérieur, diagonale, obtus, aigu, peuvent être introduits incidemment et n'ont pas besoin de définition; il suffit de n'en pas permettre un faux emploi. Lorsque le maître parle d'un segment, il ne faut pas que l'élève se représente un secteur ou qu'il confonde les termes inscrit et circonscrit. Les explications nécessaires se donneront aisément au moyen du dessin. L'élève n'apprendra rien de neuf par ces définitions et, sauf peut-être pour quelques-unes de celles du premier groupe mentionné, n'éprouvera pas le besoin de les avoir sous une forme explicite. Certaines notions pourront cependant être définies à priori et cela de diverses manières. Par exemple, l'ellipse peut être définie comme la section d'un cône ou par les propriétés des foyers et directrice, ou encore des deux distances focales, etc.; définitions qui, à première vue, ne semblent pas amener au même résultat.

Il est essentiel d'avoir à la base de toute démonstration une définition déterminée (dont le choix est une pure convention) et de se limiter à celle-là jusqu'au moment où les autres propriétés qui auraient également pu servir de définition en auront été déduites. Le parallélogramme peut également être défini de plusieurs manières : par ses propriétés de parallélisme, par celle d'égalité des côtés opposés ou par celle d'égalité des angles opposés. Pour pouvoir faire une démonstration se rapportant au parallélogramme ou pour démontrer qu'une figure donnée est un parallélogramme, l'élève doit savoir exactement ce qu'il peut supposer connu et ce qu'il doit démontrer, il est donc indispensable de convenir d'une définition particulière. Les définitions dont une connaissance imparfaite peuvent entraver les progrès de l'élève en géométrie sont donc celles dont le choix est uniquement une affaire de convention comme celle du parallélogramme. Toutes les autres peuvent être employées ou exclues à volonté, elles ne sont pas indispensables.

Les axiomes sont encore moins nécessaires et il est peut-être préférable de les laisser complètement de côté. C'est vrai soit pour les axiomes généraux soit pour les axiomes géométriques, pour des raisons diverses.

L'énoncé abstrait : « Deux choses qui sont égales à une même chose sont égales entre elles » n'aidera en rien un élève qui a de la peine à conclure que si $A = B$ et $B = C$ il s'ensuit que $A = C$. Pour qu'il la réalise absolument il faut que cette conclusion lui apparaisse comme une chose évidente, sans

le secours d'aucune autorité extérieure. De même si un élève ne se rend pas compte de l'évidence du fait : si $2x = 10$ alors $x = 5$, le renvoi à un axiome ne le convaincra pas. Formuler de tels axiomes peut être un exercice intéressant, mais n'est pas nécessaire au progrès en géométrie et, imposé à cette période des études, peut devenir un obstacle sérieux au progrès (d'autant plus que ce genre de travail est antipathique à la plupart des élèves).

Pour les axiomes géométriques le cas est encore plus grave. Non seulement ils ne sont pas nécessaires à la conception des théorèmes et démonstrations présentés à l'élève d'une manière convenable, mais sous la forme donnée par Euclide, et qui est encore en usage, ils ne sont ni suffisants, ni nécessaires à l'édification de la géométrie. Au reste, l'étude de ces axiomes a donné naissance à une nouvelle branche de la science, branche semée de difficultés et de points délicats, qui n'est familière qu'à un petit nombre de savants, lesquels ne sont pas encore d'accord. Cela ne rentre dans le cadre ni de la compréhension, ni du champ naturel d'activité des élèves. Cependant, continuer à enseigner que toute géométrie repose sur les axiomes d'Euclide, serait faux aussi bien qu'inutile.

Deuxième degré.

La notion d'angle acquise, les théorèmes fondamentaux concernant les angles peuvent être introduits et, comme suite naturelle, l'égalité des triangles en y joignant un grand nombre d'exercices, notamment la construction de triangles avec diverses données et la résolution de problèmes de hauteurs et distances au moyen du dessin. Il faudra commencer à exiger le soin et la correction du dessin. C'est par la comparaison avec les résultats numériques que les élèves apprendront à apprécier la valeur, non seulement d'un travail exact, mais aussi de la possession de bons instruments.

Ce ne seront naturellement pas les seuls avantages de cette étude; il faut premièrement faire observer que 3 données sont nécessaires et suffisantes pour déterminer un triangle. Les questions de hauteurs et distances (dans des cas qui ne soient pas trop simples) sont également un très bon exercice de développement, soit de l'imagination, soit de la faculté de compréhension et de représentation graphique d'un fait.

Le second degré consiste donc à établir les théorèmes fondamentaux, soit dans le 1er livre d'Euclide 13-15, 27-29, 32 ; ainsi que 4, 8 et 26.

Les maîtres seront probablement tous d'accord que ces éléments acquis, les progrès peuvent être relativement rapides, mais que les élèves passent précisément trop de temps, sans résultat satisfaisant, sur ces théorèmes eux-mêmes. En effet, on y consacre fréquemment une année entière. Un des arguments principaux mis en avant en faveur de cette méthode est le développement des facultés qu'elle entraîne, mais en réalité le travail subséquent est supérieur dans les écoles où ces théorèmes sont traités plus rapidement.

L'ordre dans lequel ces théorèmes sont présentés varie avec les méthodes. Evidemment l'unité du sujet exigerait que ces théorèmes soient pris simultanément ou en 2 groupes, ainsi qu'il a déjà été indiqué ; l'un contenant tous les faits fondamentaux concernant les angles, l'autre les 3 cas d'égalité des triangles. Le défaut essentiel de l'ordre d'Euclide au point de vue de l'enseignement est la séparation de théorèmes étroitement liés suivant ainsi non pas l'ordre naturel du sujet, mais un ordre tout artificiel ayant pour but de faciliter les démonstrations logiques. La majorité des

manuels actuellement en usage suivent l'ordre naturel, quelques-uns cependant n'ont pas encore abandonné complètement l'ordre peu pratique d'Euclide. Cependant même les auteurs qui suivent un ordre naturel ne se sont pas débarrassés tout à fait des difficultés inhérentes aux démonstrations euclidiennes. Ils se voient tous obligés d'introduire un théorème supplémentaire (généralement I. 5) avant I. 8 détruisant ainsi l'unité du groupe 4, 8 et 26. Presque tous se servent encore de la démonstration d'Euclide pour le théorème I. 13 (leur 1er théorème) ; démonstration qui donne beaucoup de mal soit aux maîtres, soit aux élèves et qui est rendue complètement inutile par l'idée moderne d'angle. Ils donnent également une démonstration pour I. 29, alors que celle-ci est si difficile qu'un livre très connu l'a marquée comme devant être laissée de côté dans une première lecture. Tous ces théorèmes rentrent du reste dans le champ des connaissances de ceux qui ont suivi le cours préliminaire d'exercices. Ces propositions semblent évidentes aux élèves (préparés par un bon cours préliminaire) et les soi-disant démonstrations les rendent non pas plus évidentes, mais plus obscures. Il faut plus que partout ailleurs se rappeler qu'Euclide a écrit non pas pour des enfants, mais pour des adultes. Commencer un sujet en cherchant à démontrer aux élèves ce qui, à leur avis, ne nécessite aucune preuve est le bon moyen de leur faire croire que toute la suite sera artificielle et irréelle. Il vaut mieux n'aborder les démonstrations euclidiennes, c'est-à-dire déductives, qu'au moment où leur nécessité se fait sentir, soit après les théorèmes fondamentaux, la démonstration étant alors une opération naturelle qui n'est sujette à aucune règle arbitraire ou artificielle.

De ces théorèmes fondamentaux dépendent toutes les déductions qui suivront, l'essentiel en ce qui les concerne n'est donc pas de les analyser et de les réduire au nombre minimum d'axiomes ou de postulats (méthode d'Euclide), mais de les présenter de telle sorte que leur vérité soit aussi évidente pour l'élève que la différence entre le noir et le blanc ou entre sa main gauche et sa main droite. Tout procédé qui ne permet pas d'arriver à une notion claire et complète de ceci est défectueux qu'elle que soit sa valeur logique et provoque fatalement des erreurs grossières dans les travaux subséquents par défaut de compréhension des théorèmes fondamentaux si laborieusement démontrés.

Les preuves euclidiennes de ces théorèmes n'ont donc pas leur place au début, l'attention devant être concentrée non pas sur des preuves formelles, mais sur la représentation exacte et évidente des théorèmes eux-mêmes.

La meilleure méthode à employer pour atteindre ce but est une considération de détails sur lesquels l'opinion des maîtres peut naturellement diverger.

L'expérience semble cependant prouver que le mieux est de procéder comme suit :

Angles et parallèles.

Le théorème I. 13 ne nécessite plus aucune démonstration, bien que peu d'auteurs se soient rendus compte soit de ce fait, soit de la raison pour laquelle la méthode d'Euclide nécessitait une démonstration. Euclide considérait comme évidente la possibilité de l'addition des angles et le fait que 2 angles AOP et POB sont ensemble égaux à un angle AOB. Il ne pouvait pas l'appliquer au cas où AOB vaut 180° car pour lui un tel angle n'existait pas ; cela l'obligeait à subdiviser ses angles de la même façon que si, inca-

cables de compter plus loin que 9, nous voulions démontrer que $6 + 4 = 5 + 5$ nous serions alors obligés de dire $6 = 5 + 1$ donc

$$6 + 4 = 5 + 1 + 4$$

et

$$5 = 1 + 4$$

d'où

$$5 + 5 = 5 + 1 + 4$$

et

$$6 + 4 = 5 + 5$$

Un tel procédé est déjà peu attrayant pour un enfant, mais lorsque de plus chaque symbole, qui avait une signification propre, doit être remplacé par 3 lettres (dans un ordre déterminé) désignant un angle, il est très naturel qu'il y trouve de grandes difficultés.

Pour la même raison I. 14 n'a pas besoin de démonstration. Les propriétés cependant doivent être formulées et leur énoncé appris afin de pouvoir servir comme instrument dans une argumentation.

Le théorème 15 peut être démontré sans aucune difficulté par déduction, mais il est préférable, la propriété à démontrer étant évidente, de réserver l'exercice de la déduction à un cas plus opportun, c'est-à-dire dans lequel la vérité du théorème soit moins évidente de sorte que la nécessité d'une démonstration devienne apparente.

Les théorèmes 27-29 ainsi que 32 peuvent être présentés au moyen de la rotation. La méthode ordinaire basée sur la rotation d'une droite est bonne, mais il vaut peut-être encore mieux amener les élèves à se représenter un homme marchant le long d'une ligne brisée (27-29) ou autour d'une figure (32 cor. 2). Ceux qui s'occupent de rechercher les principes à la base des mathématiques ne sont pas d'accord sur la valeur de cette méthode en tant que démonstration ; pour le maître d'école la question ne se pose pas. Pour lui, le point essentiel est d'arriver à faire saisir ces théorèmes à ses élèves et cela de la manière la plus claire et la plus durable possible. De plus, en présentant ainsi les choses, les vérités géométriques sont associées non pas seulement avec le dessin, mais avec les circonstances ordinaires de la vie.

L'expérience démontre que par cette méthode les théorèmes apparaissent aux élèves comme des faits naturels dont ils se rendent maîtres en fort peu de temps.

Triangles égaux.

De l'avis de la plupart des maîtres, l'introduction du procédé de superposition à cette période des études entraîne une perte de temps considérable et beaucoup d'ennuis, lesquels ne sont pas compensés par les résultats obtenus. En effet, l'examen des travaux subséquents des élèves révèle souvent des erreurs très grossières qui montrent que l'impression produite par cette étude a été très superficielle.

L'égalité des triangles peut être traitée avec succès comme suit : Le maître dessine *un* triangle sur le tableau noir et demande : « Quels éléments de ce triangle faut-il mesurer pour pouvoir le reproduire ? » Suit la construction pas à pas du second triangle en mettant en évidence la propriété que 3 mesures (choisies convenablement) le déterminent sans ambiguïté. Ce procédé est évidemment le même que celui de superposition, mais la cons-

truction graduelle de la seconde figure est aisée à suivre et le fait que 3 conditions déterminent un triangle en découle tout naturellement; tandis que la comparaison de 2 figures déjà dessinées est plus difficile à effectuer et à saisir pour un débutant.

Grâce à cette méthode, quelques minutes suffisent à une classe pour comprendre les 3 théorèmes d'égalité, ce qui permettra d'insister immédiatement sur leur utilité. Les élèves apprendront naturellement les énoncés de ces théorèmes. Au besoin on donnera plus tard les démonstrations classiques, alors que leur étude ne présentera plus pour l'élève les mêmes difficultés.

Le deuxième degré, c'est-à-dire la présentation des théorèmes fondamentaux étant ainsi condensé en quelques leçons, il sera préférable de ne pas interrompre l'ordre des études par des problèmes théoriques. Il faudra par contre faire faire des exercices pratiques, spécialement sur des questions de hauteurs et distances; mais tout travail de déduction sera laissé de côté jusqu'à complète possession des théorèmes fondamentaux, instruments qui permettront de résoudre les problèmes qui suivront. Intercaler des problèmes théoriques (sauf peut-être un ou deux sur les angles après la Ire partie et avant la 2me concernant l'égalité) tend plutôt à affaiblir l'impression qu'il est essentiel que ces théorèmes produisent.

Troisième degré.

Jusqu'à ce moment l'étude de la géométrie devait être basée uniquement sur une observation minutieuse de choses familières, sur l'expérience et sur l'intuition directe; base qui remplace les définitions, postulats et axiomes géométriques d'Euclide ainsi que sa manière de traiter certains théorèmes.

Dorénavant, bien que l'intuition et l'expérience soient encore utilisées pour trouver les théorèmes, il s'y adjoindra une démonstration déductive absolue, basée sur les théorèmes fondamentaux précités.

Il est inutile de faire de longs développements sur cette 3me période qui doit être le développement général de la déduction à la suite des théorèmes fondamentaux. Les différences entre un bon et un mauvais enseignement restent naturellement très grandes, mais les méthodes ne peuvent guère différer d'une façon essentielle. Quelques points cependant méritent d'être relevés. Chaque domaine nouveau sera, autant que possible, amené par un travail personnel. Des théorèmes nouveaux seront suggérés au moyen de problèmes. Le but est bien l'étude des théorèmes classiques, mais ceux-ci seront appris plus facilement et avec plus d'intérêt si les démonstrations en ont été préalablement découvertes.

Les théorèmes seront pris, dans la mesure du possible, par groupes.

Souvent, au lieu de présenter à une classe un théorème tout énoncé qu'il ne reste plus qu'à démontrer, il sera possible de poser des questions qui amènent les élèves à énoncer eux-mêmes le théorème. Par exemple, au lieu de dire : « Démontrez que si la diagonale d'un parallélogramme est bissectrice de l'angle, la figure est un losange », il vaudra mieux demander : « Est-il vrai que la diagonale d'un parallélogramme est bissectrice de l'angle? La réponse donnée, on continuera : « Pour que ce soit le cas, de quel genre doit être le parallélogramme ? ». Après réponse; « Faites-en la démonstration ». On demandera de même : « Quelle est la relation entre les côtés opposés d'un parallélogramme ? » plutôt que de dire, le théorème suivant est : « Les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux ». Ce

procédé facilite la recherche de la démonstration et, ce qui est plus important, développe l'observation et l'imagination des élèves et les amène à considérer les différents cas possibles dans une figure.

A mesure que les études progressent, il devient plus important de connaître les théorèmes eux-mêmes que leur démonstration.

Dans les revisions, il sera bon de demander : « Quels théorèmes employez-vous pour démontrer tel ou tel autre théorème ? » C'est un critérium efficace des connaissances et en même temps cela aide à faire du tout un édifice logique.

Les exercices ne doivent pas être considérés comme un but. Leur importance varie avec les sujets, elle est maximum lorsqu'une nouvelle notion doit être assimilée. Ainsi lorsque les notions de lieux, enveloppes, proportions, similitude seront introduites, les exercices occuperont une place importante. A part cela, lorsque les premiers éléments du sujet sont terminés, ils diminuent d'importance et l'attention devra en premier lieu se porter sur le développement de la puissance géométrique et logique.

Il faut reconnaître que si l'étude d'un sujet ne développe pas la faculté de résoudre des problèmes nouveaux, elle est inutile. Lors même que les examinateurs continueraient à laisser passer les candidats qui se bornent à répéter les démonstrations qu'ils ont apprises accompagnées de définitions, les maîtres ne devraient pas s'en contenter ; la seule preuve valable d'acquisition de connaissances est la faculté de les appliquer à des sujets nouveaux.

Les problèmes introduisant des notions nouvelles à considérer en premier lieu sont ceux qui utilisent l'égalité des triangles avec, bien entendu, les théorèmes fondamentaux sur les angles et les parallèles. Presque tous les élèves peuvent apprendre à les résoudre et jusque-là rien d'autre n'est digne d'attirer leur attention.

Il est très important de cultiver l'habitude de considérer les modifications successives d'une figure : « Qu'arrive-t-il aux diagonales d'un parallélogramme si l'angle compris entre les côtés adjacents varie ? » « Qu'arrive-t-il à la distance entre 2 points lorsque l'un d'entre eux se meut le long d'une circonférence de cercle, de même pour la corde d'un cercle s'éloignant du centre, etc.

Ceci est spécialement important en ce qui concerne les théorèmes prêtant à des erreurs lorsque la mémoire seule est en jeu, par exemple pour ceux concernant les rectangles obtenus par l'intersection des cordes d'un cercle ou ceux concernant le carré construit sur le 3me côté d'un triangle. La notion de changement ou de mouvement doit être introduite aussi souvent que possible. C'est ce qui fait l'une des supériorités de l'idée moderne de la tangente sur celle d'Euclide. C'est également pour cette raison que la recherche de lieux géométriques est un si bon exercice.

Il faudra, autant que possible, que les exercices dépassent la théorie. De même que les hauteurs et distances sont résolues graphiquement longtemps avant d'être obtenues par la trigonométrie, de même on donnera des lieux et des enveloppes à tracer, sans s'inquiéter de savoir s'ils donnent des droites ou des cercles ou s'ils appartiennent au programme parcouru dans la théorie. Ce travail est utile non seulement au point de vue éducatif, mais par l'apport d'un nouvel instrument de travail.

Les meilleurs exercices sont souvent ceux qui se font sans instruments ou même sans papier, ni crayon. Pour répondre à la question : « Les diagonales d'un parallélogramme sont-elles égales ? » il n'est pas nécessaire de

dessiner laborieusement plusieurs parallélogrammes exacts Il suffit d'en esquisser quelques-uns ou mieux encore, de se les représenter mentalement.

Un défaut des cours de géométrie de bien des écoles est de les limiter exclusivement à la géométrie à 2 dimensions. Même lorsque la géométrie des solides ne doit pas être traitée, il faut saisir toutes les occasions de diminuer la dépendance de l'élève vis-à-vis de la représentation graphique. On étendra ainsi à l'espace des questions telles que : « Quel est le lien des points équidistants de 2 points donnés, des points à une distance constante d'une droite donnée ou d'un point donné. Outre cela, on trouvera le temps de donner un aperçu rapide de géométrie des solides lorsque les premiers degrés des études auront été franchis rapidement et convenablement. Le onzième livre d'Euclide a la réputation d'être ennuyeux et difficile; tout ce qu'il contient d'important peut être traité beaucoup plus rapidement, surtout en faisant un usage fréquent de l'idée de mouvement d'une ligne ou d'un plan. Il faudrait de même introduire l'étude des solides, étude qui serait beaucoup facilitée par le fait que les grandes lignes auraient été rendues familières dès le début.

GRAPHIQUES

Il est maintenant usuel d'adjoindre plus ou moins de travail graphique à l'algèbre. On fait entrer ainsi un élément de réalité dans un sujet souvent très abstrait et irréel, ce qui ne peut avoir que de bons résultats. Il est rare de rencontrer des gens ayant une idée précise sur la place que cette étude doit occuper et sur les avantages qui doivent en résulter. Elle est trop fréquemment considérée comme un fardeau additionnel qui ne trouve place qu'en sacrifiant autre chose. Cela provient en grande partie de la manière dont ce sujet est traité dans les manuels, seuls guides des nombreux maîtres non spécialistes. Le procédé habituel consiste à commencer par déterminer des points isolés, puis à rechercher l'aire des triangles et des diverses figures formées par ces points, ensuite à représenter des équations du 1er degré en les amenant à la forme réduite et enfin à résondre graphiquement des systèmes simples de 2 équations simultanées. Dans tout ceci il n'y a pas grand'chose qui ait une influence capitale sur l'étude des principes de l'algèbre ordinaire. La résolution graphique d'équations simples soulève, avec raison, une objection que l'élève exprime parfois : « Pourquoi employer des procédés relativement compliqués alors que la méthode directe serait plus simple : » En général, la méthode graphique n'est appliquée aux fonctions du 2me dégré que lorsque l'étude du 2me degré est abordée d'une manière générale. Là encore on se préoccupe beaucoup trop de la solution d'équations qui, pour la plupart, se résolvent plus aisément algébriquement. On enseigne trop rarement aux élèves qu'ils peuvent employer la méthode graphique pour la résolution d'équations de degré égal ou supérieur au 3me ou encore d'autres expressions qu'ils ne pourraient résoudre autrement. Quelquefois, lorsque l'étude en est poussée plus loin, le but proposé est la réduction de l'équation du 2me degré à la forme réduite, recherche du centre, des asymptotes et des axes. Cette étude est alors considérée non pas au point de vue de l'algèbre élémentaire, mais à celui de la géométrie analytique ; de telle sorte que de la façon dont elle est présentée dans la plupart des manuels, elle n'est qu'un chapitre prématuré de géométrie analytique.

Dans ce cas on peut, avec justice, regarder le travail graphique comme une adjonction au travail ordinaire et qui ne fait rien ou presque rien pour rendre celui-ci plus facile ou plus intelligent, il vaut alors peut-être mieux le laisser de côté. Il existe cependant un meilleur moyen apparamment peu connu des maîtres. Pour l'exposer en entier, il faudrait non pas se contenter d'ajouter un chapitre ou deux aux manuels existants déjà comme l'ont fait leurs auteurs, mais écrire un nouveau traité d'algèbre. Cela sortirait du cadre de la présente circulaire ; il faut se borner ici à noter quelques faits saillants.

La méthode graphique peut être introduite très tôt, au moment de la transition entre l'arithmétique et l'algèbre.

La représentation graphique des statistiques, si elle n'est pas déjà connue, sera expliquée et fera le sujet de quelques exercices ; on se bornera naturellement à des statistiques en rapport avec les connaissances réelles des élèves.

Les élèves réaliseront expérimentalement la différence entre une simple reproduction d'une série de valeurs discontinues et probablement sans liaisons, comme les températures maxima d'une suite de jours successifs, et un graphique continu admettant l'usage de l'interpolation.

Il faut ensuite passer des simples statistiques à d'autres questions telles que :

La distance entre Londres et Bristol étant de 120 milles, quelles seront les vitesses moyennes des trains parcourant cette distance en 2, 3, 4,..... heures ? Représenter graphiquement les résultats.

On poussera la question plus loin en continuant à faire varier le temps de parcours et comme de cette manière, on s'éloigne des vitesses réelles d'un train, on pourra, pour obtenir une courbe complète, employer à l'une des extrémités les vitesses du son et de la lumière et à l'autre extrémité celles d'un cycliste, d'une voiture, d'un fourgon, d'un piéton. On voit ainsi l'utilité de l'expression algébrique $\frac{120}{x}$ ainsi que toutes ses valeurs représentées graphiquement, et on donne incidemment d'une façon simple et efficace la conception nouvelle d'infini et du zéro mathématique. D'autres exemples seront fournis par les problèmes des livres d'arithmétique, spécialement ceux du chapitre des « proportions ». Ces questions comprendront naturellement le cas de proportion directe et inverse (tel que la valeur d'une somme placée à intérêts simples) où il y a accroissement proportionnel et les intérêts composés où il n'y a pas de proportionnalité.

Cette méthode a une grande valeur pour l'étude de l'arithmétique, la signification de proportion directe et inverse étant mise en évidence, ainsi que le fait que ces relations n'existent pas toujours.

On acquiert ainsi une grande habitude du calcul mental et ce qui est encore plus important cela oblige à résoudre plusieurs cas d'un même problème. L'élève apprend ainsi par expérience qu'à un travail exact correspond un résultat graphique rationnel et il est graduellement initié à la notion de continuité.

Une fois qu'une expression algébrique analogue à $\frac{120}{x}$ a été formulée, le maître pourra donner de telles expressions presque au hasard et laisser les élèves les reproduire graphiquement. Un bon exemple pour le début est $(x - 2)(x - 4)$ qui entraîne de suite plusieurs remarques : la signification

des parenthèses, la loi des signes dans la multiplication, la représentation graphique des valeurs négatives et l'extension de l'application du terme « x » aux valeurs négatives. Au début, il vaut mieux ne pas introduire la lettre « y » comme nom de la fonction de x.

Les élèves commettront d'ailleurs bien des erreurs, soit d'arithmétique, soit d'interprétation, mais ces difficultés seront vite surmontées et une fois que les élèves ont expérimenté eux-mêmes qu'un travail minutieux donne des courbes continues, la bataille est gagnée.

Il faut naturellement de la variété ; tandis que les élèves moins avancés traiteront des cas simples, les autres s'attaqueront à des fonctions plus compliquées, par ex. :

$$(x - 2)(x - 4)(x - 6) \quad \text{ou} \quad \frac{(x - 2)(x - 6)}{(x - 4)}$$

Les élèves se rendront alors compte qu'ils peuvent représenter graphiquement toute fonction algébrique explicite. Il vaudra généralement mieux s'en tenir à la forme en facteurs indiquée ci-dessus ; les notions d'arithmétique impliquées sont alors beaucoup plus simples et les élèves ont plus de liberté pour s'attacher au travail essentiel consistant à tracer la courbe. Ils atteignent ainsi plus rapidement le but, soit la réalisation de la continuité et la constatation de la rationalité et de l'enchaînement des lois de l'arithmétique ou de l'algèbre.

Ce travail remplacera avantageusement les évaluations ennuyeuses et sans signification que l'on trouve dans le 1er chapitre des manuels ordinaires d'algèbre.

Lorsque les élèves ont appris à travailler d'une façon satisfaisante on pourra leur proposer quelques formes linéaires (par exemple $2x + 5$). Il est préférable de ne pas commencer, comme cela se fait généralement, avec de telles formes, car il est important que dès le début toutes les formes soient considérées indifféremment comme abordables par les élèves ; de plus le fait que les fonctions du 1er degré sont représentées par une ligne droite fera beaucoup plus d'impression s'il est appuyé d'une série d'exemples plus généraux où ce n'est pas le cas que s'il est seul connu.

Naturellement les fonctions seront d'abord calculées pour des valeurs entières de x ; dans des cas simples, ce sera suffisant pour faire apparaître la courbe. Cependant, afin d'affermir encore chez les élèves l'idée de la continuité d'une courbe et quelquefois d'obtenir la forme de la courbe plus complètement, on introduira des valeurs fractionnaires de x. On pourra demander : « Quelle valeur la fonction a-t-elle pour $x = 3\,{}^1/_2$? » Après avoir cherché la valeur par le dessin, les élèves la vérifieront par le calcul.

Lorsque les élèves auront dessiné une courbe, par exemple : $(x - 2)(x - 4)$ il faudra leur faire résoudre une équation telle que $(x - 2)(x - 4) = 5$. Cela donne des indications nouvelles sur la notion si importante de l'équation elle-même. La première solution obtenue sera approximative. Il faudra immédiatement la vérifier arithmétiquement, la comparaison du résultat et de la courbe permettra de reconnaître le sens de l'erreur. Il pourra être nécessaire, soit de dessiner de nouveau la courbe, soit même de la dessiner à une autre échelle ; les meilleurs élèves devront arriver à un résultat exact à la 2me décimale près. Cela entraîne des exercices arithmétiques sur les fractions et les décimales, ainsi que de l'exactitude dans les mesures et le dessin. Les élèves plus avancés pourront aussi résoudre quelques équations

d'un degré égal ou supérieur au 3me, ils se rendront ainsi compte de la puissance de la méthode qu'ils ont entre les mains.

Tout ceci pourra fort bien se faire dès le début et indépendamment de l'enseignement ordinaire de l'algèbre. Les élèves se rendront ainsi évidemment maîtres des notions essentielles de l'algèbre, soit la cohérence dans les résultats et par conséquent la rationalité des lois fondamentales et la signification des équations.

Le travail graphique ne comprendra rien de plus, car il ne doit pas être un but, mais un moyen. Toutes les méthodes particulières, la réduction à des formes spéciales ou la considération approfondie de cas spéciaux doivent être renvoyées à plus tard.

Indiquons en passant qu'il vaut mieux ne pas faire les premières constructions graphiques sur du papier quadrillé. Les élèves se serviront d'abord de papiers unis ou de tableaux noirs et marqueront les mesures au jugé ou à l'aide d'une règle graduée. Puis, lorsque l'idée directrice sera bien nette dans leur esprit, on les initiera à l'usage du papier quadrillé comme moyen simplificateur.

La méthode de représentation graphique, une fois acquise, elle sera rappelée de temps à autre par un exercice, généralement une équation à résoudre ; son utilité est également notable en algèbre.

On peut donner un exemple qui montrera la meilleure manière dont on peut traiter un point, considéré comme difficile, celui des indices fractionnaires et négatifs. L'emploi des graphiques pour le calcul des logarithmes est maintenant assez général, mais l'utilité de son application à cette période plus précoce a rarement été reconnue.

Supposons qu'il s'agisse d'initier une classe à l'extension de la notion d'indice. Si le maître dit à ses élèves : « Tracez la courbe 2^x », ceux-ci chercheront naturellement les valeurs pour x valant 2, 4, 8, 16, etc., et ils joindront tout naturellement les points correspondant par une courbe.

Cela suggérera de suite la question : « De quel droit tracez-vous cette courbe, que signifie $2^{1,5}$? » Cela n'a pas de signification, mais la courbe lui donne une valeur soit 2,8. Demandez ensuite d'où peut provenir une expression telle que $2^{\frac{3}{2}}$, soit en prenant la racine carrée de 2^3. Ce résultat correspond à la valeur donnée par la courbe. On prendra également d'autres cas tels que $2^{\frac{5}{2}}$ et $2^{\frac{4}{3}}$.

Remarquons ensuite que la courbe s'arrête brusquement à $x = 1$, jusqu'ici les courbes ne s'arrêtaient pas brusquement. Où semble-t-elle aller ? évidemment pas à l'origine ; cela amènera à la considération de 2^0 puis de 2^{-1}, etc.

Cette méthode donnera aux élèves une idée ferme et précise de la rationalité de l'extension des définitions, idée qui est rarement obtenue par les méthodes ordinaires et permettra ainsi de ne pas aborder encore les démonstrations qui prouvent que les nouvelles définitions se conforment aux lois des indices ; démonstrations que les élèves trouvent difficiles à cette période de leurs études et qui sont par conséquent peu convaincantes et psychologiquement fausses.

La signification des indices fractionnaires et négatifs étant établie, les élèves peuvent tracer les courbes 10^0, $10^{\frac{1}{4}}$, $10^{\frac{1}{2}}$, $10^{\frac{3}{4}}$, 10 et employer leurs

graphiques à la recherche des indices des puissances de 10 donnant les nombres naturels ; ils obtiennent donc les éléments d'une table de logarithmes. L'exactitude peut facilement être poussée jusqu'à la 2me décimale. L'introduction des tables à 4 décimales sera alors aisée.

De même, lorsque des expressions du 2me degré sont considérées simultanément, on y joindra leur interprétation graphique. La forme $xy = c^2$ sera déjà familière. La forme $x^2 + y^2 = c^2$ devra être interprétée. Il ne sera généralement pas nécessaire d'aller plus loin. On traitera cependant encore le principe de tangence dépendant de l'égalité des racines ainsi que le cas plus étendu d'intersection en points réels et imaginaires, le chapitre ordinaire sur les racines des équations du 2me degré étant sans cela ennuyeux et sans but et n'ayant aucun contact avec l'expérience.

L'acquisition approfondie et précoce de l'habitude de la représentation graphique facilite dans une large mesure les débuts de la trigonométrie et de la mécanique. En tant que cela concerne l'algèbre élémentaire tout ce qui a une réelle valeur a été suffisamment indiqué.

RÉSUMÉ

Premier degré.

Familiariser avec les notions géométriques fondamentales et arriver à une conception claire de celles-ci, cela en observant les faits ordinaires de la vie et au moyen d'exercices pratiques. Le développement et le degré d'exactitude de ces travaux pratiques devra naturellement s'inspirer de ce but.

Les matières à traiter sont : les solides, surfaces, lignes, points, volumes, aires, longueurs, direction, angle, parallélisme.

Les exercices pratiques de modèles de figures planes seront laissés de côté ; les constructions seront apprises plus tard.

Les définitions seront évitées, mais on exigera un usage exact des termes.

Les axiomes et les postulats ne seront ni appris ni même mentionnés.

Deuxième degré.

Pour bâtir la géométrie déductive, la connaissance de certains théorèmes fondamentaux sur les angles, les parallèles et l'égalité des triangles est nécessaire, parce qu'elle offre une base plus large que celle d' « axiome et postulat » d'Euclide. Ces théorèmes se baseront sur l'intuition et seront étayés d'exercices pratiques, les énoncés en seront appris avec exactitude.

Le dessin devra être minutieusement correct et sa précision vérifiée numériquement.

Les problèmes théoriques seront laissés de côté.

Troisième degré.

Cours logique de géométrie déductive basé sur les principes et théorèmes fondamentaux accompagnés de travaux originaux. Des théorèmes nouveaux seront mis en lumière par des problèmes théoriques. Les exercices pratiques seront multipliés lorsqu'il y a une idée nouvelle à assimiler.

Le travail pratique ne doit jamais être un but, il doit généralement pré-

céder les connaissances et peut avec avantage aller au delà de ce qui doit être traité dans la théorie.

L'élève doit être mis en état de résoudre des problèmes théoriques.

Un cours de géométrie des solides est à recommander.

GRAPHIQUES.

Ce travail servira d'introduction explicative à l'algèbre élémentaire et non d'introduction à la géométrie analytique.

Le premier travail graphique, après le tracé ordinaire de statistiques discontinues devra comprendre des fonctions explicites non linéaires illustrant la nature des expressions algébriques en général.

La résolution des équations devra être suivie de la vérification arithmétique des résultats.

Le travail graphique ne doit pas être un but, mais un moyen.

Mars 1909 W.-N. BRUCE
Principal Assistant Secretary.

(Traduction de Mlle R. MASSON, Genève.)

BIBLIOGRAPHIE

O. BLUMENTHAL. — **Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini.** — 1 vol. gr. in-8° de VI-150 pages ; 5 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

En analysant, dans un article voisin, la *Théorie de la croissance*, de M. Borel, j'essaie de donner une idée de l'importance de cette notion quant à l'étude des fonctions. Le livre de M. Blumenthal, paraissant en même temps, fournit à point un nouvel exemple de toute première qualité. La décomposition des fonctions entières en facteurs primaires conduisit tout d'abord à attacher une grande importance à la notion du *genre;* toutefois les problèmes les plus divers (par exemple le prolongement analytique d'après la méthode de M. Mittag-Leffler) réintroduisirent des fonctions dont la distribution des zéros était difficile à préciser et d'autre part, ce qu'il importait de connaître était surtout leur mode de croissance. Aussi les recherches s'orientèrent dans cette direction et la notion d'*ordre* s'imposa à son tour de façon impérieuse. Les fonctions entières d'ordre fini croissent exponentiellement ; il y a des fonctions d'ordre nul qui croissent moins vite et des fonctions d'ordre infini à croissance plus rapide. C'est surtout à ces dernières que l'auteur s'attache en essayant de montrer que ses résultats peuvent comprendre comme cas particuliers ceux qui sont relatifs à l'ordre fini.

Une des notions fondamentales introduites dans ce livre est celle de *fonction-type ;* c'est une fonction de comparaison adjointe à celle qu'il s'agit d'étudier et qui permet une étude plus simple à une foule de points de vue,

par exemple quant à la décomposition en facteurs primaires, mais dont la croissance est cependant comparable à celle de la fonction primitivement considérée. D'où des vues tout à fait nouvelles sur les produits canoniques dues, en Allemagne, à M. Blumenthal lui-même et, en France, à M. Denjoy.

Enfin, cette notion de la fonction-type aide encore à revenir sur les importants théorèmes dont l'idée première revient à M. Picard, lesquels ne concernaient d'abord que les valeurs exceptionnelles d'une fonction uniforme au voisinage d'une singularité essentielle et qui, maintenant, ont été étendus jusqu'à concerner en même temps l'ordre d'une fonction et la distribution de ses valeurs. On voit, par ces quelques citations, quelle est la profondeur des recherches abordées dans ce volume. Cela n'empêche pas qu'il est écrit d'une façon fort claire bien que le français soit une langue étrangère pour l'auteur. Parfois les formules sont un peu compliquées, mais dans des théories aussi neuves, cela vaut mieux que d'introduire un symbolisme nouveau dont on ne sait jamais s'il sera consacré par l'usage.

A. Buhl (Toulouse).

M. Böcher. — **Einführung in die höhere Algebra.** (Traduction allemande de H. Beck avec une préface de E. Study.) — 1 vol. gr. in-8° de XII-348 pages, B. G. Teubner, Leipzig.

Cette introduction à l'algèbre supérieure ne vise pas toutes les parties de l'algèbre, mais plus particulièrement la théorie des formes. Elle semble excellemment faite ; elle est d'ailleurs aussi élémentaire que possible et mérite en tous points les éloges que lui décerne M. Study dans la préface de la présente traduction. Les quantités complexes les plus générales sont introduites sous forme de matrices, mais l'idée préliminaire est d'une origine si simple que le premier exemple est formé par la réunion de 5 chevaux, 3 vaches et 7 moutons (p. 65).

Dans l'étude des transformations linéaires, quadratiques, etc.... l'auteur non seulement parle le langage géométrique, mais il fait de la géométrie en étudiant par exemple les propriétés du rapport ou anharmonique et celles des faisceaux de coniques. Mêmes remarques pour les surfaces du second degré. En outre il choisit ses notations avec beaucoup d'art, ce qui lui permet d'écrire toujours automatiquement non seulement les formes primitives mais toutes les expressions adjointes telles que dérivées partielles, résultants, discriminants, plus grands communs diviseurs, etc.... En résumé, bon ouvrage d'initiation, très facile à lire et à comprendre. Le texte est d'ailleurs coupé par de nombreux et excellents exercices.

A. Buhl (Toulouse).

E. Borel. — **Leçons sur la théorie de la croissance,** professées à la Faculté des Sciences de Paris, recueillies et rédigées par A. Denjoy. — 1 vol. gr. in-8° de VIII-170 pages ; 5 fr. 50. Gauthier-Villars, Paris.

Les fonctions de plus en plus complexes conçues par les géomètres, qu'elles soient des créations de leur esprit ou des nécessités imposées, par exemple, par des équations différentielles, ne peuvent plus, depuis longtemps déjà, être représentées par les anciens symboles. De plus, elles n'ont pas forcément des propriétés exactes et l'étude de leurs propriétés approchées doit surtout se faire par comparaison avec les fonctions élémentaires.

Tel est l'objet de la théorie de la croissance. Les transcendantes qui ser-

vent de comparaison sont d'abord l'exponentielle et le logarithme ; la *réitération* de l'exponentielle nous offre des types croissant de plus en plus vite, au delà desquels il y a d'ailleurs des fonctions croissant plus vite encore, la conception de ces dernières étant toutefois impossible ou au moins inutile dans l'état actuel de l'Analyse. Ces simples indications montrent non seulement l'utilité mais encore la curiosité qui s'attache à l'étude de la croissance.

Supposons maintenant étudiée la croissance d'une certaine fonction analytique. Que pouvons-nous en conclure quant à la croissance de sa dérivée ou de son intégrale ? C'est là un problème qui évidemment s'est déjà rencontré bien souvent et dont les géomètres se sont tirés au hasard d'inspirations particulières. M. Borel cherche quelques généralités ; de plus, dans ces dernières années, des travaux, comme ceux de M. P. Boutroux sur les fonctions entières, ont nécessité l'étude approfondie de la croissance de certaines intégrales. Le tout permet déjà l'existence des grandes lignes d'une théorie. L'étude de la croissance des termes d'une série permet d'obtenir bien plus que ne donnent les anciens critères de convergence ; nous pouvons, par exemple, reconnaître si une série divergente converge asymptotiquement et, à propos de séries asymptotiques, M. Borel est revenu très élégamment sur les propriétés de la fonction gamma. Je signale aussi la croissance des fonctions entières comparée à celle de leurs zéros. Un dernier chapitre sur les applications arithmétiques est du plus puissant intérêt. Comme je l'ai dit plus haut, la notion de croissance permet de *définir* des fonctions que d'autre part on ne peut *connaître :* un paradoxe semblable se présente au début de la théorie des nombres incommensurables et, dès lors, l'approximation de ceux-ci par des nombres rationnels ressemble de manière frappante à la représentation approchée d'une fonction par une autre dont la croissance est connue. On conçoit tout ce que ce rapprochement peut avoir de fécond, d'autant plus que M. Borel, loin de le laisser dans l'abstrait, l'illustre élégamment en analysant la transcendance des nombres e et π. A. Buhl (Toulouse).

E. A. Fouët. — **Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques.** — Deuxième édition. Tome II. — 1 vol. gr. in-8° de XII-265 pages ; 9 fr. Gauthier-Villars, Paris.

Le succès de cet ouvrage, signalé déjà lors de la publication de la seconde édition du tome premier[1], s'affirme plus que jamais tant par l'élégance que met l'auteur à rassembler les éléments essentiels de l'analyse actuelle que par le soin qu'il met à ne laisser échapper aucune publication utile au sujet, celle-ci étant au moins indiquée par une note en bas de page. Il serait difficile d'analyser cette seconde édition en citant seulement les adjonctions faites à la première, tant les remaniements sont importants. Il ne sera d'ailleurs pas superflu de suivre une nouvelle fois la pensée de l'auteur ; son but est assurément de mettre le lecteur à même de travailler dans l'analyse moderne sans l'obliger à se débrouiller dans le fatras des mémoires trop rigoureux. Aussi, après une étude des fonctions uniformes, puis des procédés susceptibles d'uniformiser les fonctions multiformes (transformations diverses, usage des surfaces de Riemann), il aborde la notion de série envisagée des différents points de vue d'où elle peut servir

[1] Voir l'analyse de ce tome dans l'*Enseign. math.*, t. X, p. 352, 1908.

à *définir* la fonction. Pour les séries entières, le plus grand soin est attaché au mode de croissance des coefficients (lemmes de Cauchy, Hadamard, Borel), ce qui n'empêche nullement d'obtenir certains développements de manière rapide et élégante quand les théorèmes fondamentaux ont assuré la convergence et l'unicité du résultat.

Les séries qui peuvent utilement se substituer aux séries entières, sont étudiées ensuite. La première place appartient sans doute aux séries trigonométriques ; il faut leur ajouter toutes les expressions qui se sont substituées aux précédentes séries quand elles ne convergeaient pas ; nous arrivons ainsi aux séries sommables et aux séries des polynômes analytiques dont on pressent l'existence, celle-ci devant être véritablement approfondie dans le tome suivant.

L'étude des transcendantes élémentaires est conduite avec une très grande facilité jusqu'aux fonctions eulériennes et jusqu'à la série hypergéométrique à laquelle se rattachent immédiatement les fonctions sphériques et cylindriques ; quant à la représentation sous forme de produits de celles des fonctions précédentes qui sont entières, j'aurais à peine besoin de le mentionner si ceci ne m'amenait à signaler par contraste de bien curieux produits pour les fonctions inverses telles que le logarithme et l'arc cosinus ; je les ignorais totalement et j'imagine que bien des lecteurs dans mon cas ne les verront pas sans intérêt (p. 135).

Si la théorie des séries simples prépare admirablement les parties les plus élémentaires de la théorie des fonctions, on peut demander de même à celle des séries multiples de préparer des notions plus élevées telles que celles des fonctions thêta de Jacobi à une ou plusieurs variables. L'enchaînement est encore extrêmement remarquable et c'est avec moins de 60 pages que la théorie se développe et aboutit à des résultats aussi remarquables. Un dernier chapitre a trait aux fonctions définies par des intégrales ; les formules de Riemann et Green en sont les premiers éléments qui aboutissent au théorème de Cauchy avec toutes les précautions dont l'entoure M. Goursat. La notion d'intégrale est elle-même soigneusement étudiée avec les perfectionnements dus à Riemann, puis à MM. Darboux et Lebesgue. Combien fut judicieux et sûr le choix de l'auteur pour qu'il puisse nous présenter tant de choses ! Quelle finesse d'esprit n'a-t-il pas eu pour faire de chacune un petit bijou. A. Buhl (Toulouse).

H. Poincaré. — **Leçons de Mécanique céleste**, professées à la Sorbonne. — Tome III[1]. *Théorie des marées*, rédigée par E. Fichot, ingénieur-hydrographe de la marine. — 1 vol. gr. in-8° de 472 pages avec 67 figures et 2 cartes hors texte. Gauthier-Villars. Paris 1910.

Par rapport aux dimensions des océans, les marées sont des oscillations dont l'amplitude peut être considérée comme infiniment petite ; c'est pourquoi le présent volume débute par l'étude classique des petites oscillations d'un système mécanique. On sait que dans cette théorie on ne rencontre que des équations linéaires dont le premier membre détermine une oscillation *propre*, cependant que les termes du second membre, qui dépendent du potentiel perturbateur et peuvent être en nombre quelconque, déterminent des oscillations *contraintes*. Si parmi ces dernières il s'en trouve qui ont

[1] Voir dans l'*Enseign. math.* les analyses des tomes I (T. VIII, 1906, p. 248) et II (T. XI, 1909, p. 231).

même période que l'oscillation propre, il y a *résonance*, et c'est précisément le rôle capital de la résonance que M. Poincaré cherche immédiatement à mettre en lumière.

Ces préliminaires étant établis, on peut passer du système de points matériels au cas du milieu continu; les sigmas se remplacent par des intégrales.

Les premières marées proprement dites dont l'étude vient d'abord, sont les marées à très longue période qui ont d'ailleurs pour cas-limite les marées purement statiques, mais, dans ce domaine, la simplicité n'est pas aussi grande qu'on l'a cru pendant longtemps. Un astronome de l'Observatoire du Cap, M. Hough, a étudié l'influence du frottement d'une manière qui conduit maintenant à diviser les marées statiques en deux sortes; la première sorte répond à l'ancienne idée d'équilibre, mais, dans les marées de la seconde sorte, l'équilibre n'est qu'apparent, la masse pouvant être parcourue par des courants n'altérant pas l'état de la surface.

Quant à l'étude des marées dynamiques, elle est savamment divisée en plusieurs étapes. Nous partons d'abord d'un simple problème d'hydrodynamique, à apparence très classique, dans lequel il ne s'agit que des oscillations d'un liquide pesant dans un vase fixe; on passe ensuite au cas où ce liquide recouvre une sphère non tournante, puis une sphère tournante. Le cas général est ainsi préparé par des théories qui ne se compliquent que progressivement. Les célèbres résultats dus à Laplace ont été complétés par M. Hough, dont les travaux sont habilement résumés par M. Poincaré; ils permettent aussi de revenir sur les marées statiques et de décider définitivement de l'influence du frottement quant à la classification de la marée dans l'une des sortes mentionnées plus haut.

Enfin, si le cas naturel est excessivement compliqué, il ne faut pas oublier qu'il est compris entre le cas limite où la mer recouvrirait toute une sphère et celui où l'eau ne serait emprisonnée que dans des canaux étroits. Ces deux cas-limites admettent des théories suffisamment complètes permettant de pousser les calculs jusqu'au bout, et leur développement, effectué par M. Poincaré, est certainement ce qu'il y a de mieux pour arriver à se faire une idée du phénomène réel.

Tout ce qui précède peut n'être considéré, si l'on veut, que comme un perfectionnement des méthodes anciennes. Au contraire, une nouveauté d'un intérêt capital est constituée par l'application de la méthode de Fredholm à l'intégration des équations aux dérivées partielles du problème des marées. M. Poincaré rappelle brièvement en quoi consiste cette méthode; il l'applique à quelques problèmes tels que celui de Dirichlet, lesquels — quelle ironie! — semblent très simples à côté de ceux qu'il faudrait résoudre maintenant. Il expose ses propres travaux et perfectionne en des points très importants une méthode qui, malgré son caractère général, ne s'appliquait pas aux marées sans de profondes modifications. Il expose aussi la méthode de Ritz, fondée sur le calcul des variations, laquelle, convenablement perfectionnée, rendrait peut-être des services analogues à celle de Fredholm. Sans doute, ces méthodes sont surtout théoriques; on se demande quelle fonction on pourrait bien y introduire pour représenter, par exemple, la profondeur de la mer, mais, là encore, l'intérêt n'est probablement pas du côté de l'excessive généralité. Il ne faut pas oublier que les résultats les plus élégants obtenus jusqu'ici correspondent au cas de la profondeur constante ou fonction de la seule latitude. Et de tels résultats ont

encore bien besoin de compléments ou même de démonstrations véritablement rigoureuses ; c'est là surtout ce qu'il faut commencer par demander aux méthodes nouvelles.

Le nouvel ouvrage de M. Poincaré est divisé en cinq parties ; tout ce que je viens de dire concerne la première qui est de beaucoup la plus importante. Les autres n'en sont que des compléments qu'on peut analyser plus rapidement.

La seconde partie traite des méthodes pratiques de prédiction des marées. C'est l'analyse harmonique de Laplace qui consiste à ne demander à la théorie que la forme analytique du résultat. Les constantes qui y figurent sont déterminées par l'observation. Il y a là un procédé qu'on retrouve en astronomie dans beaucoup d'autres cas (par exemple dans l'étude de la réfraction) ; ici il est assez curieux, surtout à cause des dispositions cinématiques imaginées pour profiter des indications des marégraphes avec économie de calculs.

La troisième partie fait une synthèse des observations et les compare avec la théorie. Il y a là l'étude géographique des marées et celles des oscillations propres produites artificiellement dans de petits bassins dont on peut faire varier la forme. Ici se placent aussi les fort belles planches jointes à l'ouvrage. Ce sont des planisphères indiquant la distribution des marées semi-diurnes, et celles des lignes *cotidales* (lieu des points où la marée se produit à la même heure).

La quatrième partie traite des marées fluviales. Si l'on suppose les déplacements très petits et le frottement négligeable, la marée fluviale est régie par l'équation des cordes vibrantes, mais ce cas est trop simple pour donner quoi que ce soit qui coïncide avec l'observation. En deuxième approximation on néglige le frottement qui correspond à une onde principale, mais en le faisant intervenir sur une grande longueur de fleuve de manière à éteindre une onde parasite. Alors apparaît une explication assez satisfaisante pour le mascaret. En troisième approximation, il faut maintenir le frottement, mais, si l'on se borne alors aux petits déplacements, on tombe sur l'équation des télégraphistes.

La cinquième et dernière partie de l'ouvrage a trait à l'influence des marées sur la rotation des astres. Nous y trouvons notamment la question de la rotation lunaire et celle, probablement analogue, qui porte à croire que Mercure et Vénus ont un jour sidéral égal à l'année solaire. J'insiste, avant de terminer, sur la rédaction extrêmement soignée et consciencieuse due à M. Fichot ; il est même hors de doute que, dans les parties pratiques, il a adjoint toute son expérience d'hydrographe à la haute science de M. Poincaré. A. Buhl (Toulouse).

C. Riquier. — **Les systèmes d'équations aux dérivées partielles.** — 1 vol. gr. in-8° de XXVII-590 pages avec figures : 20 fr. Gauthier-Villars, Paris.

Voici un ouvrage qui, par son esprit, doit s'imposer à l'attention des géomètres. On sait les extraordinaires difficultés rencontrées dans l'étude des équations aux dérivées partielles ; ces difficultés entraînèrent une limitation des problèmes et, comme ceux de la physique mathématique n'exigeaient que la considération des cas où les variables étaient réelles, le point de vue analytique pur se trouva délaissé. C'est surtout ce point de vue qui est repris aujourd'hui par M. Riquier. Dirigé dans cette voie par les tra-

vaux de M. Méray, avec lequel il collabora bientôt, le professeur de Caen a publié une grande quantité de mémoires qui se trouvent aujourd'hui rassemblés avec de nombreuses adjonctions destinées à former un tout homogène. Au fond il s'agit surtout de théorèmes d'existence; un système différentiel donné permet-il toujours le calcul des dérivées des fonctions inconnues de manière que l'usage des conditions initiales permette finalement la formation de développements tayloriens? Il faut d'abord distinguer soigneusement ce qu'on entend par conditions initiales; certains systèmes s'accommodent de celles-ci quelles qu'elles soient, d'où l'idée de *passivité* due à M. Méray; d'autres ne s'accommodent que de conditions initiales particulières. Ces difficultés franchies, obtient-on des développements tayloriens convergents? C'est la question capitale pour laquelle Cauchy et Mme de Kowalewsky donnaient déjà des théorèmes. Les méthodes de M. Méray donnèrent des développements pour lesquels la chose n'était pas aisée à trancher et qui furent le point de départ des travaux de M. Riquier. Ce dernier les poursuit aujourd'hui jusqu'au seuil du problème du prolongement analytique et, si ce dernier problème est aujourd'hui fort avancé pour les fonctions d'une variable, il est presque entièrement à faire quant à celles de plusieurs variables qui, ne l'oublions pas, sont pour M. Riquier indifféremment imaginaires ou réelles. On voit donc le champ de recherches nouvelles que peut ouvrir cet ouvrage.

Je me hâte d'ajouter aussi qu'en dehors de théorèmes d'existence, toujours forcément assez abstraits, l'auteur a traité d'intéressantes applications, notamment le problème de la déformation finie dans l'hyperespace; il y a là des exemples curieux et naturels de systèmes qui ne sont pas immédiatement passifs. De plus, de grands efforts ont été faits pour rendre cet ouvrage accessible aux lecteurs non spécialisés dans les études précédentes. C'est ainsi qu'il débute par des chapitres sur la continuité et les séries entières à une ou plusieurs variables. La terminologie est celle de M. Méray auquel M. Riquier fait d'ailleurs de fréquents emprunts. Par bien des côtés les *Leçons* publiées par l'ancien professeur de Dijon sont complétées aujourd'hui par le professeur de Caen. Tous ceux qui connaissent l'œuvre de M. Méray verront en M. Riquier un savant continuateur; ceux qui ne la connaissent pas peuvent néanmoins prendre ce dernier comme initiateur.

A. Buhl (Toulouse).

H. Poincaré. — **Savants et écrivains.** — 1 vol. in-18, 280 p., 3 fr. 50; Ernest Flammarion, Paris.

M. Poincaré a réuni sous ce titre plusieurs biographies de savants, entre autres celles de Curie, de Laguerre, d'Hermite, de Halphen, de Tisserand, de Bertrand, de Weierstrass, de Lord Kelvin, etc. Bien que la carrière du savant soit rarement remplie d'aventures retentissantes, sa psychologie intellectuelle et morale mérite d'être étudiée. Leurs physionomies, malgré quelques traits communs, sont variées et originales. Ce sont autant d'exemples et d'enseignements réconfortants pour ceux qui entrent dans la carrière scientifique et auxquels il convient de signaler ces belles Notices.

L'auteur a cru pouvoir placer en tête de ce volume l'éloge de Sully Prudhomme qu'il a prononcé à l'Académie Française; ce poète délicat qui aimait la science aurait sans doute accepté de figurer dans cette société.

E. Lebon. — **Gaston Darboux,** biographie, bibliographie analytique des écrits (Collection des *Savants du jour*). — 1 fasc. gr. in-8°, 72 p. ; 7 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

Ce livre a été présenté à l'Académie des Sciences, dans la séance du 17 janvier 1910, par M. Emile Picard, président, qui s'est exprimé en ces termes :

« Je dépose sur le Bureau, de la part de M. Lebon, un ouvrage intitulé « Gaston Darboux, qui renferme une *Biographie* et une *Bibliographie analy-* « *tique des écrits* de M. Darboux M. Lebon a entrepris de publier une série « de petits volumes de nature analogue, sous le titre général de *Savants du* « *jour*. Déjà, il y a quelques mois, le premier volume de cette série, con- « sacré à Henri Poincaré, a été présenté à l'Académie. Dans l'opuscule actuel, « on trouvera une très intéressante biographie de notre secrétaire perpétuel, « avec une vue générale de son œuvre scientifique. La liste des mémoires et ou- « vrages, qui ont été distribués en sept sections, a été établie avec un soin « extrême. Leur énumération constituerait déjà un document précieux, mais « M. Lebon ne s'en est pas tenu là Il donne quelquefois un court résumé « du travail mentionné, et indique les analyses dont il a fait l'objet. La col- « lection, dont M. Ernest Lebon vient de publier les deux premiers volumes, « rendra certainement les plus grands services aux chercheurs et aux histo- « riens de la science. »

En faisant précéder les principales sections d'appréciations dues à des savants, M. Lebon a su donner à son ouvrage une forme qui intéressera non seulement les chercheurs, mais aussi les personnes qui désirent connaître seulement dans leur ensemble les travaux des grands savants qui font l'objet de cette utile collection.

Désiré André. — **Des notations mathématiques ;** énumération, choix et usage. — 1 vol. gr. in-8°, XVIII-501 p. ; 16 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

Parmi les nombreuses publications mathématiques de cet hiver, le présent ouvrage compte certainement au nombre des plus importants par l'objet traité, et des plus remarquables par la somme de travail qu'il représente. Les mathématiciens ont toujours cherché à adapter la notation au sujet traité, mais personne n'a eu l'idée de faire une étude d'ensemble des notations. L'ouvrage de M. André vient donc combler une lacune, car c'est le premier qui ait été écrit sur ce sujet. Il sera lu et consulté avec un vif intérêt non seulement par les mathématiciens, mais aussi par les philosophes et par tous ceux qui s'intéressent aux sciences exactes.

Au cours de sa longue carrière de professeur et de savant, M. André a réuni et annoté de nombreuses fiches sur les notations mathématiques. C'est donc le fruit d'un long et minutieux travail qu'il nous présente aujourd'hui.

Dans un intéressant *discours préliminaire* l'auteur indique *l'objet et le but de son ouvrage*. Celui-ci se compose de trois parties : énumération, choix et usage. « La première, dit-il, est la science des notations ; la deuxième, l'art de les choisir ; la troisième, l'art de les employer. »

La première, *l'énumération,* fait connaître les notations actuellement usitées, la manière de les écrire, de les disposer, de les rendre absolument correctes. Elle présente successivement les signes des grandeurs, les signes du calcul, les signes des objets et les signes de rédaction.

Dans la deuxième partie, l'auteur s'occupe du *choix des signes ;* il donne

les règles à suivre en vue de résoudre la question : un système d'objets étant donné, le représenter par le système de signes le meilleur possible. Pour être excellents, les signes doivent satisfaire aux conditions suivantes : netteté, précision, rappel des propriétés de l'objet, rappel des rapports entre les objets.

La troisième partie est consacrée à *l'usage des signes*. Elle enseigne comment on doit utiliser les signes en envisageant d'abord les expressions, puis les relations, et enfin le mécanisme algébrique.

L'ouvrage de M. André embrasse l'ensemble des branches mathématiques en se bornant aux notations usitées couramment, sans s'arrêter à celles qu'on emploie qu'à titre exceptionnel ou qui sont simplement proposées.

On ne saurait trop recommander l'étude de ce livre non seulement à ceux qui écrivent en mathématiques, mais aussi à ceux qui enseignent. C'est tout au début des études mathématiques qu'il faut initier et habituer les élèves à une écriture correcte et à des notation bien choisies. H. F.

O. Dziobek. — **Vörlesungen über Differential- u. Integralrechnung.** — 1 vol. gr. in-8°; 648 p., avec 150 fig.; relié; M. 16; B. G. Teubner, Leipzig.

Ces leçons de calcul différentiel et intégral s'adressent aux étudiants des écoles techniques supérieures et correspondent à peu près à l'enseignement que donne l'auteur depuis de nombreuses années à Charlottenbourg. Elles comprennent trois parties.

La *Première Partie* (p. 1-167), intitulée *Introduction au calcul différentiel et intégral*, contient le calcul des différences, l'étude des fonctions élémentaires, de la notion de continuité et des séries. Dans la *Deuxième Partie* sont réunies les notions essentielles du *Calcul différentiel* avec ses applications analytiques et géométriques. Puis vient, dans la *Troisième Partie*, le *Calcul intégral* avec les éléments de la théorie des équations différentielles.

Dans un ouvrage destiné aux écoles techniques les exercices numériques et les applications doivent avoir une large place. M. Dziobek n'y a pas manqué. Dans le texte même de nombreux exemples ont été intercalés et chacun des 42 paragraphes se termine par des problèmes à résoudre, dont on trouve la solution dans l'Appendice placé à la fin du volume.

Gust. Bauer. — **Vorlesungen über Algebra,** herausgegeben vom mathematischen Verein München. Mit einem Bildnis Gustav Bauers. Zweite Auflage. — 1 vol. gr. in-8°, 366 p. ; rélié, 12 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

C'est une nouvelle édition, entièrement revue, des leçons d'algèbre du professeur Bauer, décédé il y a quatre ans. Elle a été publiée, sous les auspices de la Société mathématique de Munich, par M. K. Doehlemann, avec la collaboration de MM. Wirtinger, Voss et Perron. En rééditant ce traité, les mathématiciens munichois rendent à la fois un bel hommage à la mémoire du savant professeur et un grand service à de nouvelles générations d'étudiants en leur fournissant un excellent ouvrage d'introduction à l'étude de l'algèbre supérieure.

Ce traité est principalement consacré à l'étude de la Théorie des équations et de celle de déterminants. On y trouve tout d'abord les propriétés générales des équations algébriques, puis la résolution algébrique des équations et enfin la résolution arithmétique, qui se termine par un chapitre entièrement consacré à la méthode de Graeffe.

La dernière partie traite de la théorie et des applications des déterminants.

F. Dingeldey. — **Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential- und Integralrechnung.** Erster Teil. — 1 vol. in-8°, relié, 202 p.; 6 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

Il existe de nombreux recueils de problèmes de Calcul différentiel et intégral, mais ils se bornent, pour la plupart, à des applications théoriques appartenant à l'Analyse et à la Géométrie. Cette nouvelle collection envisage plus particulièrement la Géométrie et les mathématiques appliquées, notamment la Physique et les sciences techniques. A ce titre elle est appelée à jouer un rôle utile dans les cours de mathématiques générales.

Ce premier volume est consacré aux applications du Calcul différentiel. Au début de chaque paragraphe l'auteur résume les notions théoriques utiles à la résolution des problèmes. Ceux-ci sont ensuite résolus; s'il y a lieu, l'auteur se borne à quelques indications sur la marche à suivre ou il donne simplement les résultats.

La table analytique qui termine le volume permettra de trouver immédiatement des problèmes sur tel sujet donné.

O.-D. Chwolson. — **Traité de Physique.** Ouvrage traduit sur les éditions russe et allemande, par E. Davaux. Edition revue et considérablement augmentée par l'auteur. Tome IV, 1er fasc. : *Champ électrique constant.* — 1 vol. gr. in-8°, 430 p.; 12 fr.; A. Hermann, Paris.

Nous avons déjà attiré l'attention de nos lecteurs sur ce Traité de Physique, qui est caractérisé par l'esprit moderne de son exposition, et nous leur avons signalé les fascicules qui intéressent les mathématiciens.

Ce premier fascicule du Tome IV a pour objet l'étude des phénomènes concernant le *champ électrique constant.* Par suite de la situation tout à fait singulière dans laquelle se trouvent actuellement la science des phénomènes électriques et magnétiques, le tome IV offre un intérêt tout particulier. On se trouve en effet aujourd'hui en présence de trois points de vue dans cette science : la structure extérieure, les applications et la théorie des phénomènes. L'auteur examine ces questions en toute sincérité au début de l'ouvrage, en passant en revue les différentes théories actuellement en présence.

Antonio Cabreira. — **Les mathématiques en Portugal.** Deuxième défense des travaux de Antonio Cabreira. — 1 vol. in-8°, XXXIX-118 p., en vente chez l'auteur, rue des Taipas, T. C., Lisbonne.

Dans cette brochure, M. A. Cabreira présente la défense de ses travaux, pour répondre aux critiques de M. R. Guimaræs. Nous avons donné, dans le n° du 15 mars 1910, l'analyse de l'ouvrage où M. Guimaræs attaque les travaux de M. Cabreira. L'impartialité exige que la brochure de M. Cabreira soit signalée aux lecteurs de cette analyse. E. Lebon (Paris).

Atti del IV Congresso internazionale dei Matematici *(Roma, 6-11 aprile 1908), pubblicati per cura del Segretario Generale* G. Castelnuovo. — 3 volumes, gr. in-8°, 35 fr.; Tip. della R. Accademia dei Lincei; en commission chez E. Lœscher & Cie, Rome.

Faisons un peu de statistique.

Aux quatre Congrès internationaux des mathématiciens qui eurent lieu dans les années 1887 (Zurich), 1900 (Paris), 1904 (Heidelberg) et 1908 (Rome),

assistèrent respectivement 242, 242, 396 et 688 personnes. Les Comptes rendus des trois premiers forment pour chacun un volume de 314, 454 et 766 pages; tandis que pour le dernier ils remplissent trois forts volumes, dont le nombre total des pages monte à 1122. Dans ces Comptes rendus, les communications scientifiques arrivent respectivement à 32, 32, 78 et 125; en outre, ils renferment le texte des conférences générales qui furent deux dans le premier congrès, cinq dans le second, quatre dans le troisième (en dehors de la commémoration de Jacobi lue par M. Kœnigsberger) et dix dans le dernier (sans compter le Rapport sur le Prix Guccia). Or si l'arithmétique n'est pas une opinion et si la statistique n'est pas une science indigne de ce nom, ces données nous semblent prouver que le succès de ces réunions périodiques de savants suit une ligne qui monte rapidement; c'est donc un devoir de rappeler les noms de MM. Laisant et Lemoine qui, les premiers, mirent à l'ordre du jour l'épineuse question de leur organisation (voyez *L'Intermédiaire des mathématiciens*, T. I, 1894, p. 113) et qui déployèrent une activité bien dirigée pour qu'on arrivât à un accord international sur ce sujet. Et il est facile de prévoir que le prochain Congrès (Cambridge, 1912) ne sera pas inférieur aux précédents; il est encore à souhaiter qu'il réussisse à resserrer encore les liens entre les mathématiciens anglais et leurs collègues du continent.

L'importance des Comptes rendus des trois premiers Congrès est bien connue par tout le monde; on les trouve dans toute bibliothèque, publique ou privée, fréquentées par les mathématiciens, et ils sont bien souvent consultés et cités. Or, sans crainte d'être démenti, nous pouvons affirmer que les Comptes rendus du Congrès de Rome auront le même sort. Cela paraît évident à tous ceux qui participèrent à cette réunion; mais pour la démontrer à tout le monde il faudrait que nous fassions une analyse détaillée des trois beaux volumes que nous avons sous les yeux. Malheureusement cela est impossible en raison des limites forcément restreintes d'une analyse bibliographique, et c'est même inutile dans cette revue qui, un mois après le Congrès, a déjà donné un compte rendu détaillé embrassant 40 pages. Bornons-nous donc à remarquer qu'à ces volumes devront à l'avenir avoir recours tous ceux qui s'intéressent à deux grandes questions dont la solution a été esquissée à Rome: c'est-à-dire l'unification des notations vectorielles et la détermination des lignes générales d'une réforme de l'enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires dont, depuis quelques années, on a reconnu la nécessité dans tous les pays civilisés. Comme sur ces questions les lecteurs de l'*Enseignement mathém.* ont été déjà minutieusement renseignés, nous terminons cette courte Note en souhaitant que la ville où l'esprit de Newton plane encore puisse voir le couronnement d'un édifice dont les bases furent posées dans la ville éternelle.

G. Loria (Gênes).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

Livres nouveaux:

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées, édition française publiée sous la direction de J. Molk; tome II, 3e vol.: *Equations différentielles ordinaires*, fasc. 1. *Sommaire:* Existence de l'intégrale géné-

rale. Détermination d'une intégrale particulière par ses valeurs initiales; exposé par P. Painlevé, Paris. — Méthodes d'intégrations élémentaires. Etude des équations différentielles ordinaires au point de vue formel; exposé par E. Vessiot, Lyon. — 1 fasc. in° 8, 170 p.; B. G. Teubner, Leipzig. Gauthier-Villars, Paris.

F. Bohnert. — **Elementare Stereometrie.** *(Sammlung Schubert)* 2. Auflage. — 1 vol. p. in-8° relié, 183 p.; 2 M. 40; G. J. Göschen, Leipzig.

J. Horn. — **Einführung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen.** *(Sammlung Schubert).* — 1 vol. p. in-8°, relié, 363 p.; 10 M.; G. J. Göschen, Leipzig.

H. Schubert. — **Elementare Arithmetik und Algebra.** *(Sammlung Schubert)* 2. Auflage. — 1 vol. p. in-8°, relié, 230 p.; 2 M. 80; G. J. Göschen, Leipzig.

F. Poske. — **Ueber die Notwendigkeit der Errichtung einer Zentralanstalt für den naturwissenschaftlichen Unterricht.** — 1 fasc. in-8°, 20 p.; M. 0.60; B. G. Teubner, Leipzig.

H.-E Timerding. — **Ueber Ursprung und Bedeutung der darstellenden Geometrie.** *(Festrede bei der öffentlichen Preisverteilung der herzoglichen technischen Hochschule Braunschweig).* — 1 fasc. in-8°, 16 p.; F. Vieweg, Braunschweig.

H. Kreis. — **Einige Anwendungen der Matricestheorie.** — 1 fasc. in-8°, 65 p.; Ziegler, Winterthour.

Wilhelm Ahrens. — **Latein oder Deutsch?** Die « Sprachenfrage » bei der Herausgabe der *Werke Leonhard Eulers.* — 1 fasc. in-8°, 76 p.; 1 M. 60; Karl Peters, Magdebourg.

S. Dannacher. — **Die geometrischen Grundlagen der freien Perspektive.** 1 fasc. in-4°. 34 p.; Huber, Frauenfeld.

Louis Couturat. — **Internaciona Matematikal Lexiko** en Ido, Germana, Angla, Franca e Italiana. — 1 fasc. in-4°, 36 p.; 1 M. 50; Fischer, Jena.

B. Lefebure S. J. — **Cours d'Algèbre élémentaire** à l'usage des cours moyens et des classes d'Humanités. 3e édition. In-8° (21-24) de VIII-608 p. et **Recueil d'exercices et de problèmes d'Algèbre élémentaire.** 3e édition. In-8° (21-14) 280 p.; 2 fr. 50. Dessain, Liège; Gauthier-Villars, Paris.

P. Duhem. — **Thermodynamique et Chimie.** — 1 vol. gr. in-8°, XII-579 p. avec 173 fig.; 16 fr. (18 fr., relié); A. Hermann & fils, Paris.

J.-A. Decourdemanche. — **Traité pratique des poids et mesures des peuples anciens et des Arabes.** — In-8° de VIII-144 p.; 5 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

A. Cabreira. — **Les Mathématiques en Portugal,** deuxième défense de ses travaux. — In-16, 118 p., en vente chez l'auteur, rue das Taipas, T, C, Lisbonne.

P.-L. Monteil. — **Théorie du Point. Géométrie curviligne.** — 1 fasc. in-4°, 78 p.; 3 fr. 50; Librairie militaire, R. Chapelot & Cie, Paris.

P. v. Schæwen. — **Jacobi de Billy.** Doctrinæ analyticæ. Inventum novum. Fermats Briefen an Billy entnommen, herausgegeben u. übersetzt von P. v. Schæwen. — 1 vol. in-8°, 142 p.; 3 M.; Otto Salle, Berlin.

Berichte über den mathematischen Unterricht in Œsterreich. Veranlasst durch die internationale mathematische Unterrichtskommission. *Heft* 1: Der mathematische Unterricht an den Realschulen, von Franz Bergmann. — Der mathematische Unterricht an den Volks- und Bürgerschulen, von Konrad Kraus. — Mit einem Begleitwort von E. Czuber. — 1 fasc. in-8°, 81 p.; Alfred Hölder, Vienne.

QUEL NOMBRE CONVIENDRAIT LE MIEUX COMME BASE DU SYSTÈME DE NUMÉRATION ?

Sommaire :

Introduction.

L'art de calculer étant d'une grande importance pour toutes les classes de la population, il est d'un haut intérêt de donner une réponse aussi complète que possible à la question : *quel nombre conviendrait-il le mieux de choisir comme base du système de numération ?* Cette question a surtout une importance pratique, car pour le mathématicien, l'art de calculer consiste plutôt à éviter les calculs.

Il n'est pas étonnant que cette question de la meilleure base du

système de numération ait été discutée très souvent, qu'elle ait provoqué de nombreux travaux sur ce sujet. Ce n'est pas notre but d'en donner une analyse ; cela nous mènerait trop loin. Nous ne nous attacherons pas non plus à l'ordre chronologique, d'autant moins que le résultat auquel nous arriverons, diffère de la réponse que la grande majorité des auteurs donne à la question. Il nous paraît surtout que la plupart ne tiennent pas du tout ou pas suffisamment compte des essais pratiques qui ont été faits dans ce domaine, et ce sont ces expériences qui nous paraissent justement avoir une importance capitale.

Commençons par rappeler brièvement la définition connue d'un « système de numération à base b » ; il y a lieu de distinguer d'une part *la numération parlée*, d'autre part *la numération écrite*. Dans la *numération parlée*, il faut : 1° un nom particulier pour chaque unité simple, c'est-à-dire pour les nombres

$$1, 2, 3, \ldots\ldots b - 1 \ ;$$

2° un nom particulier pour chacune des unités d'ordre supérieur, c'est-à-dire pour les nombres

$$b, b^2, b^3, b^4, \ldots\ldots$$

3° au moyen de ces éléments fixes, choisis une fois pour toutes, on compose *le nom* de n'importe quel autre nombre d'après un schéma invariable et qui peut se représenter par l'expression

$$(1) \qquad a_0 + a_1 \cdot b + a_2 \cdot b^2 + a_3 \cdot b^3 + a_4 \cdot b^4 + \ldots + a_n \cdot b^n$$

ordonnée suivant les puissances entières et positives de la base b, et où les coefficients

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots, a_n$$

sont tous des nombres entiers non négatifs et plus petits que la base

$$(2) \qquad 0 \leqq a_i < b \qquad (i = 1, 2, 3, 4. \ldots\ldots)$$

Dans la *numération écrite*, nous ferons exclusivement usage du « principe de position » qu'appliquent actuellement les peuples civilisés pour écrire les nombres. Le symbole

$$(3) \qquad a_n a_{n-1} \ldots\ldots a_4 a_3 a_2 a_1 a_0 \ ,$$

en vertu de ce principe de position, n'est qu'une abréviation de l'expression (1) avec les inégalités (2).

Ceci étant posé, nous examinerons quelle base b serait la plus avantageuse. La question doit être envisagée à plusieurs points

de vue. Certaines réflexions s'imposent de suite, même à qui se borne à un examen superficiel ; il en est d'autres, et précisément les plus importantes, qui ont échappé à la plupart des auteurs traitant cette question, ou du moins n'ont pas été appréciées à leur juste valeur. Nous nous placerons successivement à six points de vue différents, afin d'élucider la question sous toutes ses faces.

I. — Point de vue de la divisibilité.

C'est lui qui se présente en premier lieu, aussi s'est-il imposé à tous ceux qui ont étudié notre question.

a).— *Les règles de la divisibilité* des nombres entiers dérivent et dépendent de la divisibilité du nombre *b* choisi comme base et de ses autres propriétés arithmétiques. Ces règles changent avec la base. Un grief bien connu contre le système décimal est par exemple le fait que la règle de divisibilité par 7 est trop compliquée pour donner des avantages bien grands dans son application pratique. A ce point de vue, *les nombres possédant beaucoup de diviseurs seraient à préférer*, donc les multiples de 6, spécialement le nombre 6 lui-même, car il donne des règles de divisibilité très simples pour 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, etc.

Remarquons cependant que telle règle de divisibilité simple dans le système décimal deviendra peut-être compliquée dans un système à base quelconque, par exemple la divisibilité par 5 dans le système duo-décimal, ou la divisibilité par 11 dans le système à base 18. Aucune base ne saurait satisfaire ici à toutes les exigences. Nous dirons donc que dans ce domaine, *les avantages et les désavantages se compensent à peu près.* Nous dirons en plus que *ni les uns, ni les autres n'ont une grande importance* et ne tirent à conséquence. Preuve : l'avantage que la divisibilité et les restes de la division par 2 et par 5 ressortent clairement des chiffres romains, est loin d'être assez considérable pour compenser les grands défauts de cette numération. Tout ce que l'on a su tirer des règles de divisibilité se réduit, jusqu'ici, à quelques avantages de calcul et à des preuves. Chaque base ayant ses règles de divisibilité données, entraîne ses avantages particuliers, ses preuves particulières.

b). — *La division doit donner autant que possible des développements finis.* C'est même l'un des grands griefs contre le système décimal ; la division par 3 y donne des fractions infinies, et l'on a relativement souvent affaire à des tiers ou à des fractions dont le dénominateur contient 3 comme facteur premier ; on est alors obligé, lorsqu'on veut employer des fractions « systématiques », (c'est-à-dire dans notre système de numération des fractions « décimales »), de se contenter de résultats plus ou moins approximatifs, d'évaluer l'ordre de grandeur des erreurs commises.

Mais ici encore, il faut dire qu'aucune base ne peut satisfaire à toutes les exigences, car elle devrait contenir comme facteurs premiers les nombres 2, 3, 5, 7, 11,... ; c'est dire qu'elle devrait être très grande, et nous verrons plus loin que de telles bases sont impossibles. Quel que soit donc le choix auquel on s'arrête, les développements infinis se présenteront toujours dans un grand nombre de cas.

Le résultat le plus certain auquel on arrive en partant de ce point de vue, c'est que la base du système de numération doit être *un nombre pair*. En effet : le nombre 2 se distingue de tous les autres par tant de propriétés remarquables, le nombre 2 figure si souvent dans les formules théoriques, il entre si souvent comme diviseur dans les calculs de la pratique que toute base impaire entraînerait des désavantages très sensibles.

Doit-on préférer une base renfermant, à côté du nombre 2, le facteur premier 3 ou plutôt le facteur premier 5 ? ou bien une base renfermant une puissance de 2 supérieure à la première ? ou, à côté de 2^n, une puissance supérieure d'un autre facteur premier ? Devrait-on, par exemple, préférer 18 ou 24 à 12 ? ou bien 20 à 10 ? Il est bien difficile de trancher de telles questions à priori, si l'on voulait tenir compte *uniquement* de la divisibilité.

Si ces considérations devaient décider à elles seules du choix d'une base, le système par 6 ou par 12 réunirait sans doute une majorité ; mais il y aurait probablement une très forte minorité pour faire observer combien les avantages que le meilleur des systèmes présente sur ses concurrents ont peu de valeur.

En se plaçant uniquement au point de vue de la divisibilité, on arrive ainsi finalement à la conclusion suivante : *La base b du système de numération doit être un nombre pair en tout cas, un nombre à beaucoup de diviseurs, un nombre contenant le plus possible de facteurs premiers.* — Ce premier point de vue est donc favorable aux grandes bases.

II. — Le nombre des éléments fixes servant à construire tout le système.

Nous venons de montrer que les considérations de divisibilité militent en faveur d'un grand nombre pair, mais qu'elles laissent encore beaucoup de place à l'arbitraire, qu'elles sont loin de donner à notre question une réponse univoque et décisive ; il faut donc considérer encore d'autres moments, entre autres le nombre des éléments fixes qui servent à la construction même du système.

Nous posons comme principe que *ce nombre doit être aussi restreint que possible.* — Il y a de nouveau lieu de distinguer entre la numération parlée et la numération écrite.

a). — *L'expression verbale des nombres.* — Comme nous l'avons rappelé plus haut, on doit inventer un nom spécial d'abord pour chaque unité simple 1, 2, 3..... (b-1), ensuite pour chacune des unités des différents ordres : b, b^2, b^3, b^4..... L'on voit immédiatement que le nombre de ces noms primitifs au moyen desquels on compose celui de tous les autres nombres dépend de la limite jusqu'à laquelle on veut pousser la numération, et qu'il augmente indéfiniment avec cette limite ; il dépend en outre de la base ; si celle-ci est petite, par exemple, il faut avoir à disposition peu de noms seulement pour les unités simples, mais davantage pour les puissances de la base. Il y a là deux facteurs dont l'un tend à diminuer, l'autre à augmenter le nombre de noms nécessaires.

Prenons comme exemple le système binaire ou dyadique et supposons qu'on veuille pousser la numération jusqu'à mille ; on aura besoin de noms spéciaux pour les nombres suivants : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, donc de 10 noms. Pour compter jusqu'à 1000 dans le système quaternaire, il faut des noms pour 1, 2, 3, 4, 16, 64, 256, donc 7 noms en tout, puisqu'à l'aide du schéma

$$a_0 + a_1 \cdot 4 + a_2 \cdot 4^2 + a_3 \cdot 4^3 + a_4 \cdot 4^4$$

on est alors en état de composer le nom de tous les nombres jusqu'à 1000 (et même jusqu'à 1023). Dans notre système décimal, on a besoin de 12 noms, savoir 9 pour les unités simples, puis dix, cent, mille, si l'on veut pouvoir compter jusqu'à mille. En poursuivant de cette façon l'idée, on arrive au tableau suivant donnant le *nombre des noms nécessaires* pour former un système de numération parlée,

la base du système étant

La numération étant poussée jusqu'à	2	3	4	5	6	8	10	12	16	20	24	30	60	100
10^3	10	8	7	8	8	10	12	13	17	21	25	31	60	100
10^6	20	14	12	12	12	13	15	16	19	23	27	33	62	102
10^9	30	20	17	16	16	16	18	19	22	25	29	35	64	103
10^{12}	40	27	22	21	20	20	21	22	24	28	31	37	65	105
10^{18}	60	39	32	29	28	26	27	27	29	32	36	41	69	108

Il serait facile d'étendre ce tableau, et si nous ne l'avons pas fait, c'est parce qu'on n'a pour ainsi dire jamais occasion ou besoin, dans la vie pratique, d'énoncer des nombres supérieurs au milliard, encore moins des nombres au delà de 10^{18}. Il ressort donc du tableau ci-dessus que pour employer le minimum de noms dans la numération *parlée*, on devrait arrêter le choix de la base à l'un des nombres 4, 6, 8 ou 10 (puisque les nombres impairs sont à exclure comme bases).

b). — *L'expression écrite des nombres.* — Plus la base d'un système numéral est grande, moins il faut de chiffres pour écrire un nombre donné. Les calculateurs appuieront toujours sur ce fait, car il constitue un très grand avantage des systèmes à grande base puisque, dans ces derniers, tous les calculs peuvent s'effectuer en un nombre moins grand d'opérations.

Cherchons à évaluer numériquement cet avantage des grandes bases et, dans ce but, considérons un nombre entier n, choisi à volonté, mais fixe.

Supposons que dans le premier système, à base b, il faille β chiffres pour représenter le nombre n. Si le premier chiffre est 1 et tous les autres zéro, on obtiendra $b^{\beta-1}$. C'est le plus petit des nombres à β chiffres. Le plus grand est égal à $b^{\beta} - 1$.

Les inégalités suivantes ont donc lieu :

$$b^{\beta-1} < n < b^{\beta} .$$

Quel que soit n, il existera par conséquent une grandeur non négative ε_1, moindre que l'unité, et telle que

$$n = b^{\beta - 1 + \varepsilon_1} , \quad 0 \leq \varepsilon_1 < 1 .$$

Supposons maintenant que dans un deuxième système de numération, dont la base soit a, il faille α chiffres pour représenter le même nombre n. Celui-ci sera au minimum $a^{\alpha-1}$, au maximum $a^{\alpha} - 1$, d'où les inégalités

$$a^{\alpha-1} \leq n < a^{\alpha} .$$

Il existera donc une quantité ε, non négative et moindre que l'unité et telle, que

$$n = a^{\alpha - 1 + \varepsilon} , \quad \text{avec la condition } 0 \leq \varepsilon < 1 .$$

Nous pouvons donc poser l'égalité :

$$a^{\alpha - 1 + \varepsilon} = b^{\beta - 1 + \varepsilon_1}$$

d'où

$$(\alpha - 1 + \varepsilon) \log a = (\beta - 1 + \varepsilon_1) \log b$$

$$\frac{\log a}{\log b} = \frac{\beta - 1 + \varepsilon_1}{\alpha - 1 + \varepsilon} .$$

Les quantités $(\beta - 1 + \varepsilon_1)$ et $(\alpha - 1 + \varepsilon)$ étant en valeur absolue moindres que l'unité, le rapport ci-dessus peut être, en moyenne, égalé à $\frac{\beta}{\alpha}$: il n'en diffère que d'une quantité négligeable, surtout lorsque β et α ne sont pas très petits. L'égalité ci-dessus exprime le théorème suivant : *le nombre des chiffres nécessaires pour représenter un nombre donné diminue en raison inverse du logarithme de la base.* Autrement dit : si l'on représente un même nombre n une première fois au moyen de α chiffres dans un système à base a, une deuxième fois au moyen de β chiffres dans un système à base b, une troisième fois au moyen de γ chiffres dans un système à base c, etc., on aura, en moyenne, les égalités

$$\alpha \cdot \log a = \beta \cdot \log b = \gamma \cdot \log c = \text{constante.}$$

L'égalité : $\beta \log b =$ constante montre clairement que le nombre des chiffres diminue à mesure que la base augmente, mais elle montre aussi que cette diminution est très lente ; on sait en effet que la fonction logarithmique croît avec l'argument, même au delà de toute limite, mais moins rapidement que n'importe quelle puissance. Ce fait est illustré par le petit tableau suivant qui donne le nombre des chiffres nécessaires pour écrire un nombre n qui a six chiffres dans notre système décimal :

$$100000 \leq n \leq 999999 .$$

Pour écrire ce même nombre n,

	la base du système étant										
	2	3	4	6	8	10	16	32	100	1000	1000000
il faut un nombre de chiffres égal à	17 à 20	11 à 13	9 à 10	7 à 8	6 à 7	6	5	4	3	2	1

En partant uniquement de ce point de vue, on arrive ainsi à la conclusion : la base b doit être aussi grande que possible.

III. — La clarté dans la représentation des nombres.

Il y a bien d'autres choses à considérer que la divisibilité et le nombre des chiffres. Il est évident qu'il ne suffit pas de compter ces derniers, mais qu'il faut tenir compte aussi de leur degré plus ou moins grand de simplicité. En recherchant à ce point de vue si un système peut être regardé comme avantageux, on n'est pas tenu de toujours employer nos chiffres conventionnels dits « arabes » ; on se servira au contraire, pour chaque base, du système de signes qui sera le plus commode. Nous aurons à considérer :

a). — *La difficulté d'écrire les nombres et de les relire.* Cette difficulté est un produit de deux facteurs. Le *premier* est le nombre des signes. Lorsqu'un nombre est écrit avec beaucoup de chiffres, il est plus difficile de le concevoir avec précision, de le saisir exactement, que lorsqu'il s'écrit avec peu de chiffres ; et puisque le nombre des chiffres diminue quand la base aûgmente, puisqu'il est inversément proportionnel au logarithme de la base, c'est une raison pour préférer une base aussi grande que possible.

Le *deuxième facteur* est la difficulté d'écrire les signes de manière à ce qu'ils se distinguent facilement les uns des autres, et de les relire ensuite. Or, le nombre total des signes différents entre eux étant égal à la base elle-même, ce deuxième facteur croît évidemment avec la base ; mais il croît beaucoup plus rapidement qu'elle. Il n'est cependant pas si facile d'en donner une expression numérique précise, comme nous sommes en état de le faire pour le premier facteur ; nous pouvons seulement dire : le deuxième milite en faveur des petites bases.

La résultante de ces deux facteurs dépend de la quantité dont le deuxième croît ; elle fait pencher la balance du côté des petites bases.

b). — *La difficulté de saisir un nombre avec précision et à première vue,* de reconnaître immédiatement ses propriétés arithmétiques élémentaires. Ici aussi, l'on doit tenir compte de plusieurs facteurs.

1° D'abord, la base doit contenir autant de diviseurs que possible. Chaque divisibilité de la base facilite en effet la lecture des nombres, car les multiples de ces diviseurs sont en quelque sorte des points de repère. Ainsi, dans notre système décimal, les multiples de 5 constituent de ces points d'orientation dans la suite ininterrompue des nombres, de même les multiples de 2. S'il s'agissait uniquement d'écrire des nombres ou de copier des nombres déjà écrits, on pourrait prendre pour base des nombres assez grands sans recourir à des signes trop compliqués ; mais il s'agit surtout de comprendre ce qui est écrit ; à la seule vue d'un signe, on doit savoir quel est son rang, quelles sont les propriétés arithmétiques

les plus simples du nombre en question. C'est cette lecture qui se trouve facilitée, quand la base contient beaucoup de diviseurs. On manquerait de ces points d'orientation, si la base était un grand nombre premier; on aurait alors une suite de nombres se ressemblant tous, et en lisant un nombre, il serait plus difficile de se rendre compte immédiatement de ses propriétés arithmétiques. Bien qu'il soit difficile d'exprimer par une formule mathématique cette dépendance entre la divisibilité de la base et la facilité d'embrasser d'un seul coup d'œil l'ensemble des propriétés arithmétiques d'un nombre écrit, il est hors de doute que cette dépendance existe et qu'elle milite en faveur des bases possédant beaucoup de diviseurs, spécialement en faveur des multiples de 6.

2° Il y a ensuite le fait que les petits nombres sont plus faciles à dominer que les grands. Voici ce que nous entendons : La plupart des hommes ne peuvent juger que d'un très petit nombre d'objets semblables, à première vue et sans les compter. En voyant par exemple sur un rayon d'une bibliothèque des volumes alignés, tous semblablement reliés et de même grandeur, tout le monde saura dire immédiatement s'il y en a 2 ou 3, ou bien 3 ou 4, d'une façon tout intuitive et sans avoir besoin de compter. Mais rares sont les personnes qui savent distinguer ainsi au premier coup d'œil entre 9 et 10 unités de même espèce, ou entre 15 et 16, sans avoir besoin de compter. Il n'est pas non plus facile de diviser à vue-d'œil un intervalle en 10 parties égales. Par un long exercice, on arrive, il est vrai, à faire des progrès surprenants dans ce domaine, mais beaucoup d'observateurs, même très habiles, ont conscience de commencer par une division préalable en 2 ou en 4 parties. — Or, dans les systèmes de numération à très petite base, chaque signe simple correspond à un nombre dont la signification est immédiatement claire à la plupart d'entre nous. Ce fait constitue un avantage considérable des systèmes à très petite base, un avantage capable de compenser à lui seul l'emploi d'un plus grand nombre de signes.

Remarquons enfin que s'il est difficile de juger avec une précision mathématique des avantages que présentent les systèmes qui ont pour base un nombre très grand, *en tant qu'il s'agit d'écrire et de lire les nombres*, on peut affirmer qu'ils ne sont pas bien considérables et qu'à ce troisième point de vue de la clarté dans la représentation des nombres, les avantages des systèmes à petite base semblent l'emporter.

c). — *Résultats des expériences.* A ce point de vue, des essais ont été faits par quelques mathématiciens et pédagogues. Les expériences pratiques les plus étendues sont sans doute celles qu'a entreprises M. T. N. Thiele, ancien professeur d'astronomie à l'Université de Copenhague, avec quelques-uns de ses élèves. (On sait que les observations astronomiques donnent lieu

à de très longs calculs.) Ces expérimentateurs se sont habitués à un système à base 30 et pendant longtemps ont effectué des calculs dans ce système. Comme il fallait 30 signes primitifs pour représenter les unités simples et le zéro, ils ont profité de la circonstance que l'alphabet nous offre une série de signes dont l'ordre est bien connu, et ont employé comme chiffres les lettres de l'alphabet, avec quelques suppléments empruntés à des alphabets étrangers. Après avoir vécu dans ce système à grande base, ils ont tiré de leurs expériences les conclusions suivantes :

1) Il est presque impossible, dans un pareil système, d'effectuer les calculs d'une manière indépendante, sans l'aide de tables.

« Le petit livret », ou table de Pythagore, se compose de $29^2 = 841$ règles, et c'est un travail presque surhumain de les apprendre par cœur, de s'en rendre maître de façon à n'avoir aucune hésitation.

2) L'écriture et la lecture des nombres deviennent difficiles ; pour éviter des confusions, il faut que les signes soïent écrits avec une grande précision.

3) La connaissance que la pratique ordinaire nous fait acquérir de l'ordre de succession des lettres est tout à fait insuffisante, lorsqu'il s'agit de juger immédiatement lequel de 2 nombres est le plus grand. Il devient difficile d'avoir conscience, à la seule vue d'un signe, des propriétés arithmétiques les plus simples du nombre représenté par ce signe ; par exemple, ces expérimentateurs avaient grande peine à se rappeler quels signes représentaient les nombres pairs, ou les multiples de 3, ou les multiples de 5, ou de 6, etc.

Les conclusions à tirer de ces expériences, confirmées du reste par plusieurs autres, sont :

a) L'avantage d'écrire les nombres avec moins de chiffres se trouve non seulement compensé, mais de beaucoup surpassé par la difficulté de distinguer les uns des autres les nombreux chiffres d'un système à grande base.

b) Les difficultés en ce qui concerne l'écriture et la lecture des nombres, surtout la difficulté d'apprendre par cœur les tables de Pythagore correspondantes, croissent en même temps que la base, mais avec une rapidité telle que la limite de ce qui est humainement possible ne dépasse guère 30.

IV. — Réunion de plusieurs signes en un seul.

Nous venons de faire remarquer que dans un système de numération à grande base, on a besoin de beaucoup de signes, qu'il faut donc recourir à des signes compliqués, que c'est là un désavantage. On pourrait être tenté de faire le raisonnement inverse et de conclure ainsi : dans un système à petite base, on a besoin de peu de signes seu-

lement, donc on peut choisir des signes simples, et c'est un avantage. Toute vraisemblable que soit cette conclusion, on manque de faits expérimentaux pour la corroborer. M. Thiele et ses élèves ont fait et font encore de nombreux calculs dans des systèmes à très petite base, mais ils n'ont pas choisi les signes les plus simples possibles; ils ont pris comme chiffres des signes ne différant que très peu de nos « chiffres arabes » et n'ont obtenu ainsi d'autre avantage que de pouvoir écrire couramment les nombres composés.

Si l'on voulait choisir les meilleurs signes possibles, il faudrait tenir compte de certaines considérations secondaires ; par exemple, il faudrait que chaque signe, quoique simple, saute aux yeux, il faudrait surtout qu'on puisse corriger facilement et avec précision les signes mal écrits, si possible sans être obligé d'effacer ; il faudrait donc que les chiffres, tout en se distinguant nettement les uns des autres, puissent être facilement transformés les uns dans les autres.

Proposons-nous de prendre comme base du système de numération, au lieu du nombre b, l'une de ses puissances, par exemple b^2. On voit clairement que cela revient à grouper les chiffres deux par deux. Imaginons qu'on veuille écrire le nombre 120401 de notre système décimal dans le système centésimal; il ne faudra que 3 chiffres au lieu de 6, et l'on pourrait les représenter par (12) ; (04) ; (01). Prendre comme base b^3 revient à grouper les chiffres 3 par 3. Le même nombre s'écrirait par exemple dans le système millésimal au moyen de 2 chiffres seulement : (120) ; (401). Au point de vue de la clarté ou de la simplicité de l'écriture, cela reviendrait à peu près au même que d'employer la base b, puisque l'avantage d'employer un nombre moins grand de chiffres, serait compensé exactement par la gêne d'avoir à écrire séparément chacun des signes composés du système.

Cette méthode de prendre comme base une puissance du nombre primitif, présente de réels avantages uniquement dans les systèmes à très petite base ; car on peut alors choisir comme chiffres primitifs des signes très simples, puis apporter quelque simplification dans les signes composés, en réunissant deux ou trois signes en un seul trait continu. Prenons comme exemple le système binaire ou dyadique. Représentons zéro et un, les deux seuls chiffres de ce système, de la façon suivante : le « un » par un *trait vertical* allant à volonté soit de haut en bas : I, soit de bas en haut : /; le zéro par un *demi-cercle* : ∪. Les nombres entiers positifs s'écriront alors :

I,	I∪,	II,	I∪∪,	I∪I,	II∪,	III,	I∪∪∪,	I∪∪I.
1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,

I∪I∪,	I∪II,	II∪∪,	.....
10,	11,	12,	....

Considérons le nombre

IUIUUIIIIIII ,

écrit avec 12 chiffres dans le système binaire, égal à

$$1 + 1.2 + 1.4 + 1.8 + 1.16 + 1.32 + 1.64 + 1.512 + 1.2048 = 2687$$

dans le système décimal. Si nous prenons comme base 4, ce qui revient à grouper les signes 2 par 2, nous pourrons écrire le même nombre ᒐ ᒐ ᐡ| V V V , c'est-à-dire au moyen de 6 chiffres. Prenant comme base $2^3 = 8$, nous réunirons les chiffres 3 par 3 et pourrons écrire le même nombre ᒐ| ᐡ| И И , donc au moyen de 4 chiffres. Prenant comme base $2^4 = 16$, nous pourrons représenter le même nombre par 3 chiffres : Ш ᐡИ W . Cette simplification dans l'écriture n'est pas possible, si l'on emploie nos chiffres usuels dits arabes ; elle exige en plus que les signes primordiaux soient simples et pas trop nombreux. En un mot : *elle milite en faveur des petites bases, et même très fortement,* car dans ces systèmes à très petite base, il sera aisé de passer de la base b à la base b^2 et d'éviter ainsi le désavantage d'un trop grand nombre de chiffres. Citons à ce propos une étude intéressante et très originale que M. G. Peano publia en 1898 dans les « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. 34, intitulée : « La numerazione binaria applicata alla stenografia ». L'auteur y expose entre autres une méthode permettant de réunir 8 chiffres à la fois, ce qui revient à opérer avec la base $2^8 = 256$.

Résumons toutes les considérations précédentes. Les résultats acquis se bornent en somme à ceci :

1) *La base d'un système de numération doit être un nombre pair.*

2) *Les nombres supérieurs à 30 sont exclus comme base.*

3) Les petites bases ont plusieurs avantages sur les grandes, mais *c'est seulement dans des points d'ordre secondaire que le choix de la base fait une différence sensible.* Dans d'autres points, avantages et désavantages se tiennent à peu près en équilibre, quand on compare les différents systèmes.

En somme, nous n'avons obtenu d'autre résultat que le droit de faire abstraction d'une série de considérations que l'on a souvent cherché à faire prévaloir, surtout en faveur du système duodécimal, mais avec peu de raison, comme nous croyons l'avoir montré.

Nous n'avons pas encore abordé le point de vue qui est capital selon nous pour décider de la question : celui de la pratique.

V. — Point de vue de la pratique.

Nous le caractérisons par la double question suivante : dans quel système de numération est-il le plus facile d'apprendre à calculer et de pratiquer l'art du calcul ?

a). — *Apprendre à calculer.* On sait que l'enseignement du calcul comprend deux parties. D'abord une partie proprement mathématique, où il s'agit d'exposer et de faire comprendre quelques vérités arithmétiques élémentaires ; elle est commune à toutes les bases, et pour cette raison, nous ne nous y arrêterons pas.

Ensuite une partie qui doit être apprise par cœur, savoir les tables d'addition et de multiplication. Voyons en premier lieu combien de règles ces tables comprennent dans le système à base b. — En fait de *tables d'addition*, il faut savoir par cœur les résultats de

	$1+1$			
	$1+2$	$2+2$		
	$1+3$	$2+3$	$3+3$	
	. . . .	. . . .	. . . .	.....
	$1+(b-1)$	$2+(b-1)$	$3+(b-1)$	..... $(b-1)+(b-1)$
Nombre :	$b-1$	$b-2$	$b-3$	 1

c'est-à-dire : en tout

$$(b-1)+(b-2)+(b-3)+\dots\dots+2+1=\frac{b(b-1)}{2}$$

résultats particuliers. — En fait de *tables de multiplication*, le nombre ci-dessus est diminué de $(b-1)$, puisque les résultats de la multiplication par 1 sont tous remplacés par une seule règle ; il faut savoir par cœur combien font :

$$\begin{array}{r} 2\cdot 2,\ 2\cdot 3,\ \dots\dots\ 2\cdot(b-1) \\ 3\cdot 3,\ \dots\dots\ 3\cdot(b-1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (b-1)\,(b-1) \end{array}$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}\,(b-1)\,(b-2)$$

résultats particuliers, ce qui porte leur nombre total à

$$\frac{1}{2}\,b\,(b-1)+\frac{1}{2}\,(b-1)\,(b-2)=(b-1)^2$$

Donc, en faisant abstraction des propositions générales relatives aux propriétés particulières de zéro et de un, ce sont $(b-1)^2$ résultats qu'on doit se graver dans la mémoire. Nous constatons donc ce premier fait important :

Le nombre des résultats particuliers croît aussi rapidement que le carré de la base (plus exactement que $(b-1)^2$). Exemples : Dans le système binaire ou dyadique, dont la base est la plus petite possible : $b=2$, il suffit de se rappeler une seule chose, c'est que $1+1$ s'écrit 10.

Le système par 4 ou quaternaire demande qu'on se rappelle 9 règles :

six pour l'addition : $1+1=2$, $1+2=3$, $1+3=10$
$2+2=10$, $2+3=11$

trois pour la multiplication : $2.2=10$, $2.3=12$
$3.3=21$.

Le système par 6	demande	l'application	de	25	règles,
Notre système décimal	»	»	»	81	»
Le système duodécimal	»	»	»	121	»
» par 16	»	»	»	225	»
» par 30	»	»	»	841	», etc.

Examinons en second lieu le travail de mémoire qu'exige l'assimilation de tous ces résultats. Il ne suffit pas d'en acquérir une connaissance approximative et de pouvoir répondre après un moment de réflexion. Il faut au contraire se rendre complètement maître de la matière. On doit avoir à tout moment la réponse prête et sans jamais se tromper; autrement, on ne saurait calculer utilement et avoir confiance dans l'exactitude des résultats. Le nombre des résultats particuliers qu'on doit se rappeler ne donne donc lui-même en aucune façon la mesure de la grandeur et de la difficulté du travail d'appropriation. — Pour chaque résultat nouveau, cette difficulté est déterminée par le nombre de ceux qu'on s'est déjà approprié, puisque tous doivent être indépendants de ce dernier; voilà pourquoi il convient plutôt de prendre pour mesure de cette difficulté *le carré* du nombre des résultats particuliers; et comme ce nombre augmente aussi rapidement que le carré de la base (nous venons de démontrer qu'il est égal à $(b-1)^2$), la difficulté d'assimilation, elle, croît comme la quatrième puissance de la base (proportionnelle à $(b-1)^4$). — Cette évaluation reste encore au-dessous de la réalité. En effet, ce qu'on a une fois appris, il faut le fixer par un exercice très long et qui doit être continué jusqu'à ce que chaque résultat particulier se soit présenté assez souvent pour être définitivement gravé dans la mémoire. Ce dernier travail est d'autant plus long que la base

choisie exige la connaissance d'un nombre plus considérable de ces résultats. Si donc on veut évaluer mathématiquement la grandeur de ce travail d'assimilation, on doit admettre, deux bases différentes étant données, que les difficultés qu'elles présentent pour le travail d'appropriation des tables correspondantes sont entre elles dans un rapport plus grand que le rapport de leur quatrième puissance. Ce rapport correspond à peu près à celui de leur cinquième puissance. Nous exprimerons ce résultat par le théorème suivant :

Deux bases différentes étant données, les difficultés que présente le travail d'appropriation des tables correspondantes sont entre elles à peu près dans le rapport des cinquièmes puissances des bases. Les bases étant désignées par a et b, le rapport en question sera exprimé par $a^5 : b^5$ [plus exactement par $(a-1)^5 : (b-1)^5$].

Comme application de ce résultat, comparons quelques systèmes avec notre système décimal ($a = 10$).

D'abord le système binaire ($b = 2$) ; en comparaison du système décimal, l'exercice du calcul dans le système binaire ne coûterait pour ainsi dire aucune peine, puisque le rapport en question se réduit à $1^5 : 9^5 = 1 : 59049$.

Dans le système quaternaire, le rapport en question devient $(4-1)^5 : (10-1)^5 = 1 : 3^5 = 1 : 243$. C'est dire qu'il coûterait en moyenne 243 fois moins de peine et de travail d'apprendre à calculer dans le système par quatre que dans le système décimal.

Pour le système à base 6, le rapport en question est

$$(6-1)^5 : (10-1)^5 = 5^5 : 9^5 = 3125 : 59049 = 1 : 18.8..$$

Autrement dit : il est à peu près 18 fois plus facile d'apprendre à calculer dans le système sénaire que dans notre système décimal.

Pour le système duodécimal, ce rapport devient

$$(12-1)^5 : (10-1)^5 = 11^5 : 9^5 = 161051 : 59049 = 2,7... : 1$$

Il faut donc sacrifier environ 2 ½ fois plus de temps et de peine pour apprendre à calculer dans le système duodécimal qu'il n'en faut déjà pour notre système décimal.

Dans le système à base 16, ce même rapport est

$$15^5 : 9^5 = 5^5 : 3^5 = 3125 : 243 = 12,8... : 1$$

et dans le système de numération à base 30 :

$$29^5 : 9^5 = 20\,511\,149 : 59\,049 = 347,3... : 1$$

En songeant combien de temps et de peine un enfant et son maître d'arithmétique doivent sacrifier, en moyenne, pour que

l'enfant arrive à calculer couramment, en pensant ensuite qu'il faudrait y mettre encore au moins 340 fois plus de temps et d'efforts, on comprend mieux qu'une telle base est impossible, à plus forte raison une plus grande encore, surtout que ce travail ne se borne pas à une première appropriation, mais qu'il est nécessaire de s'exercer souvent pour conserver la pratique acquise. — L'expérience des calculateurs de Copenhague, de M. T. N. Thiele et de ses élèves, s'accorde bien avec les évaluations précédentes ; elle vient corroborer nos déductions théoriques. Théorie et pratique conduisent toutes deux au résultat suivant : *pour que l'art du calcul s'apprenne avec un minimum d'efforts dans un minimum de temps, il faut que la base du système de numération soit aussi petite que possible.*

b). — *Pratiquer l'art du calcul.* — Tout calculateur, si exercé soit-il, opérera plus rapidement ou plus sûrement avec les nombres 1, 2, 3 qu'avec 7, 8 ou 9, surtout quand il s'agit de multiplier ou de diviser. Copier un nombre ou calculer son double ou son triple, se fait avec beaucoup plus de promptitude et de sûreté que calculer le septuple ou l'octuple de ce même nombre. Nous pensons que même le plus habile calculateur n'arrive pas à calculer aussi vite, ni surtout aussi sûrement, avec les grands chiffres (7, 8, 9) qu'avec les petits (1, 2, 3). Or, si la base du système de numération était par exemple 4, on n'aurait jamais à opérer qu'avec 1, 2, 3 ; ce qui revient à dire que pour multiplier ou diviser, on n'aurait jamais autre chose à faire (hormis l'addition et la soustraction) qu'à copier un nombre ou écrire son double ou son triple ; cela entraînerait une rapidité considérable et une très grande sûreté des opérations. L'avantage par rapport à la rapidité des calculs et à la sûreté qu'on acquiert est si grand que M. Thiele par exemple, lorsqu'il devait faire beaucoup de calculs sur des nombres donnés une fois pour toutes, tels que résultats d'observations astronomiques, préférait transformer ces nombres dans le système quaternaire, puis effectuer tous les calculs dans ce dernier système, puis retransformer les résultats dans le système décimal; il arrivait de cette façon plus vite et surtout plus sûrement au but qu'en calculant entièrement dans le système décimal.

La routine une fois acquise, il s'agit de la conserver. Pour cela, il faut s'exercer beaucoup et souvent, surtout après des périodes pendant lesquelles on n'a pas ou très peu calculé. Or, plus la base est grande, plus cet exercice doit être prolongé et répété ; l'oubli, faute d'un exercice suffisant, est beaucoup moins à craindre et en tout cas moins prononcé et plus facile à réparer pour les systèmes à petite base. C'est encore une raison, et une très forte, pour préférer ces derniers.

Voici donc la conclusion qui s'impose avec force quand on se place au point de vue de la pratique : *la base du système de numé-*

ration doit être aussi petite que possible. — A notre avis, ce point de vue pratique, pourtant si fondamental, n'a pas été suffisamment remarqué et mis en lumière par presque tous les auteurs qui ont traité cette question. Un grand nombre d'entre eux arrive, par exemple, à la conclusion qu'il faudrait introduire le système duodécimal ! Selon nous, ce serait un malheur, puisque cela obligerait l'humanité à sacrifier encore deux et demi fois plus de temps pour apprendre à calculer.

L'important nous paraît être la réponse à la question suivante : la mémoire humaine est-elle assez forte, en moyenne, pour porter le fardeau du système décimal ? Il serait intéressant d'avoir des renseignements précis sur le temps (nécessairement long) qu'on emploie pour apprendre à chaque enfant les tables du système décimal, ainsi que des données sur le temps au bout duquel on a oublié une partie essentielle de ce que l'on a appris. Il y a sans doute des différences extrêmement grandes dans les dispositions des individus pour le calcul ; il y a des hommes pour qui le système décimal avec ses 81 règles est comme un jeu, mais leur nombre est bien restreint. Si l'on prend au hasard une nombreuse société humaine, la majorité des membres ne possédera presque jamais pleinement la pratique élémentaire du calcul. La plupart des hommes ont naturellement, une fois dans leur vie, appris par cœur les tables de Pythagore ; mais faute de s'exercer suffisamment, surtout dans la multiplication, ils les oublient plus ou moins ; pour la plupart, c'est un effort que d'effectuer une multiplication ou une division quelque peu étendue, ils ne la font pas sans difficulté et sans une certaine méfiance quant au résultat. On peut soutenir la thèse que le système décimal n'a pas réussi à devenir la propriété pleine et entière de toute la partie civilisée de l'humanité. Nous ne citerons comme preuve que l'expérience suivante que nous avons si souvent eu l'occasion de faire et que plusieurs professeurs de mathématiques nous ont confirmée : prenez une classe d'une trentaine d'élèves d'une de nos écoles moyennes ; faites-leur faire quelques simples multiplications ou divisions avec des nombres donnés de quatre ou cinq chiffres ; la classe vous fournira une dizaine de résultats différents, et aucun élève ne sera fermement convaincu d'avoir le résultat juste. Même si vous faites faire une simple addition de plusieurs nombres de cinq ou six chiffres qui se rencontrent pourtant couramment dans la pratique, il est rare que la classe obtienne le résultat juste avec l'unanimité désirable et désirée ; et le temps nécessaire pour effectuer ces calculs est hors de proportion avec leur caractère élémentaire.

Nous expliquons ce phénomène attristant en grande partie par le fait suivant : le système décimal s'approche beaucoup trop de la limite de ce que la mémoire humaine peut, en moyenne, s'assi-

miler et retenir de façon durable dans ce domaine. La question que nous formulions plus haut semble devoir être tranchée dans le sens négatif. *Si l'on veut que l'art du calcul devienne familier à chacun,* dans son ensemble et non seulement dans l'une de ses parties, *il faut remplacer 10 par une base plus petite.*

c). — **Notice historique.** — L'un des premiers qui soit arrivé à la même conclusion, à la suite d'expériences personnelles, est sans doute M. O. Lehmann, professeur de mathématiques au Gymnase Saint-Nicolas à Leipzig. Il a recommandé surtout le système sénaire ($b = 6$) et a publié une série de petits écrits sur cette question dans les années de 1870 à 1873. Lehmann était d'abord, comme il raconte lui-même, partisan convaincu du système duodécimal qui le séduisait, ainsi que tant d'autres, par ses avantages de divisibilité ; un beau jour, le Dr Lehmann eut l'idée d'essayer le système à base 6 ; ce nouveau système excita vivement son enthousiasme, car il présentait non seulement de grands avantages de divisibilité, mais il s'apprenait avec une facilité énorme, en comparaison du système duodécimal ; d'après nos évaluations ci-dessus, il faut en moyenne à peu près 50 fois moins de peine, puisque

$$11^5 : 5^5 = 161\ 051 : 3125 = 51{,}5... : 1$$

Lehmann ne connaissait pas ce rapport exact, mais il trouva que les mêmes élèves qui avaient tant de peine à pratiquer couramment le système duodécimal et l'oubliaient si facilement, arrivaient beaucoup plus rapidement à la même routine dans le système sénaire et ne la perdait pas si vite. Il baptisa son nouveau système de numération « les nombres Seh » (die Sehzahlen), « seh » étant une abréviation de « sechs » qui est le nom allemand pour six. Lehmann était si enchanté de sa découverte qu'il fit répandre, parmi le public de Leipzig et ailleurs, un « appel » imprimé à des milliers d'exemplaires et portant le titre significatif : « révolution des nombres » (Revolution der Zahlen, oder die Seh in Schrift und Sprache eingeführt von Dr Otto Lehmann, Mathematikus am St-Nicolaigymnasium in Leipzig).

Voici, à titre de curiosité, la traduction française du commencement de cet appel : « Appel ! Ecoutez, citoyens de Leipzig ! écoutez, habitants de l'Allemagne ! écoutez, vous tous, gens lettrés et cultivés de toutes les nations ! Au nom de l'humanité entière, au nom de toutes les générations à venir, je vous adresse mon appel ! Et quand vous vous serez convaincus, comme j'ose m'y attendre, de la facilité de calculer avec les nombres Seh, unissez votre voix à la mienne pour introduire les nombres Seh dans le langage écrit et parlé. Qui donc serait appelé à faire le premier pas sinon vous, porteurs de la culture, promoteurs de la civilisation ?... »

Cet appel chaleureux du mathématicien Lehmann n'eut pas un succès pratique très grand, pour des raisons que nous n'avons pas à analyser ici ; l'opinion publique s'émut davantage de la révolution à Paris que de la « révolution des nombres ». Plus tard, Lehmann publia un « Beiblatt zur Revolution der Zahlen », en 1872, un « Zweites Beiblatt zur Revolution der Zahlen » (parus tous deux chez Heinr. Hunger, Bosenstrasse, 1, Leipzig). Un ami plus fortuné que Lehmann et à qui ce dernier fit partager son enthousiasme « sénaire » avança les fonds nécessaires, de sorte que l'inventeur put publier des tables étendues : tables de logarithmes, tables des fonctions trigonométriques, etc. dans le système à base 6. Elles furent imprimées en caractères « lehmanniens » chez C.-W. Vollrath, éditées par J.-J. Weber, et portent comme date, également en chiffres de Lehmann, 1 2 4 0 1, c'est-à-dire :

$$1 \cdot 1 + 0 \cdot 6 + 4 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^3 + 1 \cdot 6^4 = 1873.$$

Lehmann voulait réformer à cette occasion non seulement le système de numération, mais encore toutes les monnaies et la division du quadrant ; il fait à ce sujet des propositions concrètes ingénieuses et utilisant les avantages de son système de numération. Il reconnut plus tard lui-même qu'en adressant son appel à toutes les couches sociales et au nom de toutes les générations à venir, il avait fait une bévue ; dans un de ses « suppléments », il écrit entre autres : « Si l'un ou l'autre trouvait que certains passages écrits par moi sont exagérés ou excentriques, je ne nierai pas qu'une sorte d'enthousiasme pour la bonne cause m'ait dicté, par-ci par-là, des paroles exaltées. Mais j'espère que l'on ne méconnaîtra pas la bonne intention ; j'espère surtout que l'on ne croira pas que mon exaltation (! ?) ait dégénéré en véritable hallucination. J'ai la conscience de décidément *vouloir* le bien et la conviction aussi en somme de vouloir *le bien*... »

Les nombres « seh » du docteur Lehmann peuvent certainement soulever plusieurs critiques. Ainsi les signes qu'il a choisis sont loin d'être les meilleurs possibles ; ils ont l'avantage de pouvoir être écrits d'un seul trait de plume, mais ils sont encore plus compliqués et en partie plus faciles à confondre que nos chiffres dits arabes. Mais Lehmann a raison sur un point capital, et c'est pourquoi nous l'avons mentionné, savoir : il y aurait très grand avantage à substituer au système décimal non pas le système duodécimal, mais le système à base 6. Seulement, dans son enthousiasme exagéré pour son système, il oublie de rechercher s'il n'y en aurait pas d'autres encore préférables au système sénaire.

Nous ne nous arrêterons pas à tous les autres auteurs ayant écrit sur les différents systèmes de numération ; ils ne font pas suffisamment ressortir l'importance du point de vue de la pratique, cette difficulté d'acquérir et de maintenir la routine du calcul. Du

reste, la liste en serait longue et nous écarterait trop du sujet nettement délimité de cette étude.

Le système répondant le mieux à cette exigence serait naturellement le système binaire. Là, il n'y aurait pour de bonnes raisons rien à oublier, puisque toutes les tables se réduisent à cette seule règle : 1 + 1 s'écrit 10. En effectuant des divisions binaires, on n'aurait jamais ces tâtonnements ennuyeux qui se présentent souvent dans le système décimal, *a fortiori* dans d'autres systèmes à base encore plus grande que 10. Mais le plus sensible désavantage du système binaire est le grand nombre de mots qu'il faut pour énoncer les nombres, surtout les nombreux chiffres nécessaires à leur écriture ; vingt chiffres pour représenter un million, nombre assez fréquemment employé, c'est décidément trop long et incommode. On pourrait obvier à cet inconvénient, comme nous l'avons indiqué plus haut, en réunissant plusieurs chiffres en un seul. La méthode préconisée par M. G. Peano permet de rassembler huit signes à la fois et de passer ainsi à la base 2^8 ou 256, par une figure octogonale composée de rayons partant tous d'un même centre. C'est renoncer à la simplicité caractéristique du système dyadique. (M. Peano tire de cette numération, soit dit en passant, tout un système de sténographie, très ingénieux et original ; il a même résolu par ce moyen le problème insoluble jusqu'alors de construire une machine à écrire pour la sténographie[1]).

Le succès du système binaire dépendrait du reste en grande partie de l'heureux choix de ses deux chiffres. Les essais ont échoué jusqu'ici. Si l'on voulait opérer avec une machine à calcul, le système binaire l'emporterait sur tous les autres, car la difficulté des opérations croît en même temps que le nombre des chiffres.

Après le système dyadique, puisqu'il faut un nombre pair comme base, vient le système quaternaire. Tout ce qu'il y a à apprendre là se réduit à 9 règles. C'est si peu que nous doutons que quelqu'un puisse oublier les tables de ce système, s'il consacre une demi-heure à les apprendre et quelques heures à faire des multiplications et des divisions quaternaires. Et quelques heures, c'est si peu de chose en comparaison du temps que nous avons tous mis à nous approprier le système décimal ! Nous devons faire observer, en recommandant un pareil essai, que chacun peut le faire sans craindre que sa facilité de calculer dans le système décimal en souffre le moins du monde, ou qu'il en vienne à confondre les deux systèmes ; on ne doit naturellement pas écrire les chiffres tout à fait de même manière dans les deux systèmes, mais il suffit, d'un autre côté, qu'on puisse reconnaître, quelque temps après l'exécu-

---

[1] Voir sa note en italien, citée plus haut, publiée dans les Actes de l'Acad. Roy. d. Sciences de Turin, vol. 34, 1898-99.

tion, dans quel système de numération le calcul a été fait. N'étant pas sûr que d'autres emploient les mêmes chiffres que nous, nous nous abstenons de les publier, de même que les tables que nous avons calculées directement dans le système quaternaire, pour nous y exercer.

Mentionnons le premièr auteur ayant proposé un système de numération à base 4. C'est sans doute *Erhard Weigel*, né à Weiden, en 1625 et mort en 1699; il fut professeur à l'université de léna où le philosophe Leibniz fut son plus célèbre auditeur. Bien que jouissant à cette époque d'une grande renommée, Erhard Weigel n'était nullement un mathématicien au génie profond. Il considérait son « Tetractys[1] » comme son œuvre principale et le recommanda dans plusieurs écrits, spécialement en 1673, au monde savant d'alors. *Tetractys* n'est autre chose que le système de numération à base 4. *Weigel* pense qu'on doit le préférer au système décimal, parce que selon lui la division en 10 parties est artificielle, tandis que la division en quatre parties est la plus naturelle, ce qu'il cherche à prouver par des exemples très artificiels. La lecture de cet ouvrage vous laisse l'impression que Weigel l'a écrit avant tout dans le but de se faire remarquer, de paraître original, de se rendre populaire. Au beau milieu du texte latin, il propose des noms allemands: « Secht » pour 4^2; « Schock » pour 4^3, (« Schock » est du reste le mot allemand pour « soixantaine »); plus tard, Weigel remplace aussi le mot quatre par un néologisme : « Erff », d'où les formations « Zwerff » pour $2 \cdot 4$ et « Dreff » pour $3 \cdot 4$. Quelques-uns de ces termes ont été repris par d'autres qui ont traité le sujet d'un système non décimal de numération et que nous passons sous silence.

Il ne s'agit point de savoir quel nombre ou quel système est le plus « naturel », question bien difficile à trancher, si l'on ne veut pas jouer sur des mots; il s'agit de décider quel système de numération est le plus avantageux et le plus commode pour la pratique.

Quant au système sénaire, il faut à peu près 12 fois plus de travail pour y arriver à la même habileté que dans le système à base 4. En effet : $(6 - 1)^5 : (4 - 1)^5 = 3125 : 243 = 12,8... : 1$. Les expérimentateurs de Copenhague ont appris le système sénaire d'après les indications du mathématicien Lehmann et s'y sont exercés assez longtemps pour reconnaître les grands avantages de ce système sur notre système décimal. Mais après avoir essayé le système quaternaire, ils ont complètement mis de côté le système à base 6.

---

[1] « Erhardi Weigelii, Artium Architectonicarum Supremi Directoris et Prof. Publ. Tetractys, summum tum Arithmeticæ tum Philosophiæ discursivæ compendium, artis magnæ sciendi genuina radix ». Ienæ MDCLXXIII.

Résumons les considérations qu'impose la pratique : si l'on se place exclusivement au point de vue de la difficulté à surmonter pour apprendre à calculer, pour acquérir et maintenir la routine du calcul, le système décimal doit être absolument condamné et remplacé aussi tôt que possible par le système à base 4 (ce dernier a en outre l'avantage de pouvoir être pratiqué à côté du système décimal). Vis-à-vis du système quaternaire, le système décimal se présente comme étant la seule cause de cet enseignement si pénible et si difficile qui tourmente la jeunesse scolaire et continuera, hélas, à tourmenter les enfants de bien des générations encore. et pourtant il n'aboutit à d'autre résultat qu'à une pratique suffisante de l'addition et de la soustraction, tandis que la multiplication et la division s'oublient plus ou moins, faute de l'exercice constant que le système décimal exige à un beaucoup plus haut degré que les systèmes à base plus petite. M. T. N. Thiele exprime ses réflexions en écrivant : « Le système décimal forme un triste contraste avec ce principe démocratique que les institutions sociales doivent favoriser également tout le monde, non pas seulement de petites minorités ».

Faut-il donc croire, en revanche, que le système décimal favorise effectivement « l'aristocratie des calculateurs ? » Nous éluciderons cette question en nous plaçant à un sixième et dernier point de vue.

VI. — Point de vue évolutionniste.

Pour « l'homme moyen », le système décimal est à rejeter absolument ; nous pensons l'avoir démontré ci-dessus. Mais qu'en est-il pour les grands calculateurs ? Le petit nombre de ceux qui sont doués des facultés relativement grandes qu'exige le système décimal acquièrent-ils dans le calcul une habileté telle qu'ils ne pourraient calculer aussi bien, et encore mieux, dans d'autres systèmes ?

a). — Tous les bons calculateurs veulent une base aussi grande que possible, pour la raison que nous avons déjà indiquée plus haut (voir II, *b*). Là, nous avons montré comment le nombre des signes nécessaires pour représenter un nombre diminue quand la base augmente ; nous devons ajouter maintenant, qu'en même temps diminue aussi le nombre des « opérations partielles » dont tout calcul se compose. En effet, *toute opération sur de grands nombres se compose d'opérations partielles ou intermédiaires.* Prenons comme exemple deux nombres à six chiffres, tels que $a = 213465$, $c = 926543$. Pour former la somme $a + c$, on additionnera d'abord les unités simples $5 + 3$, puis les dizaines $6 + 4$, puis les centaines $4 + 5$, etc., c'est-à-dire qu'il y aura au moins six opérations partielles à effectuer. — De même, pour former la différence $a - c$. — Pour trouver le produit $a \cdot c$, il faut multi-

plier le multiplicande a d'abord par 3, puis par 4, puis par 5, etc., enfin par 9, donc séparément par chacun des chiffres du multiplicateur c, ce qui exige au moins 36 opérations partielles, ensuite additionner ces six produits, ce qui demande de nouveau 27 opérations au moins. La formation du produit de deux nombres à six chiffres exige donc, au minimum, 63 opérations intermédiaires. Or, en diminuant le nombre des chiffres, on diminue le nombre des opérations partielles. C'est dire qu'on augmente non seulement *la rapidité* des calculs, mais aussi leur *degré de confiance*, puisqu'on diminue les chances d'erreurs.

Cherchons à évaluer cet avantage en nombres précis. Pour les additions et les soustractions, le rapport du nombre des opérations partielles est à peu près le même que celui du nombre des chiffres, donc, comme nous l'avons prouvé plus haut (voir II, *b*), inversement proportionnel au logarithme des bases. — Pour les multiplications et les divisions, le rapport en question devient plus favorable aux grandes bases ; on peut approximativement l'égaler au carré du rapport précédent ; en d'autres termes : lorsqu'il s'agit de multiplication ou de division, le nombre des opérations intermédiaires croît en raison inverse du carré du logarithme de la base. — Appliquons cette évaluation aux systèmes décimal et quaternaire. L'avantage du premier sur le deuxième est exprimé pour les additions par le rapport $\log 10 : \log 4 \sim 5 : 3$, pour les multiplications par le rapport $(\log 10)^2 : (\log 4)^2$, presque équivalent à 3 : 1.

Autrement dit : en employant le système décimal plutôt que le système quaternaire, on gagne en rapidité de calcul à peu près $66\,^2/_3\,\%$ sur les additions et presque 200 % sur les multiplications. Cet avantage prononcé des grandes bases est contrebalancé par un fait que nous avons également fait ressortir (voir V, *b*), c'est que même le calculateur le plus habile ne pourrait opérer aussi vite ni aussi sûrement avec les grands chiffres qu'avec les petits ; mais cette différence en faveur des petites bases ne compense certainement pas l'autre, et tous les bons calculateurs seront d'accord pour préférer une grande base à une petite. Le système à base 16 par exemple, en comparaison de notre système décimal, ferait gagner en rapidité de calcul 20 % sur les additions et 44 % sur les multiplications, puisque le rapport $\log 16 : \log 10$ est à peu près égal au rapport 6 : 5.

Nous avons donc deux partis adverses dans le monde des gens qui ont à calculer : d'un côté une petite minorité, nous l'appelions tout à l'heure « l'aristocratie des calculateurs » ; ce sont ceux qui sont doués d'une grande facilité de calcul ; ils voudraient tous remplacer la base 10 par une plus grande, ils désirent en vérité une base aussi grande que possible. — D'un autre côté une immense majorité, nous pourrions l'appeler « la démocratie des cal-

culateurs » ; c'est la grande masse de ceux dont les facultés ne se portent pas vers le calcul numérique ; ceux-là voudraient tous remplacer la base 10 par une plus petite, eux désirent une base aussi petite que possible. — Aristocrates et démocrates peuvent faire valoir de très bonnes raisons ; et comme une base doit être fixée, la même pour tout le monde, il pourrait sembler au premier abord que démocrates et aristocrates (dans ce domaine comme dans d'autres) défendront chacun sa cause si bien que ce qui existe, c'est-à-dire le système décimal, continuera à exister indéfiniment.

b). — En examinant de près comment procède « l'aristocratie des calculateurs », on arrive cependant à un tout autre résultat : on voit qu'il y a moyen de contenter les deux partis ! On constate d'abord qu'il y a une énorme différence entre les membres de cette aristocratie-là, et qu'avec beaucoup d'exercice, il est possible de faire des progrès surprenants. On constate ensuite que les grands calculateurs opèrent toujours en réunissant les chiffres deux par deux, ou trois par trois, si possible même quatre par quatre ; les bons calculateurs arrivent à opérer avec les nombres de deux chiffres aussi couramment et avec la même habileté qu'un calculateur « moyen » avec les nombres d'un seul chiffre. En d'autres termes : les bons calculateurs ne se contentent pas du système décimal, mais opèrent dans le système centésimal ou millésimal, ils s'efforcent d'atteindre les plus hauts degrés de l'échelle $10, 10^2, 10^3, 10^4, \dots$

C'est du reste ce que font tous ceux qui emploient les grandes tables publiées par Crelle, lesquelles contiennent les produits deux par deux de tous les nombres entiers jusqu'à 1000 fois 1000. En reprenant notre exemple de ci-dessus : 213 465 . 926 543, et posant, pour abréger et en même temps généraliser : $(a) = 213$, $(b) = 465$, $(c) = 926$, $(d) = 543$, au lieu d'avoir à multiplier deux nombres de six chiffres, c'est comme si l'on n'avait affaire qu'à deux nombres de deux chiffres :

$$
\begin{array}{r}
(a)(b) \\
(c)(d) \\
\hline
\times \\
\times \\
\times \\
\times \\
\hline
\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

Chaque point représente un chiffre, et chaque croix un résultat à trouver dans la table, donc un nombre de 6 ou 7 chiffres, dans notre exemple particulier. Au lieu d'un minimum de 63 opérations intermédiaires, on n'en a plus que 14 à effectuer, et même

seulement 7, si, en additionnant les résultats partiels, on prend également les chiffres 3 par 3. Bien qu'on perde beaucoup de temps à feuilleter le gros volume des tables, l'avantage est encore considérable ; sans cette perte de temps, il aurait pour expression approchée (log $1000)^2$: (log $10)^2 = 9 : 1$. Un grand nombre de calculateurs font ainsi, grâce à ces tables étendues, en quelque sorte un usage journalier du système à base 1000.

« L'aristocratie des calculateurs » sait donc fort bien se procurer les grandes bases dont elle a besoin, mais elle est gênée par les difficultés de l'exécution. Additionner de tête des nombres de 2 chiffres, ce n'est pas bien difficile, mais peu nombreux sont ceux qui peuvent multiplier de tête et sans hésitation un nombre de 2 chiffres par un chiffre, à plus forte raison par un autre nombre de 2 chiffres. Il n'est pas donné à chacun d'étendre son « petit livret » jusqu'à 100 fois 100. Les grands calculateurs sont aussi mécontents du système décimal et ne le défendront pas ; mais ils ne se plaignent point de ce que la base 10 soit trop grande en elle-même, ils se plaignent plutôt de ce qu'il faille monter si haut pour atteindre les degrés suivants de l'échelle, de ce que 10 soit trop grand pour que ses puissances puissent être d'un usage commode comme bases d'un système numéral.

Ainsi, tous les calculateurs, grands et petits, bons et mauvais, sont mécontents du système décimal, mais pour des raisons différentes. Or, il y a un moyen de les contenter tous en satisfaisant à ces diverses exigences ; et ce moyen consiste dans *le choix d'une base beaucoup plus petite que 10.* Des deux seules qui pourraient entrer le plus sérieusement en question : 4 ou 6, nous pensons que 4 serait la meilleure. En comparaison du point de vue de la pratique, toutes les autres considérations, comme nous l'avons montré plus haut, entre autres celles de divisibilité, jouent un rôle secondaire. Et à ce point de vue, le système quaternaire est en moyenne douze fois plus facile à apprendre que le système sénaire (voir V *c*). Comme on n'aurait jamais à opérer qu'avec 1, 2 ou 3, et que toutes les tables quaternaires se réduisent à neuf règles, la sûreté des calculs serait beaucoup plus grande et la routine du calcul une fois acquise s'oublierait beaucoup moins vite et demanderait beaucoup moins d'exercice dans le premier système que dans le second. On pourrait aussi, avec plus de facilité, trouver en fait de chiffres des signes simples qu'il serait possible de réunir deux par deux, voire même trois par trois, d'un seul trait de plume.

c). — Mais l'avantage le plus considérable du système quaternaire nous paraît résider dans *sa grande souplesse.* Voici ce que nous entendons : si le peuple était en possession du système quaternaire, la majorité en resterait peut-être à la base 4, se familiarisant avec l'art du calcul à un beaucoup plus haut degré que ce

n'est le cas actuellement dans le système décimal. En plus : toutes les bonnes écoles amèneraient insensiblement leurs élèves à multiplier de tête et sans hésitation un nombre d'un chiffre par un nombre de deux chiffres, et cela correspondrait à peu près, en ce qui concerne la rapidité et la sûreté des opérations numériques, à l'usage d'un système à base 8. Tout calculateur habile étendrait son « grand livret » jusqu'à 16 fois 16, réunissant *toujours* deux chiffres en un seul ; il passerait ainsi de la base 4 à la base 16. Les plus doués en arriveraient à multiplier de tête un nombre de deux chiffres par un de trois, ce qui correspondrait à l'usage de la base 32, et additionneraient toujours trois chiffres à la fois. Quelques-uns prendraient aussi pour les multiplications les chiffres 3 par 3, passant ainsi à la base 64. L'exercice d'un système servirait de préparation pour passer à un autre à base plus élevée. Chacun pourrait trouver, par des degrés presque insensibles, le système le mieux approprié à ses facultés et à ses besoins. Ce passage *successif* d'un système à un autre, ce perfectionnement *graduel*, a une importance que l'on n'estime pas toujours à sa juste valeur.

L'importance éminente de « l'entraînement » est connue ; le sportsman aussi bien que l'homme de science l'apprécient. S'agit-il d'acquérir une habileté déterminée, dans n'importe quel domaine, tout le monde sait quelle est l'importance d'un développement graduel pour acquérir l'habileté en question peu à peu, par petits degrés successifs. Or, l'art du calcul numérique tient à la fois du sport et de la science, et pour passer maître dans cet art, l'entraînement graduel est plus qu'utile : il est nécessaire. Mais voilà que ce développement graduel est fortement entravé, et à tous les degrés, par un mal fondamental : le système décimal. Pour les commençants et les calculateurs médiocres, la base 10 est beaucoup trop grande ; pour les calculateurs hors ligne, cette même base 10 est trop étroite en elle-même, mais trop grande tout de même, parce que ses puissances successives 100, 1000, ..., sont trop éloignées l'une de l'autre pour que le passage de l'une à l'autre constitue un « entraînement graduel ». — Dans le système quaternaire, il n'y a pas de sauts si brusques, puisque les puissances successives de 4 sont des nombres beaucoup plus rapprochés les uns des autres que ne le sont les puissances successives de 10.

Cette souplesse est naturellement maximale dans le système binaire, puisqu'il a la base la plus petite possible. C'est parmi les systèmes à base 2^n dérivés du système binaire par un groupement des chiffres n à n, que chacun trouverait le plus facilement, par degrés insensibles, le système le mieux approprié à ses aptitudes. Dans la série de ces puissances, 4 et 16 ont sans doute, au point de vue de la numération, la plus grande importance pour la pratique. — Du reste, ces systèmes à base 2^n présentent une série de

beautés et de propriétés élégantes qui ont déjà captivé l'intérêt de plus d'un mathématicien et attiré l'attention de plus d'un chercheur de curiosités arithmétiques, mais dans le détail desquelles le sujet de notre étude aussi bien que le cadre de ce travail ne nous permettent pas d'entrer.

d). Résumons brièvement les conclusions auxquelles conduit l'ensemble des considérations que nous avons faites :

1) De tous les points de vue auxquels on peut se placer pour étudier et comparer entre eux les différents systèmes de numération, le plus important est celui de la pratique, lorsqu'il s'agit de décider de la question : quel nombre conviendrait-il le mieux de choisir comme base ?

2) La base doit être un nombre pair aussi petit que possible.

3) Étant données les limites de la mémoire humaine et ce qu'en moyenne elle peut s'assimiler de façon durable, c'est le nombre 4 qu'il conviendrait le mieux de choisir comme base du système de numération.

4) Les avantages principaux du système à base 4 (système quaternaire ou tétradique) sont les suivants :

a) Il s'apprend en moyenne environ 240 fois plus facilement que le système décimal. Abstraction faite du système binaire ou dyadique, et 3 étant exclu comme base, c'est le système quaternaire qui est de beaucoup le plus facile à s'approprier.

b) Une fois appris, il s'oublie le moins vite, car toutes les tables se réduisent à 9 règles.

c) Pour conserver la routine du calcul une fois acquise, il faut beaucoup moins d'exercice que dans n'importe quel autre système à base plus grande.

d) Puisqu'on n'a jamais à y opérer qu'avec les nombres 1, 2 ou 3, les calculs s'y font avec une facilité et une sûreté plus grandes que dans tout système à base supérieure.

e) Il possède une grande souplesse, la série 4, 16, 64,... des puissances de la base 4 permettant à chacun de choisir parmi les systèmes à base 4^n celui qui convient le mieux à ses aptitudes et à ses besoins. Tout calculateur habile ferait usage de la base 16, en groupant les chiffres quaternaires deux par deux.

Remarques.

1) — Même dans un détail amusant, les systèmes par 4 et par 16 trouvent une « justification » qui n'est pas sans intérêt : elle se rapporte à l'art si simple de compter sur les doigts. Cet art fut l'origine du système décimal. C'est dans cette particularité que l'homme naît avec 5 doigts à chaque main et à chaque pied qu'il faut chercher l'explication naturelle du fait surprenant, que

tous les peuples de la terre chez lesquels le degré de la civilisation a permis d'en arriver à un véritable « système » de numération, ont comme base de ce système l'un des trois nombres 5, ou 10, ou 20 (à deux exceptions près). En se basant là-dessus, on a pu écrire « l'art de compter sur les doigts est le plus ferme rempart du système décimal ». — La question apparaît tout de même sous une autre face à qui fait glisser le pouce le long de chacun des autres doigts, en comptant dans le système quaternaire ou sexdécimal, mettant une unité pour chaque phalange et une pour la racine de chaque doigt.

2) — S'il s'agissait effectivement d'une réforme, il faudrait naturellement changer non seulement les noms des nombres en les adaptant à la base 4 (ou 16), mais aussi nos chiffres dits « arabes » : il n'y aurait aucune raison de conserver ces signes compliqués et peu commodes. On en choisirait au contraire d'autres *plus simples*, en tenant compte des facteurs qu'il y a à considérer et que nous avons indiqués dans le cours de cette étude. Tout en étant simples et se distinguant nettement les uns des autres, s'écrivant chacun d'un seul trait de plume, ils devraient avoir la propriété de pouvoir être facilement transformés les uns dans les autres, de façon à permettre de corriger des signes mal écrits ou faux sans qu'on ait besoin de gratter ; ils devraient surtout pouvoir se lier commodément deux par deux en constituant, ainsi groupés, de nouveaux signes simples (les chiffres de la base 16) s'écrivant aussi d'un seul trait de plume. — Pour différentes raisons, nous nous abstiendrons de rendre compte des nombreux essais dont nous avons eu connaissance jusqu'ici, et de faire des propositions concrètes. Nous serons obligé envers quiconque voudra nous communiquer des renseignements ou des essais personnels dans ce sens.

3) — Une réforme est naturellement désirable, mais nous ne pensons pas qu'elle soit possible. On a dans presque tous les domaines des preuves indubitables de la force extraordinaire des idées conservatrices, et cette force en elle-même est déjà si grande que sans doute ni nos contemporains, ni nos descendants n'oseront jamais entreprendre d'échanger notre mauvais système de numération contre un bon ! Les difficultés à surmonter ne seraient du reste pas petites ; elles doivent paraître immenses à ceux qui auraient le plus à gagner à un changement et qui souffrent le plus de l'état de choses actuel, c'est-à-dire aux gens peu instruits. — Maintenant que le système décimal a été introduit dans presque tous les systèmes de monnaie et de mesure de toutes sortes, il faut poursuivre partout ces réformes. Nous sommes de ceux qui pensent que mieux vaut employer un seul système, même mauvais, d'une manière rationnelle, générale et conséquente, plutôt qu'un mélange quelconque de systèmes différents. Mais nous pensons qu'on aurait mieux fait encore si, avant de monopoliser le

système décimal, on en avait comparé les qualités avec celles d'autres systèmes. Les considérations que nous faisons valoir dans cette étude permettent d'entrevoir l'immensité de la perte de temps et d'efforts causée à l'humanité civilisée, par le fait qu'on n'a pas choisi la meilleure base possible pour le système de numération.

Nous avons voulu donner un exemple montrant qu'on a souvent raison de ne pas accepter aveuglément les traditions du bon vieux temps, que tout n'est pas bon dans ce que nous a légué un passé lointain.

L. Gustave Du Pasquier (Zurich).

CONSTRUCTIONS DE PLANIMÉTRIE

SOLUTIONS NOUVELLES DE PROBLÈMES COMPLIQUÉS PAR DES CONDITIONS PARTICULIÈRES

Les solutions géométriques peuvent être jugées à des points de vue bien différents :

Tandis que le *professeur* s'inquiète de la valeur pédagogique, de la clarté et de la simplicité ; — le *dessinateur* pratique, préfère la rapidité, l'exactitude et la facilité d'assimilation ; — le *savant* considère l'importance que la construction peut avoir pour la théorie, il recherche des affinités organiques, il examine quels services peuvent rendre divers instruments et se propose, comme en géométrographie, d'atteindre économiquement le résultat par un minimum de lignes auxiliaires.

On ne saurait exiger de toute solution qu'elle soit également satisfaisante à des points de vue aussi différents, quelquefois même opposés. Mais certains problèmes, pour ne pas donner cette triple satisfaction, n'en présentent pas moins un triple intérêt ; tels sont, croyons-nous, ceux qui sont traités ci-dessous.

En présentant ce matériel, que nous croyons absolument neuf, nous n'avons pas l'intention de comparer les jugements portés à différents points de vue sur quelques constructions, mais nous espérons procurer aux mathématiques scolaires la matière d'exercices simples, faciles à saisir et à exécuter. Telle de nos solutions pourra être utile au constructeur, et peut-être, enfin, ne sera pas sans intérêt au point de vue scientifique.

On trouvera une certaine cohésion logique qui ne se rencontre pas par hasard.

Nous espérons montrer qu'en Géométrie il ne s'agit pas de mémorisation formaliste, mais que toute construction donne à l'élève l'occasion de faire travailler son talent inventif; et ce n'est qu'ainsi que le savoir se transforme en activité, développe l'esprit.

Nous voudrions montrer à l'élève que les mathématiques ne sont pas un instrument de martyr (comme l'affirment ses détracteurs), mais, qu'au contraire, par le développement naturel et la combinaison des propriétés des figures, elles sont une source de vie attrayante et féconde. L'enseignement doit montrer aux élèves que le monde est aux audacieux.

1. — Construire la bissectrice d'un angle dont on ne peut atteindre le sommet (fig. 1).

a) Choisissons, sur les côtés l_1 et l_2 qui déterminent l'angle A, 2 segments égaux PQ′ et P′Q, puis menons d'une part les parallèles à PQ par P′ et Q′; d'autre part les parallèles à P′Q′ par P et Q.

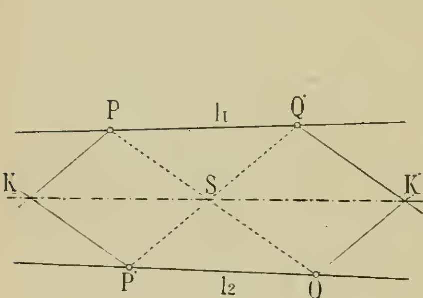


Fig. 1.

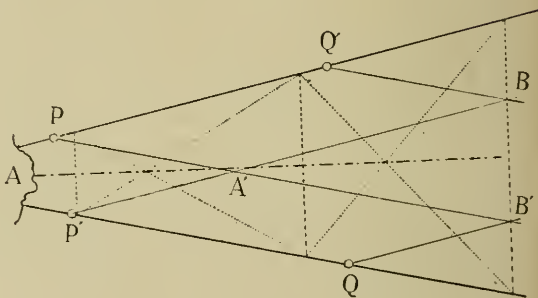


Fig. 2.

Les intersections de ces 2 paires de parallèles donnent 2 points K et K′ de la bissectrice cherchée. En effet, si nous désignons par T l'intersection de P′K avec l_1, nous voyons que

$$P'Q : TP = AP' : AT ,$$

et puisque $P'Q = PQ'$

$$PQ' : TP = AP' : AT .$$

Mais :

$$PQ' : TP = KP' : TK ,$$

donc

$$AP' : AT = KP' : TK ,$$

ce qui montre que K appartient à la bissectrice cherchée, on montrerait de même que K′ s'y trouve aussi.

Si l_1 et l_2 sont très voisins et faiblement convergents, il est préférable d'effectuer une translation d'un des côtés, puis d'appliquer la construction. En élevant ensuite 4 perpendiculaires à la bissectrice ainsi construite on obtient facilement celle que l'on cherche.

Remarque : KK′ est l'axe perspectif des ponctuelles semblables déterminées par les segments homologues PQ et P′Q′ ; et peut être construit comme tel. (Utilisé dans la fig. 4.)

Problème inverse. — Connaissant la bissectrice d'un angle, reporter sur les côtés deux segments égaux à partir de deux points donnés, dans le même sens, ou en sens inverse ; en construisant des parallèles seulement.

Soit par exemple à reporter PQ′ à partir de Q dans le sens du sommet.

Il suffit de mener par Q′ une parallèle à PQ jusqu'à son intersection K′ avec la bissectrice, puis une nouvelle parallèle à K′Q par Q′ ; cette dernière coupera le côté AQ au point cherché P′.

Si l'on se proposait de reporter PQ′ en sens inverse sur P′Q on utiliserait le point K comme nous venons d'utiliser K′ ; — les points P et P′ joueraient alors le même rôle que Q′ et Q.

b) Une construction connue, mais difficilement applicable dans le cas de petits angles, consiste à mener à l'intérieur de l'angle une parallèle quelconque à chaque côté, la bissectrice de leur angle partage la diagonale du parallélogramme en 2 segments qu'on intervertit. Par le point ainsi obtenu on mène une parallèle à la bissectrice auxiliaire, ce sera la bissectrice cherchée.

On peut modifier cette construction :

Mener à chaque côté une paire de parallèles qui interceptent sur les côtés des segments égaux PQ′ et P′Q. On obtient ainsi un losange A′A″BB′ dont une diagonale BB′ est perpendiculaire à la bissectrice cherchée, tandis que l'autre A′A″ lui est parallèle (fig. 2).

Au lieu d'intervertir les segments déterminés sur PP′ et QQ′, on peut mener 2 parallèles à BB′ et déterminer 2 points de la bissectrice comme le montre la fig. 2.

Pour rendre ce deuxième procédé applicable aux petits angles, nous déterminerons A′A″ comme suit : par rapport au milieu de PP′, le point S dans la fig. 1 est symétrique de K et dans la fig. 2 A′ est symétrique de A.

Si dans la fig. 2 nous dessinions le point S d'intersection de PQ et de P′Q′ ainsi que le point K de la bissectrice (fig. 1) nous aurions SA′ = et || KA et ces 2 segments sont équidistants du milieu de PP′ ; d'où nous déduisons facilement que SA′ est bissectrice des angles PA′P′ et QA″Q′. (Le point A″ n'est plus visible dans la figure.)

Dans la fig. 3 désignons le point S par S_1 ; — pour les mêmes

raisons que S_1, les points S_2 et S_3 appartiennent à la bissectrice des angles PA′P′ respectivement RA″R′.

La droite A′A″ est ainsi déterminée d'une nouvelle manière.

Nous avons démontré du même coup que la droite de Pascal de l'hexagone PR′QP′RQ′; — dans le cas où PQ = PR = P′Q′ = P′R′; — est parallèle à la bissectrice de l'angle A. La ligne de Pascal partage les diagonales PP′; QQ′ et RR′ dans le même rapport que cette bissectrice; — les segments devant toutefois être intervertis.

La figure 3 donne un exemple de faisceaux perspectifs dont les sommets P et P′ coïncident avec les points d'intersection du rayon commun et des supports AP et AP′ des ponctuelles égales déterminées par les segments homologues PQ = P′Q′.

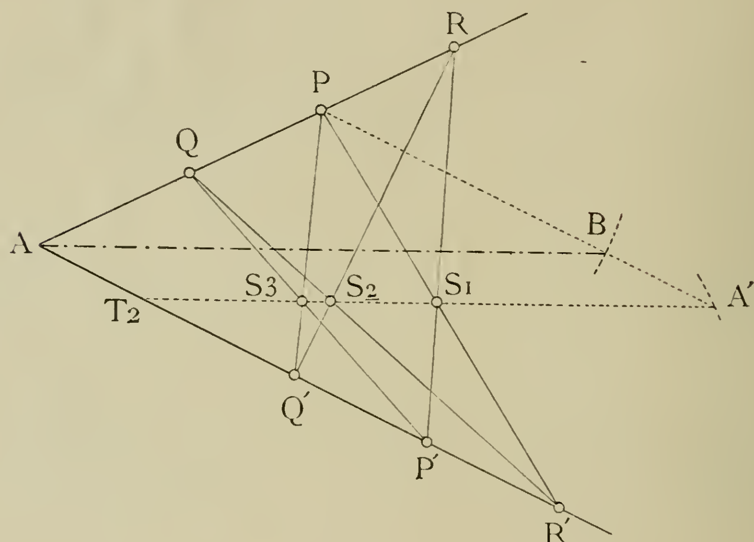


Fig. 3.

La détermination de la bissectrice, dans le cas de petits angles, sera plus exacte si on a soin de transporter les segments égaux PR et P′R′ sur les côtés, à des distances égales et suffisamment grandes pour que S_1 et S_3 soient assez écartés.

L'emploi déjà mentionné de perpendiculaires à l'axe perspectif conduit à la bissectrice cherchée.

On pourrait éviter l'emploi de ces perpendiculaires en ne construisant pas les ponctuelles égales sur les côtés eux-mêmes, mais sur des parallèles à ces côtés, choisies de telle sorte qu'elles se

coupent dans la figure; — par exemple dans la fig. 2 sur PB' et P'B. L'axe perspectif de ces ponctuelles donne immédiatement la bissectrice de l'angle PAP'.

Les points d'intersection des côtés donnés et des parallèles auxiliaires étant des points homologues, cette simplification sera peu favorable dans le cas de petits angles.

Désignons l'intersection de l'axe perspectif $S_1S_2S_3$ avec PP' par T_1, avec AP' par T_2 et avec AP par T_3, en appliquant le théorème de Carnot à la transversale $T_1T_2T_3$ du triangle APP', nous aurons:

$$\frac{AT_3}{PT_3} \cdot \frac{PT_1}{P'T_1} \cdot \frac{P'T_2}{AT_2} = +1$$

d'où

$$\frac{PT_3}{P'T_2} = \frac{AT_3}{AT_2} \cdot \frac{PT_1}{P'T_1} = \frac{AP'}{AP} = \frac{PT_3}{P'A - (PT_3 - PA)} = \frac{PA + (P'A - P'T_2)}{P'T_2} ,$$

ce qui montre que

$$\overline{PT_3} = \overline{P'A} \; ; \quad \overline{P'T_2} = \overline{PA}$$

$$\overline{RT_3} = \overline{R'A} \; ; \quad \overline{R'T_2} = \overline{RA}$$

$$\overline{QT_3} = \overline{Q'A} \; ; \quad \overline{Q'T_2} = \overline{QA}$$

Que nous pouvons exprimer:

Théorème: *La distance d'un point quelconque de l'une des ponctuelles au sommet de l'angle A est égale à la distance du point homologue de l'autre ponctuelle au point d'intersection de cette seconde ponctuelle avec l'axe perspectif.*

Cette proposition se justifie très simplement au point de vue projectif: on voit que les points des deux ponctuelles confondus en A sont les homologues de T_2 et T_3. Les segments homologues $\overline{PA}$ et $\overline{P'T_2}$ seront donc égaux à cause de l'égalité des ponctuelles.

Les points à l'infini des deux ponctuelles étant homologues, PX'_∞ et $P'X_\infty$ se coupent en un point A' de l'axe perspectif, donc

$$\overline{PT_3} = \overline{P'A} = \overline{A'P} .$$

La réciproque est également vraie.

Si le point T_2 est situé dans les limites de la figure, on peut facilement déterminer A' à l'aide du compas; puisque $\overline{P'A'} = \overline{AP} = \overline{T_2P'}$, il suffira de couper l'axe perspectif par un cercle de rayon $P'T_2$ et de centre P'. Puisque $\overline{AP}$ est aussi égal à $\overline{BP}$, le point B se trouvera à l'intersection de PA' et du cercle de rayon $P'T_2$ et de centre P.

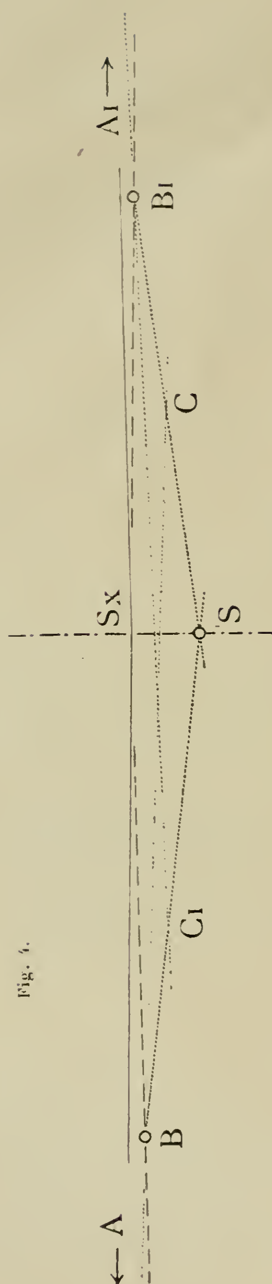


Fig. 4.

En menant par B la parallèle à l'axe perspectif, on obtient la bissectrice de l'angle A.

Si dans la fig. 3 on mène par P une parallèle à RP′ et par P′ une parallèle à PQ′, elles se coupent en un point K_1 de la bissectrice extérieure de l'angle PAP′.

Le point d'intersection Σ de RP′ et de PQ′ appartient à la bissectrice extérieure de l'angle PA′P′, car $AK_1 =$ et $\parallel A'\Sigma$.

Les segments AK_1 et $A'\Sigma$ sont équidistants du milieu de PP′.

$A'\Sigma$ est l'axe perspectif des ponctuelles égales déterminées sur les côtés AP et AP′ par les segments PR = P′Q′.

La bissectrice extérieure de PAP′ est l'axe perspectif des ponctuelles semblables caractérisées par RP′ et Q′P.

Si $A'\Sigma$ coupe AP au point Δ_3 et AP′ en Δ_2 on aura, comme plus haut :

$$\overline{AP'} = \overline{PT_3} = \overline{PA'} = \overline{P\Delta_3}$$

et

$$\overline{AP} = \overline{P'T_2} = \overline{P'A'} = \overline{P'\Delta_2}$$

Nous ne nous occuperons pas des constructions qui résulteraient de ces relations, car elles ne nous conduiraient à rien de nouveau.

II. — Construire la bissectrice d'angles très obtus. Déterminer le sommet de très petits angles.

La détermination exacte de la bissectrice d'un angle très obtus présente des difficultés spéciales parce que le sommet en est mal déterminé. Il est impossible d'éviter absolument les causes d'erreurs. On peut y tendre en employant des règles très soigneusement vérifiées pour prolonger le plus possible les côtés — toutes les constructions devront être effectuées en traits très fins.

Proposons-nous de construire la bissectrice de l'angle AS_xA_1 ; les lignes pointillées sont les prolongements des côtés. Les points A et A_1 des côtés ne sont plus visibles dans la fig. 4.

Si $AB_1 = A_1B$, l'axe perspectif des ponctuelles semblables A, B, C, ... et A_1, B_1, C_1, ... sera la bissectrice cherchée.

L'habileté du dessinateur consistera à choisir C et C_1 pour que que BC_1 et B_1C ne deviennent pas trop petits et pour que, d'autre part, l'angle CSC_1 ne soit pas trop obtus.

Si on le veut, on peut se contenter de déterminer un seul point de la bissectrice; il remplacera le sommet dans les constructions qui suivent.

Si l'on se propose simplement de déterminer le sommet de S_x, on peut éviter le transport des grands segments $\overline{AB_1} = \overline{A_1B}$; car on obtiendra une approximation suffisante en prenant $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$; le théorème de Carnot nous montre qu'alors AB_1 et A_1B se trouvent égaux à très peu de chose près, — et cela d'autant mieux que les points correspondants auront été choisis symétriques par rapport à S_x autant que faire se peut. Par exemple AB égal à BS_x et A_1B_1 égal à B_1S_x. Si l'on prend $AB = BS_x = B_1S_x = A_1B_1$, on obtient l'axe de symétrie.

L'hypothèse que $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$ fait dégénérer approximativement la similitude des ponctuelles en égalité, et pour choisir C et C_1 on se bornera à prendre $BC = B_1C_1$ (voir fig. 4).

L'axe perspectif n'est plus la bissectrice, mais détermine néanmoins le sommet avec une approximation suffisante. Cette construction est certainement exacte au point de vue théorique.

III. — Théorèmes simples sur le quadrangle plan et applications à la construction.

1. — Démonstration des propriétés.

Nous nous proposons de généraliser par la projection parallèle les propriétés des figures 1, 3 et quelques autres qui s'y rattachent immédiatement.

On sait que lors de projections parallèles, les propriétés projectives des figures, et en outre les théorèmes basés exclusivement sur le parallélisme ou sur des propriétés de parallélogrammes, subsistent.

La projection parallèle des figures 1 et 3 détruit l'égalité des segments PQ′, P′Q ; — respectivement PQ, P′Q′ — et l'axe perspectif des ponctuelles semblables PQ ... ; P′Q′ ... ; cesse d'être la bissectrice de l'angle PAP′ (fig. 1). Les autres propriétés subsistent.

a) Lorsque la figure 1 aura été transformée par projection parallèle, KK′ passera encore par le point A d'intersection de l_1 et l_2.

En prolongeant KP et K′Q′ d'une part, KP′ et K′Q d'autre part, on forme un parallélogramme circonscrit au quadrangle PP′QQ′ dont la diagonale KK′ passe par A.

On peut considérer cette propriété comme cas particulier du théorème de Brianchon : puisque les côtés de l'hexagone KPQK′Q′P′K passent alternativement par deux points infiniment éloignés, les droites KK′; PQ′; QP′, de jonction des sommets opposés doivent se couper en un même point.

Si nous désignons par T le point d'intersection de KP′ avec AP et par T′ celui de K′Q′ avec AP′ les segments situés sur les parallèles P′T et Q′T′ forment la proposition

$$P'K : KT = T'K' : K'Q'$$

car les rapports anharmoniques des points situés sur AT′ et sur AQ′ sont égaux, de même que ceux des groupes sur Q′T′ et TP′ pour cause de parallélisme. De cette proposition résulte le théorème en question.

On peut encore le démontrer en appliquant aux triangles homologues le théorème de Desargues qui dit que la deuxième diagonale du parallélogramme circonscrit cité plus haut passe par le point d'intersection de la paire de côtés opposés PP′ et QQ′ du quadrangle.

Les quadrangles PQQ′P′ et PQP′Q′ appartiennent aussi au système des quatre points PP′QQ′.

Si l'on dessine comme ci-dessus les parallélogrammes circonscrits à ces quadrangles, le théorème appliqué à ce nouveau parallélogramme nous montre que leurs diagonales passent par les points d'intersection des côtés opposés des quadrilatères correspondants.

Les six diagonales des parallélogrammes ainsi obtenues sont les axes perspectifs des ponctuelles semblables qu'on forme lorsque dans les trois quadrilatères on considère les segments de diagonales dans deux sens comme homologues. Le théorème d'Euler montre que

$$\overline{K'K}^2 = \overline{P'Q}^2 + \overline{Q'P}^2 + \overline{P'Q'}^2 + \overline{PQ}^2 - \overline{P'P}^2 - \overline{Q'Q}^2 .$$

b) Imaginons que dans la figure 3 on ait dessiné comme dans la figure 1 pour les paires de points homologues PP′ et RR′ les points K et K′ de la bissectrice de l'angle A ; en outre, qu'on ait construit pour la paire RR′ le point A″ analogue de A′ et qu'enfin on projette parallèlement toute la figure ; nous constatons, comme dans

la figure 2, que

$$AK = \text{et} \parallel A'S_1 \quad \text{et} \quad AK' = \text{et} \parallel A''S_1$$

d'où résulte que les six diagonales introduites sous la lettre *a)* sont égales et parallèles deux à deux.

De plus, les axes perspectifs AB et $S_1S_2S_3$ sont équidistants aussi bien du milieu de PP′ que de celui de RR′ ; par suite, la droite joignant ces milieux partage aussi en deux parties égales le segment AS_1, par exemple, et l'on voit avec évidence éclatante le théorème de Gauss :

Les milieux des trois diagonales du quadrilatère complet PRP′R′P sont en ligne droite.

c) Si dans la projection parallèle de la figure 1 on prolonge les droite QK′ et PQ′ jusqu'à leur intersection X et de même Q′K′ et P′Q jusqu'à leur intersection en Y, la droite XY sera parallèle à PP′, car

$$AK : AK' = AP : AX = AP' : AY .$$

On démontrerait de même qu'on obtient une deuxième parallèle à PP′ en joignant le point X_1 d'intersection de PQ avec une parallèle à P′Q passant par Q′ au point d'intersection Y_1 de P′Q′ avec une parallèle à PQ′ par Q. Ce qui nous permet de mener une parallèle à un côté d'un quadrangle complet.

d) Dans la projection parallèle de la figure 1, menons par S une droite quelconque qui coupe les côtés AP et AP′ en M et M′ : puis par M′ une parallèle à PQ et par M une parallèle à P′Q′, ces deux parallèles coupent les côtés en N et N′ : *les trois points N, K et N′ sont situés en ligne droite.*

Réciproquement à une droite passant par K correspond une droite par S.

On obtiendrait d'une manière analogue une parallèle à NN′ passant par le point K′.

Pour le démontrer, il suffit de considérer que les segments MS et M′S sont projetés de deux manières sur NN′ par les côtés du parallélogramme SPKP′ et les droites MN′ et M′N.

Le parallélogramme inscrit dans le quadrangle et dont les côtés sont parallèles aux diagonales du quadrangle nous permet de construire le sixième côté dont on ne connaît pas les sommets d'un quadrangle complet déterminé par la position de cinq côtés.

Remarque. Le centre du parallélogramme PKP′S se trouve sur la ligne de Gauss du quadrilatère MNN′M′M.

Désignons par ABCDEF les sommets du quadrilatère complet de la figure 5.

Si P et P′ divisent les côtés opposés DA et BC en segments proportionnels dirigés dans le même sens, PP′ est une diagonale

d'un parallélogramme inscrit dans le quadrangle ABCD et ayant ses côtés parallèles aux diagonales AC et BD.

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 5.

Des diagonales du parallélogramme circonscrit au quadrangle ACDB et formé des parallèles aux côtés opposés AD et BC, —

F'F'' est celle qui passe par le point F d'intersection des côtés opposés AB et CD. Le prolongement de la diagonale égale et parallèle E'E'' du parallélogramme formé des parallèles aux côtés opposés AB et CD passe par E (voir fig. 5).

Les lignes pointillées projettent sur la diagonale F'F'' les rapports égaux des segments déterminés par P et P', donc se coupent sur cette diagonale.

On reconnaît immédiatement que le centre M du parallélogramme PP'EP'', c'est-à-dire le milieu de PP' est équidistant des droites EE' et FF' et que, — d'après ce qui précède, — il se trouve sur la droite de Gauss du quadrilatère ABCDA. Les milieux des segments EF, EF', EF'' et EP'', c'est-à-dire les milieux de EF, AC, BD et PP' sont situés sur une droite.

Ce qui nous permet d'énoncer le *nouveau* théorème général :

Si dans les 3 quadrangles simples formés des côtés d'un quadrilatère complet on considère comme segments homologues de ponctuelles projectives semblables les côtés opposés, dirigés dans le même sens, — (au contraire de ce qui se fait lors de la construction par tangentes de la parabole exinscrite au quadrilatère); — *on forme 6 paires de ponctuelles dans lesquelles les milieux des segments déterminés par des paires de points correspondants sont situés sur la droite de Gauss du quadrilatère.*

Ce théorème est appliqué à la construction dans la figure 12.

Corollaire. La droite de Gauss du quadrangle partage les côtés opposés des trois quadrilatères en segments homologues. Elle est donc tangent aux six paraboles obtenues comme enveloppes à l'aide des six paires de ponctuelles.

2. Applications de ces propriétés a la construction.

a) *Joindre un point donné* P *au point d'intersection* A *de 2 droites qui ne se coupent pas dans les limites de la figure.*

La projection parallèle de la fig. 1 donne le principe de la solution. Si le point donné est l'un des points K ou K', la construction consiste à déterminer l'autre :

On choisira de préférence des lignes de construction rectangulaires, afin de pouvoir les tracer par simple translation d'équerre (fig. 6). Des 2 constructions possibles, on préférera celle qui se dirige vers le sommet de l'angle.

Une des plus anciennes solutions de ce problème est due à Lambert, mais elle devient impraticable quand le point donné est trop voisin de la bissectrice. Elle consiste à construire 2 triangles homologues dont les sommets sont 3 à 3 sur les 2 droites données; 2 côtés homologues se trouvent également sur ces droites, tandis que les deux autres paires déterminent l'axe d'homologie, c'est-à-dire la droite cherchée.

Considérons un des sommets situés sur l_1 ou l_2 comme point donné P qu'il s'agirait de joindre au centre d'homologie déterminé par l'intersection inaccessible de 2 droites et qu'on peut considérer comme centre de 2 ponctuelles perspectives situées sur l_1 et l_2, dont l'axe coïncide avec l'axe d'homologie de la construction de Lambert. On obtient ainsi le point perspectif à P et la droite cherchée.

Cette construction est encore praticable lorsque celle de Lambert ne l'est plus, elle détermine doublement le point auxiliaire nécessaire, d'où une preuve. Le cas particulier où les supports des ponctuelles sont parallèles est résolu du même coup.

b) *Droite joignant deux points très rapprochés* (fig. 7 et 8).

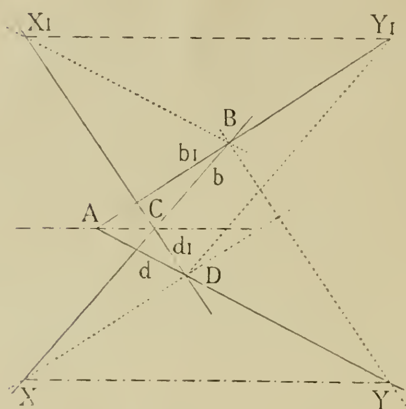


Fig. 8.

La fig. 7 montre la construction de AB à l'aide d'un point auxiliaire C.

Nous avons mené par B deux droites rectangulaires convenablement choisies ; nous imaginons que B soit déterminé par l'intersection supposée inaccessible de ces 2 droites rectangulaires et nous appliquons la construction de la fig. 6 ; c'est-à-dire que nous faisons partir de A 2 traits rectangulaires coudés en X et Y ; — Y′ et X′ qui se coupent en C et forment un hexagone dont B est point de Brianchon.

Dans la fig. 8, nous considérons les points voisins, C et A comme déterminés par l'intersection des droites bd_1 et b_1d. En appliquant au quadrangle ABCD la construction indiquée plus haut sous la lettre *c)*, on obtient à l'aide de 2 parallèles une droite XY ou X_1Y_1 parallèle à AC.

On utilise souvent dans ce problème la configuration de Desargues, qui nécessite 2 droites de plus pour déterminer le point auxiliaire, et l'une d'elles se trouve précisément aussi mal déterminée par 2 points voisins.

c) *Joindre les points d'intersection de 2 paires de droites qui ne se coupent pas dans les limites de la figure.*

Soient g_1 et g_2 ; l_1 et l_2 les droites dont on veut joindre les points d'intersection. Dans la figure 9, nous avons appliqué 2 fois la construction de la figure 6.

Si le point F seulement était inaccessible et qu'il s'agisse de le joindre au point E, les droites l_1 et l_2 joueraient le rôle des lignes

brisées auxiliaires de la fig. 6 et partant de E elles déterminent un point de la droite cherchée après avoir été coudées 2 fois sur les côtés g_1 et g_2 suivant EBNL et EDN'L.

D'une manière analogue g_1 et g_2 déterminent le point G.

En vertu de ce que nous avons dit à propos de la fig. 8, il faut que LG soit parallèle à M'N' et à MN, d'où une première vérification.

On peut en introduire d'autres ; en joignant le point d'intersection S de MD et de M'B à celui de N'D et de NB on obtient une parallèle à LG, et les points milieux de BD ; de M'N ; de N'M ; de MM' et de NN' sont équidistants de ces deux droites.

Fig. 9.

La droite joignant les milieux de DB et de MM' étant la ligne de Gauss du quadrilatère DMBM'D, elle partage en 2 parties égales la diagonale SE.

On pourrait se servir de la parallèle de vérification menée par S, pour la contruction, en menant par exemple par le milieu de BD 2 droites quelconques et en utilisant l'équidistance.

On peut déterminer au moyen de parallèles seulement les points équidistants correspondants aux points d'intersection de la parallèle de vérification avec g_1 et l_1.

On obtient encore une parallèle à EF en joignant le point D au point d'intersection des parallèles à g_2 et l_2 menées par M et M'.

La disposition défavorable des éléments donnés dans la fig. 10 ne permet pas l'application immédiate de la construction ci-des-

sus, on pourra procéder comme suit : on a considéré C comme point donné, les derniers segments des 2 lignes brisées qui devraient déterminer le point auxiliaire X de AC ont été prolongés en arrière jusqu'aux intersections G_1 et G_2 avec g_1 et g_2 pour former le parallélogramme G_1XG_2C dans lequel on voit que le milieu M de G_1G_2 est un point de la droite cherchée AC.

On pourra joindre le point M à A ou à C d'après la construction de la figure 6.

Si cette construction est difficilement exécutable, on peut, comme dans la fig. 10 appliquer la construction de la fig. 8 pour déterminer à l'aide de M une parallèle PQ à AC.

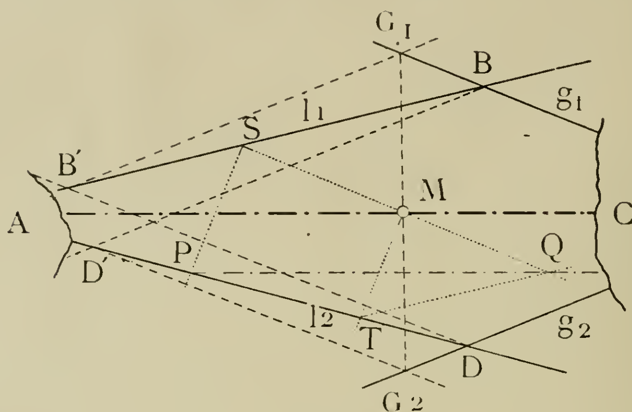


Fig. 10.

Pour cela nous menons par M 2 perpendiculaires quelconques et nous appliquons la règle énoncée plus haut sous la lettre *c*.

Cette construction est réversible, c'est-à-dire que la parallèle PQ à AC peut permettre de déterminer le milieu M de AC.

Dans la figure 11 on utilise cette construction de la parallèle, et la construction inverse pour joindre les 2 points très éloignés S et T.

Ce cas difficile est ainsi très simplement résolu dans un minimum d'espace et avec une grande exactitude, vérifiée d'ailleurs par la double disposition possible.

La construction résultant de la propriété citée au § précédent sous *c)* n'a pas été appliquée à la lettre, on a remplacé un des 2 sommets à joindre par un point de la droite qui les relie, ce qui revient évidemment au même.

Ainsi dans la figure 11, P est remplacé par R′ (respectivement R″) pour déterminer la parallèle Q′X′ (respectivement Q″X″) à ST.

On applique la construction inverse pour déterminer le point

d'intersection X de PQ et de ST en utilisant à gauche le point Q′ et à droite Q″.

Remarquons la marche générale de la construction : nous avons mené successivement : P′Q′ ∥ PQ ; Q′R′ ∥ QQ″ ; R′N′ ∥ PP″ ; QN′ ∥ PP′ et enfin Q′N′ ∥ ST.

Le point cherché X est à l'intersection de PQ et de P′N′.

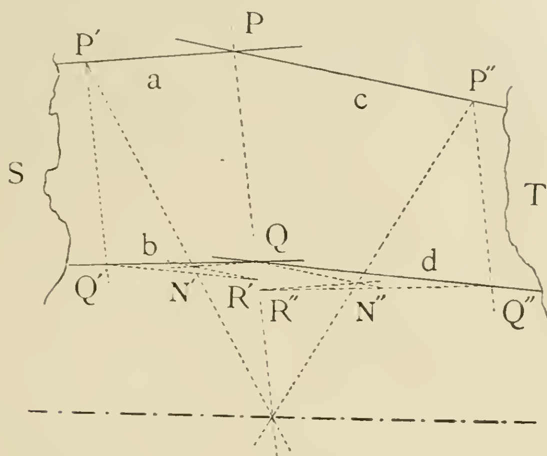


Fig. 11.

Par le point d'intersection de deux droites qui se coupent hors des limites de la figure, mener une parallèle à une troisième droite.

D'après ce qui précède nous pourrons résoudre le problème, c'est-à-dire déterminer un point de la parallèle cherchée à l'aide

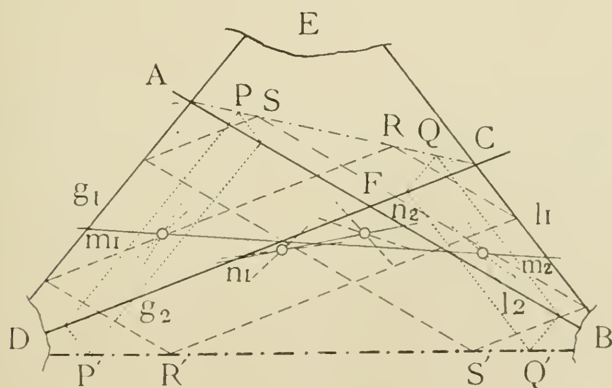


Fig. 12.

du point d'intersection de la troisième droite avec *une* des deux autres, tandis que la plupart des méthodes connues ne sont applicables que si les points d'intersection de la troisième avec les *deux* premières sont accessibles.

Dans le cas où les 2 points d'intersection se trouvent dans les limites du dessin, 2 dispositions nous seront possibles.

Le problème peut encore être résolu par application de la construction 9 dont il constitue le cas particulier où l'un des points inaccessibles est infiniment éloigné ; c'est l'autre qu'on considérera comme point donné.

Dans la figure 12 nous appliquons ce qui a été dit sous la lettre

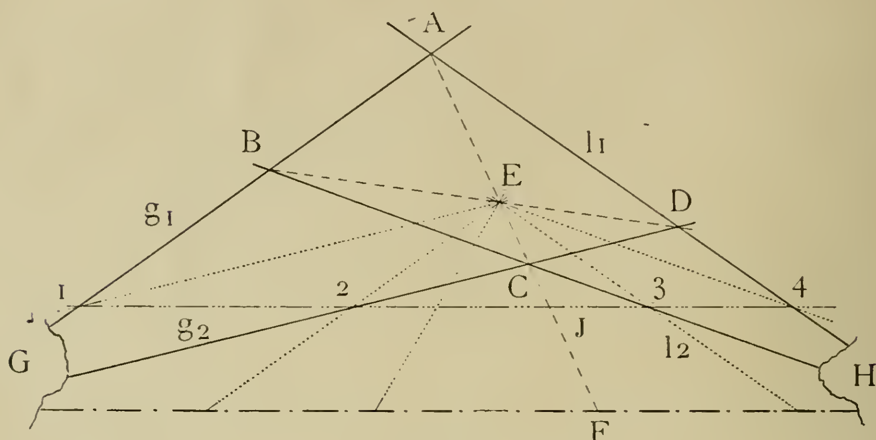


Fig. 13.

d), du paragraphe précédent, à la construction de la droite de jonction des points inaccessibles B et D au moyen de parallélogrammes.

Si comme dans la figure 13 on connaît le point E d'intersection des diagonales AC et BD, on construira, — pour trouver les points correspondants sur GH, — des parallélogrammes dont 2 diagonales coïncident, sont parallèles à GH et partagent en 2 parties égales la distance de E à cette droite. Ces diagonales sont déterminées par 2 de leurs 4 extrémités (1 et 3 par exemple), il suffira de prolonger d'une longueur égale à eux-mêmes 2 rayons menés du point E à la droite (1,3), par exemple EI = IF.

IV. — **Par un point donné, mener une parallèle à une droite donnée au moyen de la règle et d'un cercle fixe dont on connaît le centre.**

La construction suivante n'a pour but que de montrer la possibilité théorique du problème.

Dans la figure 14 nous avons résolu le cas général où la droite donnée MN ne coupe pas le cercle en le ramenant au cas plus simple où ces deux éléments se coupent.

Pour cela joignons le point donné Q à un point quelconque P de la droite donnée MN. Quand nous aurons montré comment on

Fig. 14.

peut déterminer le milieu O de PQ au moyen du parallélogramme PSQT il ne restera plus qu'à prolonger NO jusqu'à son intersection N′ avec PP′. De même l'intersection de MO et de PS nous donne un deuxième point M′ de la parallèle cherchée, d'où une vérification.

Nous sommes donc ramenés à construire par le point P une parallèle à la droite QS coupant le cercle donné et par Q une parallèle à PS qui le coupe également.

Le point S est choisi arbitrairement sur la circonférence; soient *t* et *s* les points d'intersection de SP et de SQ avec la circonférence; déterminons les points *t′ et s′* qui leur sont diamétrale-

ment opposés, menons $t'Q$ et $s'P$ qui couperont encore le cercle en t'' et s''; cherchons enfin le point S' diamétralement opposé à S.

Les points d'intersection P' de ss'' avec $S't$ et Q' de tt'' avec $S's$ déterminent les parallèles cherchées PP' et QQ'.

Cette construction se justifie simplement, pour PP' par exemple, en considérant que les quadrangles $PP's''t$ et $s''tSs$ sont formés de cordes et que les angles en s'', t (respct. t'' et s), sont droits.

La construction connue de Steiner est plus compliquée : elle consiste à mener par un point quelconque de la circonférence une parallèle à un diamètre quelconque PP' en appliquant les propriétés du trapèze; puis une deuxième corde parallèle et symétrique de la première par rapport au diamètre PP'. Ces 3 parallèles déterminent sur la droite g qui porte le segment à partager, 3 points équidistants, qu'on utilise pour mener par le point donné une parallèle à la droite g grâce aux propriétés du trapèze.

Enfin seulement à l'aide de cette parallèle à g et par une troisième utilisation de trapèze on partage le segment donné.

* * *

Nous espérons que les constructions exposées ci-dessus auront quelque utilité dans le monde scolaire. A la suite des critiques formulées par le mouvement contemporain de réforme de ce domaine, les maîtres de mathématiques s'efforcent de se borner au plus essentiel pour donner une notion aussi claire que possible de la discipline mathématique. A ce point de vue nous croyons que les solutions ci-dessus sont propres à éveiller le désir d'invention chez les élèves, à leur donner le respect de la force des mathématiques et le sentiment qu'ils se trouvent au seuil de la plus sublime des Sciences.

Franz Redl (Trübenbach, Basse-Autriche).

Traduction du Dr Eug. Chatelain (La Chaux-de-Fonds).

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sur le principe d'induction complète.

Au moment où j'ai écrit la Note insérée dans le numéro de novembre 1909 de l'*Enseignement*, j'ignorais que la question avait déjà été résolue par M. Zermelo de la façon la plus heureuse dans les *Acta mathematica* (Tome XXXII, fasc. 2, p. 185).

M. Zermelo ne prend pas, il est vrai, le principe de l'induction complète comme élément de définition pour le type ordinal ω; mais il rapporte ce principe à une propriété exactement équivalente des ensembles ordonnés de ce type, savoir celle de constituer des « chaînes simples », c'est-à-dire de ne pouvoir être divisés en parties « séparées », deux parties étant dites séparées lorsqu'aucun des éléments de l'une n'a son image (l'élément qui le suit immédiatement) dans l'autre et réciproquement.

Cette notion d'enchaînement et celle d'induction complète se rapportent uniquement aux ensembles ordonnés ayant un premier élément et dans lesquels à tout élément en correspond un autre qui le suit immédiatement. Si un tel ensemble M est divisé en parties séparées, chacune de celles-ci contient les images de tous ses éléments, puisque ces images ne peuvent, d'après la définition même des parties séparées, appartenir à d'autres parties. Celle de ces parties M_0 qui contient l'élément initial devrait donc, si M satisfaisait au principe d'induction complète, être identique à M, qui ne pourrait donc pas être divisé en parties séparées.

M. Zermelo donne de la réciproque la démonstration suivante :

Les parties M_1 de M qui contiennent l'élément initial e et l'image de chacun de leurs éléments ont une partie commune M_0 qui possède les propriétés suivantes : 1° M_0 figure parmi les ensembles M_1; car il contient e et les images de tous ses éléments, puisque tout élément a de M_0 appartient à tous les M_1 et, par suite, il en est de même de son image a', qui appartient donc bien à la partie commune M_0; 2° à l'exception de e, tout élément de M_0 est l'image d'un élément de cet ensemble ; sans cela, en supprimant un élément en M_0 on obtiendrait un ensemble M_1, ce qui est contraire à la définition de M_0.

Si M_0 ne se confond pas avec M, soit $R = M - M_0$ l'ensemble complémentaire. Il résulte des propriétés de M_0 qu'aucun élément

de M_0 ne peut être l'image d'un élément de R et réciproquement, c'est-à-dire que les parties M_0 et R sont séparées. Par conséquent, lorsque M ne peut être divisé en parties séparées, M_0 se confond avec M et il en est par suite de même de tout ensemble M_1, c'est-à-dire que le principe d'induction complète est satisfait.

On peut encore donner une autre forme au principe d'induction complète. Si l'on appelle « segment » d'un ensemble ordonné un sous-ensemble contenant tous les éléments qui précèdent ses éléments, on reconnaît facilement que, pour un ensemble ordonné M ayant un premier élément et dans lequel tout élément a un suivant immédiat, un segment est un sous-ensemble qui contient l'élément initial et les suivants de tous ses éléments à l'exception du dernier s'il en existe un. Dès lors il est clair que l'induction complète équivaut à la propriété suivante : *tout segment de* M *qui n'est pas identique à l'ensemble total a un dernier élément.*

Il reste à démontrer que l'ensemble des nombres entiers finis ordonné suivant les grandeurs est du type ordinal ω. C'est ce que fait M. Zermelo en définissant ces nombres comme puissances ou nombres cardinaux des ensembles finis, ceux-ci étant eux-mêmes définis par la propriété de pouvoir être « doublement bien ordonnés » ; un ensemble ordonné est dit doublement bien ordonné si tout sous-ensemble a à la fois un premier et un dernier élément. Les types de ces ensembles sont évidemment les segments du type ω.

La question du principe de l'induction complète se trouve bien ainsi définitivement résolue, et cela dans la voie qu'indiquait déjà le bon sens.

G. Combebiac (Limoges).

CHRONIQUE

Commission internationale de l'enseignement mathématique.

I. — RÉUNION DE BRUXELLES
9 et 10 août 1910.

SÉANCE DU COMITÉ CENTRAL.

Mardi 9 août, à 9 h. du matin et éventuellement à 4 h. de l'après-midi.

RÉUNION PRÉPARATOIRE.

Mardi soir, 9 août à 8 h. $^1/_2$ (Brasserie « aux Trois-Suisses », 1er étage) rue des Princes, en face du Théâtre de la Monnaie). — Cette réunion, qui est principalement destinée aux présentations, permettra aux mathématiciens de prendre contact.

SÉANCE DES DÉLÉGUÉS
ET DES MEMBRES DES SOUS-COMMISSIONS NATIONALES.

Mercredi 10 août, à 9 h. du matin, salle Ravenstein (petite salle), 3, rue Ravenstein, près la Place Royale.

SÉANCE GÉNÉRALE PUBLIQUE.

Mercredi 10 août, à 4 h. de l'après-midi, salle Ravenstein, 3, rue Ravenstein, près la Place Royale.

Ordre du jour :

1. Allocution d'un représentant de la Belgique.
2. Discours de M. F. KLEIN, Président de la Commission, sur le but de la Commission et sur l'enseignement en général.
3. Rapide aperçu de l'état des travaux dans les différents pays, par le Secrétaire-général.
4. Conférence de M. C. BOURLET (Paris) sur la pénétration réciproque des mathématiques pures et des mathématiques appliquées dans l'enseignement secondaire.

Les adhésions et les demandes de renseignements doivent être adressées au secrétaire-général de la Commission, M. H. FEHR, Florissant, 72, Genève.

II. — SOUS-COMMISSIONS NATIONALES

Autriche. — La sous-commission autrichienne vient de publier le second fascicule de ses rapports : *Berichte über den mathematischen Unterricht in Oesterreich*, veranlaszt *durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission* (Verlag Hölder, Wien). Heft 2 (52 p.). — Il contient les trois rapports suivants :

Der mathematische Unterricht an den Bildungsanstalten für Lehrer und Lehrerinnen, von Dr Theodor Konrath, Professor am K. K. Zivil-Mädchenpensionat in Wien. (L'enseignement mathématique dans les écoles normales d'instituteurs et d'institutrices.)

Der mathematische und physikalische Unterricht an den höheren Handelsschulen, von Professor Myron Dolinski, Wien. (L'enseignement des mathématiques et de la Physique dans les écoles supérieures de commerce, p. 29 à 41.)

Der mathematische Unterricht an der höheren Forstlehranstalt Reichstadt, von Professor Milos Adamicka, Reichstadt. (L'Enseignement mathématique à l'Ecole supérieure forestière de Reichstadt, p. 43-51.)

L'enseignement scientifique à l'Exposition universelle de Bruxelles.

I. — Une visite a l'Exposition.

Le numéro de mai 1910 de l'*Enseignement mathématique* a déjà signalé l'importance de la section d'enseignement du compartiment allemand de l'Exposition universelle. Cette section ne comporte en effet pas moins de 23 compartiments groupés ensemble et contenant une collection imposante d'objets et de documents les plus divers relatifs surtout à l'instruction primaire et moyenne. Là se trouve réuni tout ce qui concerne le mobilier, le matériel scolaire, les travaux d'élèves, etc. Les collections d'instruments de physique et de préparations biologiques sont particulièrement riches et montrent que les méthodes d'enseignement s'orientent de plus en plus dans le sens de l'observation et de l'expérience. Elles ont été organisées par MM. Grimseil (Hambourg) et Johannesson (Berlin) pour la Physique et MM. Schoenichen (Berlin) et B. Schmidt (Zwickau) pour la Biologie.

Quant aux mathématiques, on sait que cette branche n'exige pas grand matériel, à moins qu'on n'y comprenne aussi l'outillage des cours de dessin. Aussi les modèles de formes géométriques, de sections coniques et quelques appareils de démonstration pour l'astronomie ne sont qu'en nombre relativement restreint en comparaison du matériel des sciences expérimentales. Par suite, le mathématicien s'attarde de préférence aux cahiers d'élèves et aux programmes de cours; et, bien que la manière de faire et de cor-

riger des devoirs, de composer et d'exécuter des programmes soit connue parce que des livres et des articles de revue ont paru sur ce sujet, il est bon encore de trouver toutes ces choses réunies et de les voir dans leur cadre. Mais il n'est évidemment pas possible ici d'entrer dans des détails.

Un fait qui montre bien l'importance de cette *Unterrichts-Ausstellung* allemande, c'est que le catalogue des objets exposés forme deux gros volumes de 300 et 170 pages[1] mis obligeamment à la disposition des personnes que la chose intéresse par M. Mosch, commissaire de la section d'enseignement. Le *volume I* contient la description détaillée de l'Exposition; ses différents chapitres sont précédés chacun d'un exposé signé par un spécialiste et l'Introduction de l'ouvrage est due à la plume autorisée d'un pédagogue bien connu, Prof. Dr Rudolf Lehmann (Posen); il a été traduit en français. Le premier chapitre du catalogue est consacré au Bureau de renseignements annexé depuis 1904 à l'Université de Berlin *(Amtliche akademische Auskunftstelle)* qui expose plusieurs bibliothèques d'ouvrages spéciaux. Le *volume II* renferme les catalogues des trois bibliothèques se trouvant à l'Exposition d'enseignement: la bibliothèque pour les maîtres des écoles secondaires, la bibliothèque des élèves d'écoles secondaires et la bibliothèque d'hygiène scolaire.

Le compartiment allemand n'est pas le seul où l'enseignement scientifique occupe une place, mais c'est celui où l'intérêt pédagogique est le plus concentré. Ailleurs des portefeuilles de croquis et d'épures, comme ceux de l'Ecole d'artisans de Luxembourg, des documents relatifs à l'art de l'ingénieur ou aux travaux publics, par exemple ceux du compartiment italien, se rattachent directement ou indirectement à l'enseignement.

La Belgique surtout, qui organisa l'Exposition, se devait de ne pas rester en dessous de ce que pouvaient montrer les nations invitées et son exhibition est étendue et variée. Les établissements d'instruction supérieure, moyenne et primaire remplissent, de leurs envois très intéressants, des locaux nombreux et aménagés avec goût. L'intérêt pédagogique y est moins exclusif, semble-t-il, que dans la section allemande et se combine heureusement avec l'intérêt historique, artistique ou sociologique.

Exposition-Musée des Associations et Congrès internationaux. — Signalons à cette place une exposition d'un grand intérêt, qui se rattache à l'Exposition universelle, et qui a été faite en connexion avec les congrès internationaux qui auront lieu à Bruxelles en 1910. Organisée par l'*Office central des Institutions internationales,* elle est installée au *Palais du Cinquantenaire.* Cette exposition a pour but de montrer les progrès accomplis en toute matière dans le

[1] *Führer durch die Ausstellung* (Commissionsverlag der Weidmannschen Buchhandlung, Berlin). I. *Führer* (Guide). — II Bibliotheks-Kataloge.

domaine de l'organisation internationale. Elle comprend les méthodes, les programmes, les moyens mis en œuvre, les travaux accomplis et les résultats obtenus.

II. — Conférences sur l'enseignement scientifique.

Rappelons ici, en les complétant, les renseignements concernant les séances publiques qui vont être organisées à l'occasion de l'Exposition et auxquelles sont invités tous ceux qui s'intéressent aux progrès de l'enseignement des sciences mathématiques, physiques et naturelles.

I. — *Mercredi* 10 août, à 4 h. de l'après-midi, salle Ravenstein, 3, rue Ravenstein, près la Place Royale. — Séance organisée par la Commission internationale de l'enseignement mathématique. Elle comprendra notamment une conférence de M. C. Bourlet (Paris) sur *la pénétration réciproque des mathématiques pures et des mathématiques appliquées dans l'enseignement secondaire.*

II. — *Jeudi* 11 et *vendredi* 12 août. — Conférences sur l'enseignement scientifique et séances de démonstration organisées à l'Exposition, au pavillon de la section allemande, sous les auspices de la Société allemande pour l'avancement de l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles (*Verein zur Förderung der mathem. u. naturw. Unterrichts*), présidée par M. Thaer (Hambourg). On annonce les conférences de MM.

Treutlein et Schwering, pour les *Mathématiques;*

Grimsehl et Poske, pour la *Physique;*

et Bastian Schmid et Schoenichen, pour la *Biologie.*

Les conférences auront lieu le matin à 10 h., et les séances de démonstration l'après-midi à 4 h.

III. — *Samedi* 13 et *dimanche* 14 août. — Conférences sur l'enseignement technique organisées à l'Exposition, section française, sous les auspices du Ministère français du Commerce et de l'Industrie avec le concours de l'Ecole française de Bruxelles. Réparties sur les matinées du samedi et du dimanche, elles seront suivies, l'après-midi, de séances de démonstration.

Samedi matin. — *Les progrès de l'aviation en France, les écoles d'aviation*, par M. C. Bourlet, Professeur au Conservatoire national des arts et métiers (Paris).

L'organisation de l'enseignement technique pratique en France, par M. Jouglet, Ingénieur à l'Ecole des arts et métiers d'Aix-en-Provence.

Dimanche matin. — *L'enseignement de l'électricité industrielle dans les Ecoles pratiques d'industrie en France*, par M. Beaufils, Directeur de l'Ecole pratique d'industrie de Saint-Etienne.

L'enseignement manuel dans les Ecoles pratiques et les écoles d'arts et métiers en France.

III. — Les Congrès.

Congrès international de l'enseignement moyen. — *Lundi* 15 et *mardi* 16 août. — Parmi les nombreux Congrès qui viennent siéger à Bruxelles au cours de l'été 1910, il y a lieu de signaler ici en première ligne, *le Congrès international de l'enseignement moyen*, qui suivra immédiatement les séances indiquées plus haut. Il sera organisé par le Comité central de la *Fédération de l'enseignement moyen officiel de Belgique*, sous la présidence de M. E. Discailles, professeur émérite de l'Etat à Gand. Placé sous le patronage du Gouvernement belge, ce Congrès a pour but :

a) de resserrer les liens qui unissent les membres du personnel de l'enseignement secondaire international ;

b) de démontrer l'importance de cet enseignement au point de vue social, d'en affirmer la vitalité et les progrès qu'il n'a cessé de réaliser.

Toutes les communications relatives à ce Congrès doivent être adressées au Secrétaire-général, M. V. Wittmann, professeur d'Athénée, rue Neuve, Genval (Brabant).

Mentionnons en outre les réunions suivantes :

Congrès international de l'Enseignement technique supérieur, du 9 au 12 septembre. — *Secrétaire-général:* M. Fontaine, 27, place de Louvain, Bruxelles.

Congrès international de Radiologie et d'Électricité, du 13 au 15 septembre. — Ce Congrès comprend trois sections : I. Terminologie. — Radiométrie. — II. Sciences physiques. — III. Sciences biologiques. — *Secrétariat-général:* 1, rue de la Prévôté, Bruxelles.

Association internationale des Académies.

Constituée en 1901 à Paris, sous la présidence de M. Darboux, l'Association internationale des Académies tient des assemblées générales trimestrielles. La dernière réunion vient d'avoir lieu à Rome le 9 mai 1910, sous la présidence de M. Blaserna, président de l'Académie de Lincei. C'est cette dernière qui joue le rôle d'Académie directrice pour la période 1908-1910.

Nous avons signalé en son temps la fondation de cette Association qui est appelée à jouer un rôle très utile dans certaines entreprises scientifiques ou littéraires d'un caractère international. Parmi les conclusions votées à Rome, nous nous bornerons à signaler celles-ci :

1) Le patronage accordé au Comité international pour la publication des constantes physico-chimiques.

2) L'approbation donnée aux dispositions prises par la Société helvétique des Sciences naturelles, relativement à la publication des œuvres d'Euler.

3° L'admission de la Société helvétique des Sciences naturelles parmi les Académies associées, ce qui porte à 20 le nombre de ces dernières.

Les travaux de la Section de Mathématiques et d'Astronomie du Congrès des naturalistes et médecins russes.

Réunion de Moscou, 10-19 janvier 1910.

Mathématiques.

Première séance. 11 janvier.

Kotelnikof, A.-P. : 1) Généralisation de la moyenne arithmético-géométrique. 2) Construction graphique des périodes d'une intégrale elliptique.

Guernete, N.-N. (Mlle) : Sur le calcul des variations.

Tschaplyguin, S.-A. : Sur le calcul approché des intégrales des équations différentielles.

Tschistiakoff, J.-J. : Généralisation d'un théorème d'Euler dans la théorie des nombres.

Seconde séance. 12 janvier.

Joukovsky, N.-G. : Application de la méthode de Kirchhoff au calcul des aéroplanes.

Kolossoff, G.-W. : Application de la théorie des fonctions d'une variable complexe à l'intégration de l'équation hyperharmonique $\nabla_2 \nabla_2 u = 0$, quand les conditions sur le contour sont données.

Leibenson, L.-S. : Détermination de l'élasticité de la terre supposée hétérogène.

La sous-section discute ensuite le projet du règlement de l'Association russe pour l'avancement des Sciences. Après une discussion à laquelle prirent part MM. S.-A. Tschaplyguin, D.-M. Sintsof, A.-N. Chapochnikoff, N.-G. Joukovsky, V.-V. Bobynin, elle approuve les principes qui servent de base au projet.

Troisième séance. 13 janvier.

Rabinovitsch, G. : Sur la fonction vectorielle linéaire et ses applications.

Stankievitsch, J-W. : Sur quelques applications de la transformation de contact.

Sintsof, D.-M. : Etude sur la théorie des connexes.

Wlassof, A.-C. : Détermination géométrique des courbes algébriques, des surfaces et des formes à plusieurs dimensions d'ordre supérieur en général.

Quatrième séance. 15 janvier.

V.-V. Bobynin propose de créer des Congrès partiels de mathématiciens russes.

Pfeiffer, G.-W. : Sur les points uniplanaires des surfaces algébriques.

Lagoutinsky, M.-N. : Sur l'intégration des équations différentielles algébriques.

Sintsof, D.-M. : Rapport sur l'organisation de la bibliographie mathématique russe courante.

Cinquième séance. 16 janvier.

Schatounovsky, S.-O. : Sur les congruences suivant le système de modules.

Günther, N.-M. : Sur la théorie des caractéristiques des systèmes d'équations différentielles partielles à une fonction inconnue de m variables indépendantes.

Floroff, P.-S. : Méthode de calcul de π à cinq décimales utile pour l'enseignement dans les écoles secondaires.

Séance générale. 16 janvier.

Backlund, O.-A. : De l'état actuel de la mécanique céleste.

Stekloff, W.-A. : Sur les équations de la physique mathématique.

Kryloff, A.-N. : Sur l'intégrateur des équations différentielles ordinaires.

Kolossoff, G.-W. : Problème plan de la théorie mathématique de l'élasticité.

Sixième séance. 17 janvier.

Gegalkin, J.-J. : Sur les ensembles infinis.

Bobynin, V.-V. : Sur les attaques anciennes et modernes (comte Léon Tolstoï) contre les mathématiques pures.

Résumé, présenté par le secrétaire D.-Th. Egoroff, de la communication de M. P.-M. Anotschenko, *sur la méthode élémentaire de résolution des équations.*

Guerssevanoff, N.-M. : *Sur la nomographie.*

Septième séance. 18 janvier.

Bobynin, V.-V. : Sur les méthodes naturelles et les méthodes artificielles de la restauration des démonstrations anciennes de quelques propositions mathématiques.

Gravé, D.-A. : Sur le calcul de tables des indices pour le second millier.

Sintsof, D.-M. : Sur les systèmes de courbes liées à la coïncidence principale du connexe (*xpu*).

Ehrenfest, P.-S. : Sur deux questions irrésolubles de physique mathématique.

La fin de la dernière séance a été consacrée à la discussion de la proposition de M. V.-V. Bobynin tendant à créer les Congrès partiels de mathématiciens russes. Après une discussion à laquelle prennent part MM. V.-V. Bobynin, D.-M. Sintsof, D.-D. Mordoukhay-Boltovsky, S.-J. Schatounovsky, T.-A. Affanassieff-Ehrenfest (Mme), P.-S. Ehrenfest, D.-Th. Egoroff, l'assemblée, sur la proposition de M. Lakhtin, adopte la résolution suivante : La sous-section de Mathématiques demande à la Société mathématique de Moscou de se charger de la mission d'élaborer un plan d'organisation et de le réaliser avec le concours des autres sociétés mathématiques.

Mécanique.

Première séance. 11 janvier.

Goriatschef, D.-N. : Pour le problème du mouvement d'un solide.

Timoschenko, S.-P. : Application des coordonnées normales à la recherche de la flexion des verges et des plaques.

Milowitch, A.-J. : Théorie tourbillonnaire d'appareil directeur et de puits de la turbine.

Poliakoff, R.-B. : Expériences sur les forces agissant sur les tarières spirales dans le travail relatif à la fonte et à l'acier.

Lakhtin, N.-K. : Sur l'organisation de la Section russe de la Société Internationale de l'examen des matériaux.

Seconde séance. 15 janvier.

Dinnik, A.-N. : Sur le choc des corps élastiques.

Abramoff, N.-M. : Sur la résistance à la contraction des corps dans le cas des obstacles à la dilatation latérale.

Gontareff, D.-A. : Sur quelques phénomènes mécaniques.

Troisième séance. 18 janvier.

Belsetzky, S.-J. : Théorie des fermes.

Cheliapin, S.-J. : Expériences confirmant la théorie du mouvement d'eau dans le sable.

Abramoff, N.-M. : Sur l'enseignement des mathématiques dans les écoles techniques.

Astronomie.

Première séance. 11 janvier.

Kostinsky, S.-C. : Sur l'application de la photographie à l'astronomie.

Orloff, S.-B. : Résultats de l'élaboration des photographies de la comète de Morehouse suivant la théorie de Bredikhin.

NETCHAEFF, N.-Th. : Intégration des équations du mouvement perturbateur par séries.

Seconde séance. 15 janvier.

PANOFF, A.-N. : Gravitation universelle considérée comme une fonction du temps et les conséquences qui en découlent.

MIKHAYLOWSKY, A.-A. : Sur les déterminations de l'intensité de la gravité, exécutées par les expéditions de l'Observatoire de Kazan.

BAYEFF, C.-L. : Un an et demi de l'activité du Cercle des amateurs d'Astronomie à Moscou.

GÉOGRAPHIE PHYSIQUE ET MÉTÉOROLOGIE.

Sous-section de la navigation aérienne.

Première séance. 13 janvier.

JOUKOVSKY, N.-G. : Chargement des machines à vol et la théorie tourbillonnaire de la vis de propulsion.

RIABOUSCHINSKY, D.-P. : Sur le coup du courant illimité à la plaque.

SCHABSKY, A.-N. : Terminologie aéronavale.

Seconde séance. 14 janvier.

RIABOUSCHINSKY, D.-P. : Sur les vis de propulsion aériennes.

YARKOWSKY, W.-J. : Sur l'unité aérodynamique.

TERETSCHENKO, Th.-Th. : Construction de la monoplane du système de Th.-Th. Teretschenko.

Troisième séance. 15 janvier.

JOUKOVSKY, N.-G. : L'état actuel de l'aérodynamique liée à la navigation aérienne.

KOWANKO, A.-M. : Sur les flottes aériennes.

RIKATSCHEFF, M.-M. : Résultats des ascensions des ballons-sondes en Russie.

Quatrième séance. 16 janvier.

JOUKOVSKY, N.-G. : Stabilité des machines à vol.

MENDELÉEFF, V.-D. : Préférence d'ornitoptère sur les autres machines à vol.

SCHIRMON, J. : Aéroplanes et la comparaison de ceux-ci avec les ornitoptères.

KOUSNETZOF, V.-V. : Sur les recherches de l'atmosphère exécutées par les Russes en jours internationaux des ans 1907, 1908 et 1909.

BOUBEKHIN, B.-M. : Moteurs légers des machines à vol.

GLOBA, N.-P. : Sur la marche de l'homme et le vol de l'oiseau.

ZAOUSTINSKY, M.-W. : Sur la construction des aéroplanes.

Cinquième séance : 17 janvier.

Zaoustinsky, M.-W. : Sur la construction des aéroplanes.

Oulianin, S.-A. : Cerf-volant pour l'ascension des hommes et de la photographie automatique.

Sixième séance. 18 janvier.

Oulianin, S.-A. : Cerf-volant pour l'ascension des hommes et de la photographie automatique.

Boubekhin, B.-M. : De la technique des vis de propulsion.

Zayontz, J. : Sur la pénétration dans la contrée du pôle Nord.

V.-V. Bobynin (Moscou).

Association allemande pour l'avancement de l'enseignement des Sciences mathématiques et naturelles.

Le *Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts* vient de tenir sa réunion annuelle à *Posen,* du 16 au 18 mai, sous la présidence d'honneur de M. le Prof. F. Pietzker (Nordhausen), assisté de M. le prof. A. Thaer (Hambourg), président. Nous devons nous borner à mentionner ici par leur titre les communications d'ordre mathématique.

Witting (Dresde) : La Commission internationale de l'enseignement mathématique et la sous-commission allemande. — Les Mathématiques dans les classes supérieures (avec discussion).

Gebhardt (Dresde) : Les notions historiques dans l'enseignement mathématique.

Brücher (Biebrich) : Le rôle de l'intuition en Algèbre.

Bochow (Nordhausen) : Représentation stéréométrique des nombres.

Böttcher (Leipzig) : Calendrier pour la période 1800 à 2000.

Jansen (Hambourg) : La stabilité des aréoplanes.

Schülke (Königsberg) : Sur la géométrie moderne.

Louis Raffy.

La science française vient de faire une perte sensible en la personne de M. Louis Raffy, professeur à la Faculté des Sciences de Paris, décédé le 9 juin, à l'âge de 55 ans. La carrière du savant était entièrement consacrée à la science et à l'enseignement de la Géométrie infinitésimale qu'il donnait avec tant de soin à la Sorbonne. Elle a été rappelée sur la tombe en termes émus par M. Appell, doyen de la Faculté des Sciences, et par M. Bricard, au nom de la Société mathématique, en deux discours dont voici les principaux passages :

« Louis Raffy naquit à Toulouse le 21 mars 1855; devenu Parisien à l'âge de trois ans, il eut la bonne fortune de le rester, son activité, son travail et son mérite scientifique lui ayant valu la rare faveur de faire toute sa carrière entre la Sorbonne et l'Ecole normale supérieure. Au Lycée, Louis Raffy eut de brillants succès en lettres comme en sciences; c'est pourquoi il hésita pour le choix d'une carrière... Il se décida pour les sciences et dès lors se livra à l'étude des mathématiques avec la volonté tenace, la conscience presque rude qu'il apportait à tout ce qu'il faisait. Il fut reçu à l'Ecole normale supérieure en 1879. En 1883 il était reçu docteur : sa thèse sur la détermination du genre d'une courbe par des opérations rationnelles, fut particulièrement remarquée par Hermite; quelques mois après, reçu agrégé des mathématiques, il fut attaché à la Faculté des Sciences comme chargé de conférences pour l'agrégation, puis il fut appelé à une conférence à l'Ecole normale. Dès lors sa carrière se déroule entre sa chère Sorbonne et sa chère Ecole.

« L. Raffy avait définitivement trouvé sa voie dans la Géométrie infinitésimale, qu'il n'a cessé de cultiver et d'enrichir jusqu'à son dernier jour; ses travaux sur les surfaces et les lignes courbes, sur la déformation des surfaces, se succédaient sans interruption, remarqués par le monde savant, récompensés par l'Académie. Dans son enseignement, il était profondément pénétré de ses devoirs : il préparait ses cours et ses conférences avec un soin minutieux, aimant ses élèves, s'intéressant au détail de leur travail, corrigeant et annotant leurs copies avec une conscience admirable, apportant aux examens une haute idée de sa mission.

« Nommé professeur adjoint en 1899, il fut en 1904 titularisé à la Sorbonne dans une chaire d'*Application de l'analyse à la Géométrie* créée pour lui. Ses leçons furent publiées dans un ouvrage remarquable par sa composition, par sa précision et par la perfection de la langue.

« Ainsi arrivé au terme de ses ambitions, n'ayant recherché aucune fonction en dehors de son service à l'Université auquel il consacrait toutes ses forces, il pouvait espérer une belle fin de carrière entouré d'une famille tendrement aimée..... Il y a trois semaines il dût cesser complètement tout service et fut enlevé rapidement à l'affection des siens..... Dans l'affreuse tristesse d'une telle séparation, tous les professeurs et les étudiants de la Faculté sont unis dans un même sentiment d'admiration pour une vie si droite, si pure, si courageuse; de douleur et de deuil devant une fin si prématurée. »

M. Bricard parla ensuite au nom de la *Société mathématique de France* pour adresser un adieu suprême à celui qui fut si longtemps l'un de ses membres les plus actifs et les plus dévoués. Dès son admission en 1883, Louis Raffy portait un intérêt tout parti-

culier à la Société et depuis ne cessa de lui rendre des services. « Comme secrétaire, il s'occupa de la rédaction du *Bulletin* jusque vers 1900. Appelé à la présidence en 1902 par le vœu unanime de ses collègues, il reprit quelque temps après les fonctions de secrétaire qu'il a conservées jusqu'à sa mort. Non seulement il rédigeait notre *Bulletin* avec autant de conscience que d'habileté, mais rien de ce qui touchait la vie de la Société ne le laissait indifférent, et l'on peut dire justement qu'il en était l'âme, ne manquant presque aucune séance et faisant de fréquentes communications qui constituaient l'un de leurs plus sérieux attraits. Par l'affection qu'il portait à la Société, L. Raffy montrait un beau trait de son caractère, je veux dire l'amour de la science pour elle-même et non pas seulement pour les succès qu'il y remportait. Je n'oublierai pas enfin que durant de longues années nous avons pu apprécier ce que valait l'homme à côté du savant, son obligeance inépuisable, son ardeur à défendre les idées qu'il croyait justes. Le souvenir de L. Raffy, de tout ce qu'il a fait pour notre Société et rêvait de faire, ne s'évanouira pas de notre mémoire. »

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions

Allemagne. — M. Th. Albrecht, de l'Institut géodésique de Potsdam, a été nommé membre correspondant de l'Académie des Sciences de Paris.

M. G. Hessenberg a été nommé professeur de Géométrie descriptive à l'Ecole technique supérieure de Breslau.

Angleterre. — M. F. Jackson et Mlle M. Pick ont été nommés professeurs adjoints de Mathématiques pures à l'University College de Londres, et M. P.-F. Everitt, professeur adjoint honoraire du même Collège.

M. J.-H. Jeans a été nommé lecturer en Mathématiques de la fondation Stokes à l'Université de Cambridge.

Autriche. — M. G. Rosmanith a été nommé professeur extraordinaire pour la Théorie des assurances et la Statistique mathématique à l'Ecole technique supérieure allemande de Prague.

Belgique. — Un comité présidé par M. J. Boulvin a remis, le 5 juin 1910, à l'Université de Gand, le buste en bronze de feu J. Massau, le savant regretté auquel l'*Enseignement mathématique* a consacré plusieurs notices. Le Comité avait obtenu une souscription de l'Institut de France.

Etats-Unis. — MM. Hutchinson et V. Snyder ont été nommés professeurs titulaires à la Cornell University.

MM. Burnside, de l'Université du Wisconsin, et M. Fite, de l'Université Cornell, et Hawks, de l'Université Yale, ont été nom-

més professeurs de Mathématiques à l'Université Columbia, à New-York.

M. Hawksworth a été nommé professeur de Mathématiques supérieures à l'Université de Pittsbourg.

M. E.-W. Ponzzer a été nommé professeur extraordinaire de Mathématiques appliquées à l'Université Stanford (Californie).

M. Ch.-L. Poor a été nommé professeur de Mécanique céleste à l'Université Columbia à New-York.

Université de Chicago. M. O. Bolza, désirant retourner en Europe pour habiter Fribourg (Brisgau), restera attaché à l'Université en qualité de professeur non-résidant.

Italie. — *R. Accademia delle Scienze di Torino.* M. Max Nöther (Erlangen) a été élu associé étranger. MM. J. Boussinesq (Paris), E. Cavalli (Naples), V. Cerulli (Teramo-Italie), Sir G.-H. Darwin (Cambridge), F. Enriques (Bologne), G.-B. Guccia (Palerme), T. Levi-Civita (Padoue), C. Neumann (Leipzig), ont été nommés membres correspondants.

— M. G. Lauricella, professeur d'Analyse infinitésimale à l'Université de Catane, a accepté l'appel qui lui a été adressé par l'Université de Rome pour la chaire d'Analyse supérieure, restée vacante après le décès de Cerruti.

Privat-docents : Ont été admis en qualité de privat-docents : M. C. Aimonetti, pour la Géodésie, à l'Université de Turin ; M. G. Forni, pour la Géodésie, à l'Institut technique supérieur de Milan ; M. L. Silla, pour la Mécanique rationnelle, à l'Université de Rome.

Suisse. — *Société helvétique des Sciences naturelles.* La 93e session annuelle se tiendra à Bâle du 4 au 7 septembre 1910, sous la présidence de M. le Prof. Von der Mühll. Une section sera spécialement consacrée aux communications concernant les mathématiques pures et appliquées ; elle sera présidée par M. le Prof. R. Fueter. A cette occasion il sera créé une *Société mathématique suisse,* due à l'initiative de MM. H. Fehr (Genève), R. Fueter (Bâle) et M. Grossmann (Zurich). Plus de 80 adhésions sont déjà parvenues au Comité provisoire.

La Société helvétique des Sciences naturelles vient d'être admise au nombre des académies formant l'Association internationale des Académies. Il n'y a en effet pas d'Académie en Suisse, et les savants suisses ont toujours écarté tout projet tendant à la création d'une Académie.

Université de Genève. — M. M. Plancherel a été admis en qualité de privat-docent.

Université de Neuchâtel. — M. L. Gaberel, privat-docent, est nommé professeur extraordinaire pour les cours sur la Théorie des fonctions.

NOTES ET DOCUMENTS

LES ÉCOLES RÉALES EN AUTRICHE

I. — Les nouveaux plans d'études mathématiques.

De nouveaux plans d'études[1] viennent d'être adoptés en Autriche pour l'enseignement secondaire supérieur qui comprend trois types d'établissements : les gymnases classiques, les gymnases réaux et les écoles réales. Le programme des mathématiques étant à peu près le même dans les trois écoles, nous nous bornons à reproduire ici celui de l'école réale, qui comprend en outre l'enseignement du dessin linéaire et de la Géométrie descriptive. Selon l'habitude, ces programmes sont accompagnés d'observations destinées à montrer dans quel esprit ils doivent être appliqués.

Le *temps consacré* aux mathématiques est de 3 heures par semaine dans les sept premières classes des *gymnases classiques et réaux* et de 2 heures dans la huitième. Il est bon d'ajouter que dans les classes supérieures le nombre des leçons par semaine est de 28 ou 29.

Les *écoles réales* comprennent sept classes, avec 33 heures de leçons par semaine dans les classes supérieures. Le temps consacré aux mathématiques est donné par le tableau suivant :

Ecoles réales ; classe :	I	II	III	IV	V	VI	VII
Mathématiques	3	5	5	4	4	4 (1er sem.) 3 (2me sem.)	5
Dessin linéaire et Géométrie descriptive		2	2	3	3	3	2

Le Décret concernant les écoles réales a été promulgué par le ministre des Cultes et de l'Instruction publique en date du 8 avril 1909. Dans l'introduction on insiste sur la nécessité qu'il y avait de procéder à une revision des programmes de 1898 en raison des progrès réalisés non seulement dans les diverses sciences, mais aussi dans la manière de concevoir l'enseignement et ses méthodes. C'était le cas notamment pour les Mathématiques et le Dessin.

Voici maintenant le plan d'études suivi des remarques générales pour les Mathématiques et la Géométrie descriptive. Nous devons le texte français à l'obligeance de M. J.-P. Dumur (Genève).

N. d. l. R.

[1] Ils sont en vente au *K. k. Schulbücher-Verlag*, *Wien*.

Mathématiques.

But de l'enseignement. Connaissance fondamentale et pratique des mathématiques élémentaires, y compris la notion de fonction et ses applications.

1re classe, 3 heures par semaine.

Calcul. Les quatre opérations fondamentales sur les nombres entiers concrets et abstraits en se bornant tout d'abord à des nombres simples et en ne compliquant que peu à peu. Chiffres romains. Monnaies du pays, poids et mesures. Nombres décimaux, envisagés d'abord d'après le système de position des chiffres, plus tard comme fractions décimales en corrélation avec des exercices préparatoires sur le calcul des fractions. (Fractions ordinaires, dont les dénominateurs sont composés d'un petit nombre de facteurs premiers simples, et que l'on applique à des exemples concrets sans faire intervenir les règles habituelles des fractions considérées comme classe particulière de nombres.)

Etude de l'espace. Exercices préparatoires sur les corps géométriques simples, principalement le cube et la sphère, usage du compas, de la règle, de l'équerre, de l'échelle de réduction et du rapporteur. Mesure et dessin des objets environnants. On familiarisera les élèves avec les propriétés et relations des plus simples figures de l'espace (angles de 90°, 60°, triangles équiangles, rectangles, équilatéraux, etc.), droites et plans parallèles et perpendiculaires dans les surfaces et corps solides.

Surface du carré, du rectangle, volume du cube, du parallélipipède droit, comme applications du système métrique.

2me classe, 5 heures par semaine (comprenant le calcul, l'étude de l'espace et le dessin géométrique).

Calcul. Mesures et divers autres sujets; facteurs premiers de nombres simples d'abord puis se compliquant peu à peu. Règles générales du calcul des fractions; transformation des fractions ordinaires en fractions décimales et inversement. Pour terminer, grandeurs directement et inversement proportionnelles (ce qui conduira de la façon la plus simple à la notion de fonction). Constante application au calcul des nombres décimaux concrets dans un domaine de plus en plus étendu. Calculs d'intérêts les plus simples.

Etude de l'espace. Symétrie des figures de l'espace et des figures planes. Etude, par le moyen de constructions, des paramètres déterminant complètement une figure plane (à la place des démonstrations d'égalité). Applications variées à des mesures en classe, et, si possible, en plein air. Triangles, quadrilatères, polygones (principalement réguliers); cercles. Les prismes droits, pyramides, cylindres et sphères qui s'y rattachent. On étudiera la sphère conformément aux exigences de l'enseignement de la géographie qui se fait en même temps. Déplacement des figures (leurs transformations de forme et de grandeur résultant de la variation des paramètres.

Dessin géométrique (2 heures consécutives par semaine). Exercices continuels dans l'emploi des instruments de dessin. Problèmes de constructions corrélatifs de l'étude de l'espace, applications également au dessin d'ornements géométriques simples.

3me classe, 5 heures par semaine (comprenant l'arithmétique, la géométrie et le dessin géométrique).

Eléments d'arithmétique générale (Algèbre, Réd.) faisant suite à l'ensei-

gnement du calcul ; énoncés des règles de calcul et représentation de ces règles à l'aide de lettres, transformations les plus simples, exercices de substitutions (fréquentes preuves des opérations générales par la substitution de chiffres spéciaux dans les données et les résultats). Nombres négatifs dans les applications non artificielles les plus simples (thermomètre, baromètre, niveau d'eau, échelle des nombres).

Relations entre les surfaces (comparaisons, transformations les plus simples, formules de mesure), volume du prisme droit et du cylindre. Mesures et comparaisons des objets de la classe, du jardin d'école et, si possible, opérations analogues en plein air. Théorème de Pythagore avec d'abondantes démonstrations intuitives et applications aux figures planes et aux figures de l'espace les plus simples (par exemple diagonale du cube, hauteur de la pyramide régulière à base carrée). Pyramide (cône), sphère ; surface et volume de ces corps (sans démonstration de ces formules pour la sphère).

Nombreuses liaisons de l'enseignement arithmétique et géométrique. Représentation graphique des quatre opérations par des droites, des expressions $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $(a + b)(a - b)$, $(a + b)^3$, etc., par le moyen de rectangles et de cubes. Extraction de la racine carrée et de la racine cubique en vue des calculs de géométrie plane et de l'espace. Opérations abrégées. Estimation du degré d'exactitude à atteindre, basée sur la mesure effective des paramètres de détermination. Estimation de l'ordre de grandeur du résultat, comparaison des résultats de l'évaluation et du calcul par des mesures et pesées de modèles. Nouvelles occasions de développer la notion de fonction : variation des longueurs, surfaces et volumes des figures et corps semblables comme la première, seconde et troisième puissance, ou comme la racine carrée et cubique des paramètres de détermination (cela par des considérations indirectes et le dessin à la nouvelle échelle). Equations les plus simples en tant qu'elles sont nécessaires aux calculs de géométrie plane et de l'espace de cette classe.

Dessin géométrique (2 heures consécutives par semaine). Continuation et développement des exercices de la 2me classe.

4me classe, 4 heures par semaine.

Algèbre. Explication des lois concernant les opérations et de leurs relations, exercices de transformations appliquées surtout à la résolution d'équations, y compris les preuves par la substitution des résultats (numériques et algébriques) dans les équations primitives. Comme application à la notion de fonction on fera observer la variation des résultats obtenue par le changement des éléments de calculs. Etude plus approfondie du système décimal et exercices les plus simples sur d'autres systèmes. Mesures, multiples, fractions ; équations du premier degré à une et plusieurs inconnues ; rapports, proportions ; équations du second degré en tant qu'elles sont nécessaires à l'enseignement de la géométrie plane. Représentation graphique de la fonction linéaire et son utilisation à la résolution des équations du premier degré.

Géométrie plane (jusqu'à la congruence et ses applications y comprises). Répétition et développement du champ précédent, avec explication des définitions et démonstrations d'Euclide qu'on appliquera à des exemples caractéristiques, le reste du champ se traitera surtout sous forme de problèmes. Résolution de problèmes de construction d'après diverses méthodes générales (aussi par le moyen de constructions algébriques) à l'exclusion de tous

les problèmes ne se résolvant qu'à l'aide d'artifices. Problèmes de calcul concernant le reste du champ d'étude.

5me classe, 4 heures par semaine.

Algèbre. Puissances et racines appliquées à des exemples non artificiels. Equations du deuxième degré à une inconnue (et les plus simples à plusieurs inconnues). Equations de degrés supérieurs les plus faciles qui se ramènent sans artifice à celles du deuxième degré. Nombres irrationnels, imaginaires et complexes, en tant que la résolution de ces équations y conduit. Représentation graphique de la fonction du deuxième degré et son application à la résolution des équations du deuxième degré. Logarithmes.

Géométrie plane. Suite et fin du programme de la 4me classe.

Géométrie dans l'espace : Propriétés fondamentales de l'angle solide en général et de l'angle trièdre en particulier (angle polaire). Propriétés, surface et volume du prisme (cylindre), de la pyramide (cône), de la sphère, de leurs sections planes et de leurs volumes tronqués. Théorème d'Euler, polyèdres réguliers.

6me classe, 1er semestre 4 heures, 2me semestre 3 heures par semaine.

Algèbre : Equations logarithmiques et exponentielles les plus simples. Progressions arithmétiques (du premier ordre), progressions géométriques, applications de ces dernières principalement au calcul des intérêts composés et des rentes.

Goniométrie, trigonométrie plane et sphérique : Les fonctions trigonométriques, leur représentation graphique, utilisée spécialement pour faire saisir les propriétés et relations de ces fonctions. Résolution des triangles. Comparaison continuelle des théorèmes et méthodes de la trigonométrie avec ceux de la géométrie plane et de l'espace. Principes de la trigonométrie sphérique, en se bornant aux relations et formules qui interviennent dans les applications du reste du champ (en ce qui concerne le triangle quelconque, principalement la loi des sinus et celle du cosinus). Diverses applications de la trigonométrie aux problèmes d'arpentage, de géographie, d'astronomie, etc., dans lesquels les paramètres de détermination seront autant que possible mesurés par les élèves eux-mêmes.

7me classe, 5 heures par semaine.

Algèbre : Permutations, arrangements, combinaisons dans les cas les plus simples. Binôme de Newton pour un exposant positif entier. Premières notions du calcul des probabilités avec applications aux problèmes les plus simples de l'assurance sur la vie.

Géométrie analytique : Se relie aux représentations graphiques faites précédemment de quelques fonctions données. Application de la méthode analytique aux lignes du premier et du deuxième degré et, à l'occasion, indication des procédés géométriques appliqués aux mêmes figures.

Etude plus approfondie des exercices de différentiation et d'intégration les plus simples du champ de mathématiques et de physique. Solutions approchées d'équations algébriques (et à l'occasion d'équations transcendantes très simples) par des méthodes graphiques.

Revision générale du domaine entier de l'enseignement mathématique, principalement des équations et des progressions, de la stéréométrie, trigonométrie et géométrie analytique. Développement plus approfondi de certains sujets. Applications sur les différents domaines de l'enseignement et de la vie pratique plutôt que des problèmes purement formalistes.

Considérations historiques et philosophiques.

Travaux écrits : Dans toutes les classes trois épreuves par semestre, en outre, petits exercices à faire à la maison entre les leçons. Dans le cas où la leçon suivante a déjà lieu le lendemain, on supprimera ces tâches dans les classes inférieures ; dans les classes supérieures également, à moins qu'il n'y ait une après-midi de libre entre deux. Au besoin exercices faits et corrigés en classe.

Observations.

Principales tendances du programme précédent :

1. Adaptation au développement intellectuel réel des élèves.
2. Simplification du champ d'étude par la liaison des branches ayant des relations les unes avec les autres, spécialement l'arithmétique et la géométrie.
3. Adaptation du programme de mathématiques aux branches correspondantes et aux applications de la vie réelle.
4. Assimilation de l'idée de fonction en utilisant toutes les occasions qui se présentent dans l'enseignement mathématique jusqu'à l'étude de la variation d'une fonction à l'aide du quotient différentiel.
5. Développement de l'intuition géométrique, facilité par les travaux manuels des élèves (construction de modèles, mesures, etc.).
6. On laissera de côté toute matière surannée ou reconnue comme inutile au point de vue didactique.

L'ensemble de l'enseignement mathématique a été conçu de façon que l'enseignement des trois premières classes constitue une étude préparatoire des nombres jusqu'aux débuts du calcul littéral, ainsi qu'une étude préparatoire de l'espace à l'aide de représentations géométriques mises en valeur par leurs applications dans les autres branches (géographie, histoire naturelle, etc.) et dans la vie ordinaire. L'enseignement de ces classes a pour but aussi de familiariser les élèves avec l'emploi du langage arithmétique et géométrique (en omettant cependant les définitions formelles prématurées).

A partir de la quatrième classe, on s'occupera de la liaison scientifique des notions et propositions individuelles de l'arithmétique et de la géométrie (en évitant toutefois une représentation purement déductive). On développera également peu à peu la notion de fonction et ses applications.

Quelques remarques sont encore à faire relativement à chaque classe particulière.

Déjà à partir de l'enseignement du calcul des deux premières classes, on exigera cette sûreté dans le calcul des nombres dont le besoin se fait sentir également dans les degrés supérieurs de l'enseignement mathématique. Les principes de calcul devront s'acquérir par des exemples simples sur de petits nombres, puis on se perfectionnera dans le calcul mécanique par l'emploi de nombres un peu plus grands ; après quoi le calcul sur les plus grandes valeurs se fera sans difficulté dans la troisième classe à l'aide du calcul des puissances (base 10).

On n'introduira pas le calcul abrégé avant la troisième classe, car ce n'est qu'à partir de cette classe qu'on lui trouve des applications. L'élève pourra alors aussi souvent que possible mesurer les paramètres de détermination (côtés de l'angle droit, diamètre du cercle, etc.) sur des figures dessinées par lui-même ; il pourra se faire une idée de l'exactitude souvent peu considérable des grandeurs données et calculées et sur la possibilité de négliger des décimales en tenant compte du degré d'exactitude à atteindre.

Les rapports et proportions ne deviennent utiles qu'à partir de la planimétrie de la cinquième classe ; il suffira donc qu'on traite quelques-unes de leurs propriétés dans l'enseignement de l'arithmétique de la quatrième classe et que l'on s'occupe en particulier des proportions dans l'étude des équations. Par contre, un tel besoin ne se fait pas sentir en ce qui concerne le programme de la seconde classe dans laquelle les calculs simples et composés qui s'étudient à la fin de l'année permettront d'arriver aux résultats d'une façon plus simple et plus claire que si l'on passe par les proportions.

L'étude de l'espace de la troisième classe conduit aux prismes droits et cylindres correspondant aux figures planes. Il sera bon de déterminer les surfaces calculées par les pesées des prismes droits et cylindres qui leur correspondent et inversement de mesurer directement sur ces modèles les paramètres de détermination nécessaires aux calculs de ces surfaces.

L'enseignement de l'arithmétique de la quatrième classe renonce complètement à la soi-disant introduction scientifique de l'arithmétique. On la remplacera avantageusement en considérant les relations qui existent entre les diverses opérations par la résolution des équations de détermination, cette résolution devant être faite d'abord par le retour aux opérations inverses puis par transposition mécanique. De semblables applications permettront aux élèves de saisir beaucoup plus facilement les nombreuses relations logiques des principes et des lois de l'arithmétique que ne sauraient le faire des abstractions prématurées.

La géométrie plane de la quatrième et de la cinquième classe devra se traiter d'une façon analogue, les démonstrations rigoureuses ne devront se faire que pour un petit nombre de théorèmes, en faisant sentir à l'élève le besoin logique d'une telle démonstration. Mais, pour la plupart des autres théorèmes, il suffira de signaler à l'élève la raison de la justesse de la proposition sans insister, spécialement pour ceux qui lui paraissent plus ou moins évidents (comme la relation de l'angle au centre et de l'arc compris et beaucoup d'autres). Dans tous les cas, on évitera soigneusement d'obscurcir les vérités géométriques par un pur formalisme.

Les principes et lois concernant la position réciproque des droites et plans se traiteront dans l'enseignement de la géométrie descriptive (en partie aussi dans le cours préparatoire) et non dans l'enseignement systématique de la stéréométrie. Si l'on renonce aussi à traiter en détail la congruence et la symétrie des trièdres, une fois que les élèves auront fait usage des connaissances acquises dans un enseignement précédent (spécialement dans la géométrie descriptive) le programme de la stéréométrie de la cinquième classe pourra se faire sans aucune hâte en un semestre, d'autant plus que l'enseignement de la trigonométrie prévoit de nombreuses applications stéréométriques. Mais l'enseignement sera considérablement simplifié lorsque l'on tiendra compte davantage des liens étroits qui unissent la stéréométrie et la géométrie descriptive ; cela permettra d'éviter de nombreuses répétitions.

On consacrera une année entière à la goniométrie et trigonométrie, étude qui présente aussi de nombreuses applications de géométrie plane et de l'espace. Par contre, il ne faudra pas s'égarer dans des transformations goniométriques compliquées ou dans des problèmes trigonométriques se résolvant à l'aide d'artifices.

L'introduction des fonctions trigonométriques devra se faire à l'aide de problèmes pratiques de planimétrie, en particulier sur le triangle rectangle,

en se bornant tout d'abord à l'angle aigu. Après avoir acquis les formules fondamentales, on les appliquera immédiatement à la résolution du triangle rectangle; après cela seulement on continuera la géométrie. En ce qui touche aux calculs numériques, on fera bien de s'en tenir tout d'abord aux valeurs naturelles des fonctions (dont quelques-unes se trouvent à l'aide de certains triangles rectangles) et de n'utiliser les logarithmes de ces fonctions que pour les problèmes qui exigeraient autrement des calculs compliqués.

Le programme de trigonométrie sphérique devra se relier d'une façon plus effective aux notions et considérations sur l'angle solide et la sphère étudiés en stéréométrie. Ce programme sera compris dans celui de la trigonométrie ordinaire en relation avec l'étude du triangle plan (en partie aussi avec celle du triangle rectangle). On insistera beaucoup plus sur les moyens d'acquérir une grande sûreté dans la résolution des questions de stéréométrie sphérique, plutôt que sur l'acquisition de formules mnémoniques compliquées dont l'emploi ne serait avantageux que dans des problèmes qui dépassent le cadre de l'activité scolaire. On se contentera du principe des sinus et de celui du cosinus, et si parfois l'élève est obligé de recourir à un détour pour arriver à la solution d'un problème, il y a cependant une moins grande dépense de force et de temps que s'il fallait acquérir tout cet appareil de formules.

Dans l'étude des puissances et des racines il suffira d'indiquer les quelques principes simples qui justifient les formules en évitant les démonstrations étendues des différents théorèmes.

L'étude de la fonction logarithmique se fera d'une façon plus commode par la représentation graphique plutôt que par les tables. A côté du point de vue théorique, il faut insister sur l'utilité des logarithmes dans le calcul et l'habile emploi des tables (à cinq ou à quatre décimales).

Quoique dans le programme on ne signale que l'étude des fonctions qui se rencontrent dans l'enseignement mathématique proprement dit, on s'occupera également des fonctions empiriques qui se présentent particulièrement dans l'enseignement de la physique, et de leur représentation graphique à l'aide de courbes (surfaces). Les élèves se rendront compte ainsi du rôle des mathématiques dans les phénomènes naturels

L'étude de la géométrie analytique se trouve préparée dans une large mesure par les représentations graphiques des fonctions faites précédemment ; de sorte qu'il ne s'agit tout d'abord que d'une récapitulation générale. On pourra par suite consacrer une plus grande attention aux sections coniques, d'autant plus que cette étude se lie naturellement aux représentations graphiques concernant les équations du second degré.

Le programme du degré supérieur comprend un nombre relativement restreint de sujets nouveaux et une revision générale de tout le domaine des années précédentes. Cette revision ne doit pas seulement constituer une sorte d'appendice ; la récapitulation de l'arithmétique, par exemple, se fera sous forme d'une étude générale des équations avec les représentations graphiques qui y correspondent. Puis, à l'occasion de la répétition des progressions, on introduira la théorie du binôme et des combinaisons qui s'y rattache. Le repassage de la géométrie analytique se fera à un point de vue général en la considérant comme une extension des relations de l'arithmétique et de la géométrie, relations déjà rendues familières aux élèves par les représentations graphiques.

Il faut recommander dans toutes les classes le calcul mental, l'évaluation des relations de grandeurs et le calcul avec des nombres particuliers. Pour

permettre aux élèves d'acquérir une certaine habileté dans le calcul, il est utile que les maîtres des différentes branches s'entendent pour adopter un langage et des notations uniformes.

Dans les degrés inférieurs, il faut absolument laisser de côté les définitions formelles des notions premières des mathématiques, même dans les degrés moyens et supérieurs on devra procéder avec une grande précaution surtout pour les notions tout à fait générales et primitives comme la droite, le nombre, la grandeur. On se rendra beaucoup mieux compte si l'élève a bien saisi la portée de ces notions par l'usage qu'il en fera dans de nombreuses applications plutôt qu'en lui faisant répéter des définitions apprises.

On voit que les observations précédentes combattent vivement tout formalisme exagéré dans l'enseignement mathémathique ; elles s'adressent aussi tout spécialement à la façon d'introduire dans l'enseignement le quotient différentiel. Il ne s'agit nullement de la différentiation systématique des fonctions élémentaires. Ces premiers principes de différentiation (et d'intégration) doivent se faire principalement sous forme d'applications sur ce qui s'est fait précédemment ; on ne devra pas les présenter comme quelque chose de tout à fait nouveau, d'autant plus que l'élève s'en est déjà fait une première idée, comme par exemple dans l'enseignement de la physique à propos de la vitesse et de l'accélération. Il ne faut donc pas considérer ce chapitre comme une nouvelle charge pour l'élève, mais comme un moyen d'approfondir, et par cela même de simplifier le champ précédent.

Le choix approprié des problèmes est d'une importance capitale sur les résultats de l'enseignement mathématique. Des problèmes trop difficiles ou trop faciles pourront nuire à ces résultats et l'on devra éviter tout spécialement tous les exemples purement formalistes, les opérations compliquées, les constructions et calculs de triangles dont les paramètres de détermination sont peu commodes, la résolution d'équations à l'aide d'artifices, etc.

Les problèmes à traiter sont bien plutôt ceux qui touchent aux différentes branches de l'enseignement et qui se présentent dans la vie courante.

On consacrera deux heures par semaine au dessin géométrique dans la deuxième et la troisième classe. On cherchera avant tout à acquérir une grande habileté au dessin, ce qui est très important également pour la géométrie descriptive des degrés supérieurs. Les résultats dépendent en grande partie du choix des exercices. Pour le texte on emploiera l'écriture ronde et pour les figures les caractères d'imprimerie.

En ce qui concerne le temps à consacrer à l'arithmétique et à la géométrie, on s'arrangera à ce que l'étude de l'espace dans la première classe débute quatre semaines après le commencement de l'année scolaire. A partir de ce moment jusqu'à la fin de la quatrième classe on consacrera une heure par semaine à la géométrie ; à partir de la cinquième classe, le temps se partagera également entre l'arithmétique et la géométrie, ordinairement d'une façon alternative. Dans la deuxième et la troisième classe le dessin géométrique doit être enseigné par le maître de mathématiques tout en étant considéré comme une branche à part.

Dessin géométrique[1] et Géométrie descriptive.

Degrés inférieurs.

But de l'enseignement : Habileté dans le dessin linéaire et dans l'exécution des problèmes de constructions géométriques ; représentation d'objets simples par projections.

2me classe, 2 heures par semaine, en corrélation avec le calcul et l'étude de l'espace, v. le programme de mathématiques.

3me classe, 2 heures par semaine, en corrélation avec l'arithmétique et la géométrie, v. le programme de mathématiques.

4me classe, 3 heures par semaine.

Représentation des sections coniques en se basant sur les propriétés de leurs foyers. Tangentes en un point sur la courbe et par un point extérieur. Relations de position. Dessin de la base et de l'élévation de corps simples dans des positions particulières relativement aux plans de projection et en cherchant à développer le côté intuitif. Familiarisation des notions de projections horizontales et verticales de points, lignes, etc. Détermination de la longueur et de l'inclinaison de droites et de la forme de figures rectilignes situées dans les plans de projection. Représentation de corps polyédriques dans des positions successives après rotation. Elévation et projections obliques de ces corps ; constructions simples concernant leurs ombres (ombre au soleil).

Degrés supérieurs.

But de l'enseignement : Connaissance des principales lois et des principaux théorèmes de la méthode des projections orthogonales et des principes fondamentaux de la projection oblique et de la perspective y compris leurs applications à la représentation d'objets techniques simples.

5me classe, 3 heures par semaine.

L'enseignement est étroitement lié à celui de la 4me classe ; exécution systématique des principaux problèmes de géométrie descriptive sur le point, la droite et le plan au moyen des projections verticale et horizontale, et d'autres projections latérales. Application de ces constructions à la résolution de divers problèmes, en particulier à la représentation de prismes et pyramides réguliers de forme et position données avec leurs ombres ; à l'obtention des sections planes, de prismes, pyramides et d'autres corps à surfaces planes ; intersection de ces corps et détermination du solide commun dans les cas les plus simples.

6me classe, 3 heures par semaine.

Représentation du cercle en projection normale, ombre portée sur des plans dans le cas de l'ombre au soleil. Projection oblique du cercle. Principales propriétés constructives de l'ellipse considérée comme projection normale ou oblique du cercle, déduites des propriétés correspondantes du cercle. Représentation de cylindres et de cônes (principalement de cylindres et cônes de révolution) et d'autres corps composés, également en projections obliques. Plans tangents aux surfaces coniques et cylindriques. Sections planes, réseaux et cas simples de pénétration de ces surfaces. Construction

---

[1] Plus exactement : dessin géométrique dans les classes inférieures (Unterrealschule), géométrie descriptive dans les degrés supérieurs (Oberrealschule).

d'ombres dans le cas de l'ombre au soleil. Etude plus approfondie des sections planes du cône de révolution ; déduction des propriétés constructives les plus importantes de ces sections.

Représentation de la sphère, de ses sections planes et de ses plans tangents ; construction de la limite de l'ombre propre et de l'ombre portée sur des plans dans le cas de l'ombre au soleil et de l'ombre au flambeau.

7me classe, 2 heures par semaine.

Représentation des surfaces de révolution dont les axes sont perpendiculaires à l'un des plans de projection, plans tangents et section plane.

Les notions fondamentales de la perspective, autant qu'elles sont nécessaires à la représentation d'un objet à surfaces planes donné par ses projections normales.

Répétition et achèvement du programme de géométrie descriptive à l'aide de problèmes généraux présentant également un intérêt pratique.

A partir de la 4me classe petits exercices à la maison (sur cahier) de semaine à semaine.

Observations.

a) *Remarques générales.*

Ce programme de l'enseignement de la géométrie descriptive nous montre que l'on cherche non seulement à développer une certaine habileté de construction, indispensable aux études des écoles supérieures techniques, mais surtout une connaissance approfondie des représentations de l'espace, nécessaire non seulement dans les écoles supérieures, mais aussi dans la vie pratique. On atteindra ce but en insistant davantage sur la représentation des corps et en rattachant les problèmes de construction à cette représentation. On ne se bornera pas seulement à considérer les principales formes que l'on traite en stéréométrie, mais on s'occupera également des formes de corps présentant un caractère technique. La géométrie descriptive dans l'enseignement des écoles réales doit être plus qu'une simple méthode de résolution des problèmes purement théoriques de la stéréométrie ; il faut surtout que les élèves se rendent compte de la valeur de cette branche en ce qui concerne la vie pratique.

Pour la réalisation de ce but il est nécessaire d'insister sur la représentation intuitive de l'espace et non pas sur ce que les élèves apprennent par cœur diverses méthodes de construction. Il n'y a qu'un petit nombre de constructions fondamentales, qui interviennent fréquemment, comme la détermination de la longueur d'une droite, le rabattement d'un plan, etc., sur lesquelles on s'arrêtera davantage ; on cherchera à les exécuter de la façon la plus rapide et avec le moins grand nombre de lignes possible. Pour les autres constructions on laissera une plus grande liberté à l'élève qui pourra même choisir une méthode plus longue pourvu qu'elle conduise au résultat voulu.

Chaque construction doit être accompagnée d'explications concernant la figure de l'espace correspondante. En procédant ainsi l'élève se rendra compte peu à peu que c'est la figure de l'espace qui joue le rôle essentiel.

Il faut accorder une grande attention à l'enseignement du dessin, étant donné surtout le peu d'heures dont on dispose. Le maître cherchera à perfectionner ses élèves dans l'emploi des instruments de dessin, de la règle et de l'équerre à dessiner et prêchera aussi par l'exemple. Il faut recommander tout spécialement que le maître exécute ordinairement lui-

même les figures au tableau noir, aussi bien et aussi exactement que possible, à l'aide de l'équerre et du compas. Le dessin à main levée des figures sur le tableau noir doit être évité autant que possible. L'élève doit en effet se rendre compte que ces figures ne sont pas seulement une simple représentation des figures de l'espace comme celles qui sont destinées à la démonstration des théorèmes de géométrie, mais que les résultats en ce qui concerne leur forme et leurs dimensions présentent une grande importance, et que de tels dessins remplacent souvent des calculs compliqués ou même impossibles à exécuter. La considération de l'échelle de réduction, suivant laquelle les objets réels sont représentés, contribuera à développer cette idée. Par des exercices de dessin, on développera le travail individuel.

Afin d'exposer son sujet d'une façon claire, le maître ne fera usage que d'expressions facilement compréhensibles et présentant vraiment une utilité directe. La question des notations a également son importance, il faudra s'entendre à ce sujet avec les maîtres de mathématiques, les deux branches présentant de nombreux points communs.

b) — *Remarques particulières.*

4[me] **classe.** Pour faire concevoir aux élèves les notions de plan et d'élévation, on placera un parallélipipède droit, l'une des faces parallèle au sol, l'autre au tableau noir, et on le fera dessiner par chaque élève, dans la position où il le voit, puis comme le verrait un élève placé au fond de la classe, puis, enfin, comme il serait vu d'un élève placé à une très grande distance et regardant perpendiculairement au tableau noir. On supposera le corps transparent. De cette façon, l'élève arrive à considérer l'élévation d'un corps comme son image, telle que la verrait un observateur placé à une très grande distance du tableau et regardant perpendiculairement à ce tableau. On procédera de la même façon pour la notion du plan. On fera exécuter ensuite les projections de prismes et pyramides et de corps composés de prismes et de pyramides, puis de cylindres et cônes de révolution et de sphères dans les positions les plus simples relativement aux plans de projection en utilisant au besoin des modèles. On obtiendra de cette façon les propositions les plus simples relatives aux projections des droites et des surfaces. Ce n'est que lorsque les élèves auront acquis une sûreté suffisante dans l'exécution de ces dessins intuitifs qu'on les initiera à leur conception purement géométrique, en remarquant que les dessins géométriques ne correspondent jamais exactement aux objets tels qu'on les observe.

On obtiendra la rotation d'un corps autour d'un axe perpendiculaire à l'un des plans de projection (ainsi qu'un déplacement parallèle à l'un de ces plans) en utilisant la loi sur les distances d'un point aux plans de projection. En répétant cette rotation deux ou trois fois en se servant alternativement d'axes perpendiculaires aux deux plans de projection, on pourra faire occuper à un corps une position quelconque relativement à ces plans et obtenir ainsi une représentation du corps qui permet d'en concevoir facilement la forme.

On obtiendra le même résultat au moyen de projections latérales, c'est-à-dire par des projections normales sur des plans perpendiculaires aux plans de projection primitifs. Par ce procédé, l'élève apprend en outre un important principe de construction qui lui servira pour la résolution de problèmes ultérieurs. Du reste, il faut, dès à présent, habituer les élèves à considérer les projections verticale et latérale comme un système de projections normales au même titre que les projections verticale et horizontale.

Un excellent moyen pour donner aux élèves une représentation claire d'un corps donné par un système de projections orthogonales, c'est de le leur faire dessiner en projection oblique. Supposons le corps, ou le système d'axes trirectangles qui lui correspond, placé tout d'abord parallèlement aux plans de projection ; pour en obtenir une projection oblique, il suffira de savoir que les arêtes parallèles se projettent parallèlement et sont réduites dans le même rapport. Que le maître n'hésite pas non plus à faire exécuter des dessins au moyen de l'axonométrie oblique générale, pour lesquels la représentation des axes et les rapports de réduction sont choisis arbitrairement. Il va sans dire qu'à ce propos on ne s'arrêtera pas sur la démonstration du théorème de Pohlke qui justifie ce procédé. L'élève apprendra ainsi à connaître la façon d'obtenir ces figures explicatives qui sont d'un emploi si fréquent dans les différentes branches de l'enseignement.

On appliquera aussi les projections latérales et obliques et les tracés des ombres à des objets techniques simples.

Les notions et propositions de la stéréométrie qui sont nécessaires à l'étude des projections trouveront également place dans le programme de cette année. Il ne faut cependant pas rester trop longtemps sur la partie concernant les relations de position des droites et plans, l'intérêt des élèves pourrait en souffrir. Il est bien préférable d'étudier d'abord les corps de l'espace où de telles relations interviennent et de faire sentir ensuite la nécessité d'une définition exacte de ces relations. Il ne faudra cependant en aucune façon introduire ces notions et propositions tout d'une traite, mais on les présentera à mesure que leur utilité se fera sentir.

5me classe. C'est dans cette classe que se fait l'introduction systématique à la géométrie descriptive ; au début, on s'appuiera constamment sur le travail de la 4me classe, puis on passera peu à peu à une façon de procéder plus abstraite. On ne s'arrêtera donc pas trop longtemps, pour commencer, aux diverses positions du point dans les quatre dièdres.

On considérera la construction des traces d'une droite comme un cas particulier de l'intersection d'une droite et d'un plan projetant (donné par une trace). Les plans non projetants se détermineront par deux droites quelconques, ou par un triangle ou par un parallélogramme plutôt que par leurs traces, et les constructions s'exécuteront par le moyen des principales du plan (lignes de niveau et lignes de front) et non par les traces. Cette manière de représenter un plan est plus intuitive que si l'on se sert des traces, elle conduit moins facilement à des confusions et se rattache au dessin technique pratique dans lequel on n'emploie pour ainsi dire pas les traces.

En ce qui concerne les chapitres sur les relations des points, droites et plans, on se bornera à traiter en détail les problèmes fondamentaux d'une façon aussi claire que possible et l'on considérera les autres problèmes comme exercices sans pousser trop loin l'examen des cas particuliers. Une fois les problèmes fondamentaux résolus, on en montrera immédiatement les applications concernant les corps à surfaces planes qui ne seront pas traités séparément. Par l'emploi de projections latérales on simplifiera considérablement la résolution de beaucoup de problèmes. Il est préférable de ne pas traiter les trièdres dans cette classe. On répétera et l'on complétera les propositions de stéréométrie nécessaires au fur et à mesure qu'elles interviendront.

7me classe. Dans cette classe on s'occupera des compléments suivants : Propositions principales de la projection cotée, si on ne les a pas déjà trai-

tées dans la 5me classe ; examen de quelques applications pratiques, les trièdres (en employant l'angle polaire) et résolution graphique des triangles sphériques ; principes concernant la représentation axonométrique orthogonale des corps et la projection stéréographique, exécution de la vis.

Comme applications utiles, il faut recommander la construction de cadrans solaires et la représentation orthogonale des sphères terrestre et céleste avec leurs principaux cercles, l'axe n'étant pas vertical.

II. — L'enseignement mathématique dans les écoles réales

d'après le Rapport[1] destiné à la Commission internationale de l'enseignement mathématique.

Nous croyons intéresser nos lecteurs en résumant à cette place le rapport que la sous-commission autrichienne vient de consacrer aux écoles réales. Ces établissements sont soumis à un nouveau plan d'études dont nous avions déjà préparé la traduction ci-dessus.

Le rapport est divisé en trois parties A, B et C.

A. But de l'enseignement mathématique. Branches d'étude.

L'*Introduction* donne un aperçu rapide des transformations qu'a subi l'Ecole réale, depuis sa fondation (1851), sous l'influence des besoins de l'industrie. Dans les conditions actuelles des écoles réales l'enseignement mathématique a pour but la pratique des mathématiques élémentaires, y compris la notion de fonction, comme préparation aux écoles supérieures ; il ne doit pas avoir en vue une culture spéciale, mais contribuer au développement général de l'esprit par la science.

Les programmes actuels, du 8 avril 1909, qui remplacent ceux de 1899, présentent les tendances suivantes :

1. Adaptation au degré de développement des élèves.
2. Simplification des cours par un contact plus étroit entre les différentes branches, spécialement pour tous les degrés entre l'arithmétique et la géométrie.
3. Adaptation complète des études mathématiques aux branches d'enseignement correspondantes et aux divers domaines d'application de la vie courante.
4. Compréhension des relations fonctionnelles développées par l'enseignement mathématique.
5. Culture de la représentation de l'espace étayée sur une activité manuelle correspondante (confection de modèles, mesurages, etc.)
6. Suppression des matières surannées ou reconnues sans intérêt didactique, des détails insignifiants et de maintes répétitions, renvoi de parties détachées dans le programme (voir « *Remarques* » au sujet du plan normal d'étude de 1909). Les tâches ont été simplifiées et trois devoirs imposés par semestre (auparavant quatre). Les dispositions au sujet des tâches à faire à la maison données d'une leçon à l'autre n'ont pas changé.

---

[1] *Der mathematische Unterricht an der Realschule* von Schulrat Franz Bergmann (Olmütz). Berichte über den mathematischen Unterricht in Oesterreich. Heft 1.

B. Méthodes de l'Enseignement mathématique.

Méthode de l'enseignement de l'arithmétique. — Outre les nombreux ouvrages traitant de la méthode d'enseignement des mathématiques, le professeur trouvera des directions très sûres et des instructions didactiques dans la publication parue à l'occasion du « projet d'organisation des gymnases et écoles réales autrichiens » de l'année 1849 (voir les normes pour les gymnases et les écoles réales d'Autriche par le Dr v. Marenzeller, Ier et IIme volumes), puis dans les *Instructions pour l'enseignement dans les écoles réales en Autriche*, parues avec les programmes d'étude des années 1879 et 1899. Ces instructions renferment des avis précieux au sujet de l'enseignement dans toutes les branches. Elles contiennent des remarques préparatoires sur l'objet et le but de cet enseignement, sur le programme en général, sur les examens, sur les devoirs à faire à la maison et à l'école, sur les manuels ; elles expliquent dans une partie spéciale les matières d'instruction décrites sommairement dans le plan d'étude et donnent des indications didactiques pour leur mise en pratique. Ce ne sont pas des normes fixes, invariables, restreignant l'individualité du professeur ; « elles n'ont pas pour but de régler en quoi que ce soit la marche de l'enseignement ou de limiter le professeur éprouvé dans le champ de son expérience ». Le maître trouvera des conseils qui lui permettront d'éviter des tâtonnements et des erreurs. Les principes du nouveau programme d'étude des écoles réales ont été expliqués par des « remarques » spéciales et complètent ainsi en partie les instructions de l'année 1899.

Les « *Instructions pour l'année 1899* » et les « *Remarques au sujet du programme normal d'études de 1909* » (reproduites plus haut) constituent la base de l'exposé des méthodes dans le rapport de M. Bergmann.

Le manuel et le livre d'exercices. — L'enseignement de l'arithmétique et de la géométrie est présenté d'après un manuel clair et méthodique. Celui-ci est cependant peu employé dans les leçons. En suivant l'exposé à la planche noire, chaque élève reproduit dans un cahier tous les théorèmes, les règles et les exemples énoncés. Ce cahier, dont la tenue est contrôlée, constitue la base de l'enseignement dont il est la fidèle reproduction.

Dans les classes inférieures, le manuel est surtout un livre d'exercices avec des notions concises et de courtes règles. Plus scientifique dans les classes supérieures, il contient tous les théorèmes et les exercices nécessaires, l'élève consultera à toute occasion ce guide pratique.

Exercices à domicile. — Ce sont des exercices qui doivent être à la portée de tous les élèves ; ils se donnent d'une leçon à l'autre d'après les problèmes faits en classe. Au début de la leçon, le professeur parcourt et vérifie quelques-uns des cahiers d'exercices ; il interroge plusieurs élèves, soit en leur demandant des résultats, soit en leur faisant résoudre à la planche noire l'exercice avec d'autres données.

Modèles pour l'enseignement géométrique. — L'observation et le modèle sont à la base de l'enseignement du degré inférieur. Un cube d'environ 25 cm. de côté sert pour la théorie des formes, comme point de départ de l'enseignement par les yeux ; il pourra être constitué par des bâtons en bois et un carré de carton. Le compas et le livre de classe donnent l'angle dans le plan ou l'espace. Les divers triangles, quadrilatères, polygones, cercles et secteurs avec les hauteurs, diagonales, lignes de symétrie et dia-

mètres sont faits avec des planchettes découpées, utilisées à l'instar d'une carte muette de géographie. Des modèles de pyramides et de prismes (hauteur d'environ 30 cm.); de la pyramide tronquée à 4 côtés avec son complément, du cylindre et du cône circulaires et de leurs dérivés, du cône tronqué avec son complément, de la sphère, de la demi-sphère, des sections, segments et secteurs de sphère.

Des modèles en bois ou en fil de fer pour la IIme classe représentent 2 points, 2 lignes ou 2 triangles symétriques par rapport à une droite ou un plan, le cube, le prisme carré, la pyramide carrée avec leurs plans symétriques, enfin la sphère avec équateur, parallèles et méridiens. Le trièdre et son origine, les angles congruents, les pyramides et prismes droits et obliques, les cônes et cylindres ainsi que les polyèdres réguliers sont représentés par des modèles en carton ou en bois.

Dans la IIIme classe, on utilise par exemple des modèles pour des figures équivalentes en surface, telles que les parallélogrammes, triangles, trapèzes, rectangles; pour le théorème de Pythagore; pour le principe de Cavalieri; pour la formule du cube des pyramides par la décomposition du prisme à 3 côtés; pour la surface du carré, pour le volume d'un cube dont ou double ou triple le côté ou la face. Dans les classes supérieures, les modèles sont remplacés par la perspective et les projections. Pour la trigonométrie sphérique on utilise un grand globe sur lequel on peut dessiner à la craie. Les appareils des collections réservées à l'enseignement de la physique servent aussi pour la représentation des problèmes d'astronomie.

C. Examens.

Examen d'entrée. — C'est le premier examen qu'a à subir le garçon de 10 ans en entrant à l'école réale.

L'examen de calcul écrit et oral comprend les nombres (écriture et lecture), les quatre opérations fondamentales avec nombres entiers ou décimaux simples.

Examens d'orientation et de classement. — L'administration de l'enseignement public a publié, par *ordonnance du 11 juin 1908, des prescriptions pour un nouveau règlement des examens* dans le but de simplifier les épreuves et les classifications.

Les examens imposés dans les écoles moyennes sont ceux d'« orientation » et de « classement ». Le but principal des premiers est le travail en commun, par le professeur et les élèves, des matières enseignées. L'examen d'orientation permet de revoir attentivement les diverses leçons, de les considérer à plusieurs points de vue, de les relier entre elles et de les répéter concurremment.

L'examen de classement par contre, *passé après étude complète d'un sujet*, permet au professeur de juger des connaissances acquises par l'élève, surtout au point de vue scientifique.

L'examen de maturité. — Le principal but de cet examen est la preuve de la maturité et du développement suffisant de l'intelligence, permettant de commencer des études scientifiques telles que celles des Ecoles techniques supérieures. Tandis que les examens de classification cherchent à établir dans quelle mesure les élèves possèdent une partie déterminée des matières enseignées, l'examen de maturité, par contre, embrasse l'ensemble des connaissances acquises par l'élève à l'Ecole réale supérieure.

Le nouveau décret concernant ces examens date du 29 février 1908. Il insiste sur le but de l'examen de maturité qui ne doit pas être un examen portant sur des détails, mais uniquement sur la culture générale acquise, sur le développement intellectuel atteint par le candidat.

La commission d'examen se prononce d'après l'impression d'ensemble des épreuves orales qui sont précédées d'épreuves écrites et en tenant compte des notes trimestrielles de la dernière année. Lorsqu'un candidat échoue, il peut se présenter une seconde fois au bout d'un semestre ou d'une année; mais il ne peut s'inscrire plus de deux fois à l'examen.

Cours universitaires.

ÉTATS-UNIS D'AMÉRIQUE

Cours annoncés pour l'année universitaire 1910-1911.

University of Chicago (summer quarter, June 20 to September 2). — Prof. E. H. Moore : General analysis, 4 hours; Seminar on the foundations of mathematics, 4; Graphical methods in algebra, 4, all second term. — Prof. L. E. Dickson : Theory of substitutions, 4; Differential calculus, 5. — Prof. J. W. A. Young : Critical review of secondary mathematics, 4; Advanced algebra, 5. — Prof. G. A. Bliss : Functions of a complex variable, 4; Modern analytic geometry, 4. — Prof. E. J. Wilczynski : Projective differential geometry, 4: Integral calculus, 5; Synoptic course in mathematics, 5. — Prof. A. L. Underhill : Differential equations, 5; Plane analytic geometry, 5; College algebra, 5.

Courses announced for the academic year 1910-1911. — Prof. E. H. Moore : Introduction to general analysis : Theory of functions of infinitely many variables; Integral équations in general analysis; Seminar on the foundations of pure mathematics: each 2 hours throughout the year. — Prof. L. E. Dickson : Finite groups, 4 h., 1st term; General algebra, 4 h., 2nd term; Quadratic forms, 4 h., 3rd term. — Prof. F. R. Moulton : Modern theories of analytic differential equations with applications to celestial mechanics, 4 h., all 3 terms. — Prof. E. J. Wilczynski : Theory of plane curves, 4 h., 1st term; Projective differential geometry of ruled surfaces and space curves, 4 h., 2nd term; Projective differential geometry of non-ruled surfaces and congruences, 4 h., 3rd term. — Prof. K. Laves : Analytic mechanics, 4 h. 1st and 2nd terms. — Prof. H. E. Slaught : Differential equations, 4 h., 1st term. — Prof. G. A. Bliss : Elliptic integrals, 4 h., 2nd term; Theory of definite integrals, 4 h., 3rd term; Fundamental existence theorems, 2 h., 2nd and 3rd terms. — Dr A. C. Lunn : Hydrodynamics, 4 h., 1st term; Differential equations of mathematical physics, the conduction of heat, 4 h., 3rd term.

Columbia University, New-York. — Prof. T. S. Fiske : Theory of functions of a real variable, 3 h.; Functions defined by linear differential equations, 3 h. — Prof. F. N. Cole : Theory of functions of a complex variable, 3 h.; Theory of plane curves, 3 h. — Prof. James Maclay : Differential equations, 3 h., 2nd half-year; Differential geometry, 3 h., 2nd half-year.

— Prof. D. E. Smith : History of mathematics, 2 h.; Seminar in the history and teaching of mathematics. — Prof. C. J. Keyser : Modern theories in geometry, 3 h. ; Principles of mathematics, 3 h. — Prof. Edward Kasner : Vector Analysis, 2 h., 1st half-year; Geometry of differential equations, 2 h.

Cornell University, (Ithaca, New-York). — Prof. J. McMahon : Theory of probabilities, 2 ; Vector analysis, 2. — Prof. J. H. Tanner : Theory of equations, 3. — Prof. J. I. Hutchinson : Theory of functious of a complex variable, 2. — Prof. V. Snyder : Descriptive Geometry, 3 ; Birational transformations, 2, first term. — Dr. F. R. Sharpe : Mechanics, 2. — Dr. W. B. Carver : Advanced calculus, 3. — Dr. A. Ranum : Theory of groups, 2. — Dr. D. C. Gillespie : Differential geometry, 2. — Dr. C. F. Craig : Applications to mechanics and physics, 2. — Dr. F. W. Owens : Differential equations, 2. — Dr. J. V. McKelvey : Advanced analytic geometry, 3. — Dr. L. L. Silverman : Algebra of logic, 2.

Johns Hopkins University (Baltimore). — Prof. F. Morley : Higher geometry, 3 hours, first half year; Theory of functions, 3 hours, second half-year. — Prof. A. Cohen : Differential equations, 2; Calculus of variations, 2, first half-year. — Prof. A. Coble : Theory of groups, 2; Theory of probabilities, 2, second half-year.

University of Illinois. — Prof. S. W. Shattuck : Differential equations, 3 hours, first semester. — Prof. E. J. Townsend : Theory of functions of a complex variable, 3. — Prof. G. A. Miller : Higher algebra, 3 hours, first semester ; Theory of groups, 3. — Prof. E. J. Wilczynski : Synoptic course, 3; Differential geometry, 3. — Prof. H. L. Rietz : Actuarial theory, 3 hours, first semester; Theory of statistics, 3. — Prof. J. W. Young : Elliptic functions, 3. — Prof. C. H. Sisam : Algebraic surfaces, 3. — Dr A. R. Crathorne : Advanced calculus, 3 hours, second semester; Theory of linear differential equations, 3. — Dr R. L. Börger : Projective geometry, 3. — Dr G. E. Wahlin : Partial differential equations, 3 hours, second semester. Dr T. Buck : Solid analytic geometry, 3 hours, second semester.

Summer of 1910. — Prof. G. A. Miller : Theory of equations and determinants, 5 hours; Elementary theory of groups, 3. — Dr E. B. Lytle : Teachers' course, 5. — Dr G. E. Wahlin : Differential equations, 5.

Indiana University. — Prof. S. C. Davisson : Advanced calculus (*a*, *w*, *s*), 3 h. ; Fourier series (*a*), 3 h. ; Fundamental concepts of mathematics (*w*, *s*), 2 h. — Prof. D. A. Rothrock : Systems of geometry (*a*, *w*), 3 h. ; Calculus of variations (*s*, *sm*), 3 h. ; History of mathematics (*w*), 3 h. — Prof. U. S. Hanna : Theory of numbers (*a*), 3 h. ; Substitution groups and Galois theory (*w*, *s*), 3 h. — Mr. K. P. Williams : Functions defined by differential equations (*a*, *w*), 2 h. (*a*, *w*, *s*, *sm* = autumn, winter, spring, summer.)

Princeton University. — Prof. H. B. Fine : Theory of algebraic numbers, 3 hours, first term. — Prof. H. D. Thompson : Coordinate geometry, 3. — Prof. L. P. Eisenhart : Mechanics, 3 : Differential geometry, 3. — Prof. O. Veblen : Linear groups and invariants, 3, second term ; Projective geometry, II, 3 hours, first term ; Projective Geometry, I, 3. — Prof. G. D. Birkhoff : Differential equations, 3 ; Differential equations of physics, 3. — Prof. E. Swift : Theory of functions of a complex variable, I, 3. — Prof. J. H. McL. Wedderburn : Theory of functions of a complex variable, II, 3, second term.

Yale University, (New-Haven, Conn.) — Prof. J. Pierpont : Abelian func-

tions, 2; Thermodynamics, 2; Theory of functions of a complex variable, 2; Modern analytic geometry, 2. — Prof. P. F. Smith: Geometrical analysis, 1; Differential geometry, 2; Elementary differential geometry, 2. — Prof. E. W. Brown: Elementary mechanics, 2; Advanced mechanics, 2; Advanced calculus, 3. — Prof. W. R. Longley: Calculus of variations, 2; Potential theory and harmonic analysis, 1. — Dr. A. W. Granville: Elementary differential equations, 1. — Dr. G. M. Conwell: Finite groups, 2; Partial differential equations of physics, 1. — Dr. G. F. Gundelfinger: Advanced analytic geometry, 2. — Dr. D. D. Leib: Transformations of space, 2.

ITALIE[1]

Année universitaire 1910-1911.

Bologna; *Università.* — Arzela: Integrali di Lebesgue; meccanica superiore, 3. — Donati: Elettromagnetismo; equazioni pei corpi in movimento dal punto di vista del postulato di relatività, 3. — Pincherle: Operazioni lineari in generale, equazioni integrali; equazioni differenziali lineari con riguardo speciale alle equazioni del second'ordine (nel campo complesso e nel reale), 3.

Catania; *Università.* — De Franchis: Geometria differenziale con applicazioni alla geometria noneuclidea, 4. — Lauricella: Teoria dell'elasticità: applicazioni varie, 4. — Pennacchietti: Meccanica celeste, 4. — Severini: Teoria delle funzioni, 4.

Genova; *Università.* — Levi; Fondamenti della teoria delle funzioni di variabile reale; calcolo delle variazioni, 3. — Loria: Teoria dei gruppi di trasformazioni, 3. — Tedone: Problemi speciali di equilibrio e di movimento dei corpi solidi elastici, 3.

Napoli; *Università.* — Amodeo: Storia dell'evo antico fino al 1200, 3. — Marcolongo: Omografie vettoriali e loro applicazioni all'Idromeccanica, all'Elasticità, all'Elettrodinamica, 3. — Montesano: Teoria delle corrispondenze birazionali nello spazio; la geometria della retta e delle coniche nello spazio, 4 1/2. — Pascal: Equazioni differenziali specialmente in rapporto alla teoria dei gruppi di trasformazioni. — Pinto: Ottica fisica con speciale riguardo ai fenomeni di diffrazione, 4 1/2. — Torelli: Teoria analitica dei numeri (serie di Dirichlet, funzione $\zeta(s)$ di Riemann, distribuzione dei numeri primi), 4 1/2.

Padova; *Università.* — D'Arcais: Teoria generale delle funzioni di variabili complesse; funzioni ellittiche, 4. — Cisotti: Teoria matematica dell'elasticità ed applicazioni tecniche, 3. — Favaro: La lettura delle matematiche nello Studio di Padova dal secolo XIV° al XVII°, 3. — Gazzaniga: Teoria dei numeri, 3. — Levi-Civita: Meccanica statistica, teoria cinetica dei gas, 4 1/2. — Ricci: Metodi di calcolo differenziale assoluto; funzioni armoniche e poliarmoniche; teoria generale della elasticità, 4. — Severi: Teoria delle funzioni algebriche di due variabili e dei loro integrali, 4. — Veronese: Fondamenti di geometria, 4.

---

[1] Les cours généraux (tels que ceux d'Analyse algébrique et infinitésimale, de Géométrie analytique, projective, descriptive, Mécanique rationnelle, Géodésie) ne sont pas indiqués dans la liste.

Palermo; *Università.* — Bagnera : Equazioni alle derivate parziali di secondo ordine, 3. — Gebbia : Vibrazioni dei mezzi elastici ; applicazioni all'acustica e all'ottica, 4 $^1/_2$. — Guccia : Teoria generale delle curve e delle superficie algebriche, 4 $^1/_2$. — Venturi : Moto dei pianeti attorno al sole ; moto dei pianeti attorno al proprio centro di gravità, 4 $^1/_2$.

Pavia; *Università.* — Almansi : Teoria della propagazione del calore, 3. — Berzolari : Geometria sopra una curva algebrica, 3. — Gerbaldi : Funzioni ellittiche, 3. — Vivanti : Teoria delle funzioni con applicazione alle trascendenti intiere, 3.

Pisa; *Università.* — Bertini : Proprietà fondamentali della geometria sopra una superficie, 3. — Bianchi : Preliminari sulle equazioni differenziali ordinarie ed a devivate parziali ; geometria infinitesimale delle curve e delle superficie, 4 $^1/_2$. — Dini : Funzioni di variabile complessa ; funzioni ellittiche, 4 $^1/_2$. — Maggi : Complementi di meccanica attinenti al metodo di Hamilton-Jacobi ; teoria della funzione potenziale e delle funzioni armoniche ; teoria del campo vettoriale ; applicazioni, 4 $^1/_2$ — Pizzetti : Interpolazione e integrazione numerica ; generalità di astronomia sferica ; teoria della figura dei pianeti, 3.

Roma; *Università.* — Bisconcini : Geometria differenziale e questioni di meccanica che vi si collegano, 3. — Castelnuovo : Principi della geometria ; geometria non euclidea, 3. — Orlando : Fondamenti analitici della fisica matematica, 3. — Voltera : Equazioni della fisica matematica, 3. — Teorie di integrazione delle equazioni differenziali della mecanica celeste, 3. — N. N. : Analisi superiore, 3.

Torino; *Università.* — Boggio : Teoria delle equazioni integrali e del potenziale, 3. — Sannia : Geometria non euclidea, 3. — Segre : Geometria delle trasformazioni birazionali delle curve e superficie algebriche, 3. — Somigliana : Teoria del potenziale ed applicazioni, 3. — N. N. : Analisi superiore, 3.

BIBLIOGRAPHIE

P. Bachmann. — **Niedere Zahlentheorie,** Zweiter Teil : *Additive Zahlentheorie.* — 1 vol., gr. in-8°, X et 480 p., prix : M. 17, relié ; B. G. Teubner, Leipzig [1].

Ce terme un peu vague, mais commode, d' « Additive Zahlentheorie » que l'on doit à Kronecker, s'applique à un domaine très étendu qu'il serait difficile de délimiter d'une manière précise. On peut cependant y distinguer deux champs d'études, deux groupes de problèmes appartenant à des types différents. Dans tous on a à faire à des sommes ; mais si dans certaines questions les addendes, qui servent d'éléments, sont supposés connus, dans d'autres, de beaucoup plus nombreuses et d'un abord plus difficile, il s'agit,

[1] Le premier volume a été analysé dans l'*Enseign. mathém.* du 15 mars 1903.

en remontant des sommes aux addendes, de décomposer un nombre en éléments vérifiant un ensemble de conditions données. Quelques-uns de ces problèmes nous ont été légués par les anciens, un grand nombre ont été posés par Fermat, mais c'est le nom d'Euler qu'on trouve à la tête de la plupart des travaux entrepris dans cette voie. Avec une patience infinie, M. Bachmann a fouillé tous les recoins de ce vaste domaine, et en reliant entre elles les recherches dispersées jusqu'ici dans les revues et les traités et cataloguées sous des noms différents, il a réussi à y introduire l'unité qui y faisait défaut.

Nous avons dit que les recherches réunies par M. Bachmann appartiennent à deux types différents. Celles du premier type sont exposées dans les deux premiers chapitres du livre intitulés : « Bildung der Zahlen auf additivem Wege » et « Rekurrente Zahlenreihen ». Dans ces chapitres les termes des sommes dont on étudie les propriétés sont donnés soit directement, soit à l'aide de relations récurrentes. En prenant comme point de départ les termes des progressions arithmétiques, M. Bachmann obtient d'abord, par la considération de leurs sommes, les nombres polygonaux, à la suite desquels viennent se ranger des nombres d'une nature plus complexe. L'étude des sommes des puissances semblables des premiers nombres entiers l'amène à s'occuper des fameux nombres de Bernoulli et d'Euler qui on fait l'objet de tant de remarquables travaux. Après avoir mis en relief leurs propriétés les plus connues, il établit les belles relations arithmétiques données par Kummer dans le t. 41 du *Journ. f. Math.* et les théorèmes de Lipschitz et de v. Staudt-Clausen. Tous ces nombres particuliers appartiennent à la catégorie très étendue des suites définies à l'aide de relations récurrentes, dont M. Bachmann esquisse la théorie dans le chapitre suivant, en s'arrêtant surtout sur les suites du second ordre de Lucas qui ont donné lieu à tant de belles et importantes applications et qui comprennent comme cas particuliers les nombres de Fermat, de Fibonacci et de Dupré, habituellement connus sous le nom de nombres de Pell.

Tout le reste du volume est consacré à l'étude des problèmes inverses relatifs à la décomposition des nombres en sommes d'une forme particulière. Ici, l'intérêt principal est concentré depuis Euler non pas sur les décompositions mêmes, mais sur le nombre des solutions possibles. L'étude du cas le plus simple où ce problème se traduit par des équations indéterminées du premier degré a été poussée très loin, grâce aux recherches de Cayley, Sylvester, Vahlen et v. Sterneck, basées comme celles d'Euler sur le développement des produits en séries. Du reste dans cet ordre de recherches les procédés purement arithmétiques semblent insuffisants ; déjà dans la théorie des nombres de Bernoulli M. Bachmann a dû s'appuyer sur des développements en séries. Mais ici le rôle de l'analyse s'accentue ; il prend une importance encore plus grande dans l'étude des problèmes qui se traduisent par des équations indéterminées non linéaires.

Ces difficiles questions sont abordées dans le chapitre VII, consacré à la théorie de la décomposition en sommes de puissances semblables. Nous pénétrons dans un domaine très beau. En traitant de la décomposition en carrés, M. Bachmann nous fait connaître quelques-unes des célèbres formules de Jacobi et les recherches de Vahlen qui le conduisent au théorème classique sur la représentation des nombres par une somme de quatre carrés. Est-il possible de généraliser ce résultat ? Est-il vrai que tout nombre entier est, comme le pensait Waring, décomposable en une somme de puis-

sances $m^{\text{ièmes}}$ dont le nombre maximum ne dépend que de m? M. Hilbert vient récemment de trancher la question dans un mémoire des « Nachr. d. Gött. ges. » 1909, reproduit avec quelques modifications dans le t. 67 des « Math. Annal. », mais les principes de cette belle démonstration appartiennent à une région trop élevée pour avoir pu trouver place dans l'excellent ouvrage de M. Bachmann. On y trouve en revanche un aperçu détaillé des recherches antérieures, — de Liouville à Wieferich — relatives à des cas particuliers.

Un long chapitre est consacré aux célèbres formules que Liouville a données sans démonstration dans une longue suite d'articles publiés dans le *J. de Math.* et dont une grande partie ont été établies par P. Pepin et tout récemment par Meissner. M. Bachmann en fait des applications intéressantes.

Enfin, le dernier chapitre du livre est consacré au dernier théorème de Fermat sur lequel s'est portée de nouveau l'attention des mathématiciens. On y trouve des indications intéressantes sur les méthodes appliquées à l'étude de ce grand problème.

Mais je ne saurais énumérer tous les sujets abordés dans le second volume de la « Niederen Zahlentheorie » : tantôt creusés jusqu'au fond, tantôt simplement effleurés, ils sont traités avec une science et une érudition hors-ligne. L'excellent ouvrage de M. Bachmann s'impose à l'attention de tous les mathématiciens. D. Mirimanoff (Genève).

Günther Bugge. — **Strahlungserscheinungen u. Radioaktivität** *(Bücher der Naturwissenschaft herausgegeben von Siegmund Günther)*. — 1 vol. in-16, relié; 80 Pf.; Phil. Reclam. jun., Leipzig.

L'auteur a réuni dans ce petit opuscule les notions essentielles concernant les phénomènes des décharges électriques à travers les gaz et la radioactivité, ainsi que les effets connexes. L'exposé, d'un caractère purement descriptif, est clair; il est très condensé en raison même du caractère de cette collection. Le mathématicien qui voudra se renseigner rapidement sur ce sujet éminemment actuel, trouvera son compte dans ce petit ouvrage et saura sans doute gré à son auteur, fort bien informé, même sur des travaux très récents, à quelques exceptions près (rayons magnéto-cathodiques, par exemple). A. Perrier (Leyde).

J. Bojko. — **Neue Tafel der Viertelquadrate aller natürlichen Zahlen von 1 bis 20000** zur Bildung aller möglichen Produkte im Bereiche 1. 1 bis 10000. 10000. — 1 fasc. de 20 p.; 1 fr. 50; Speidel, Zurich.

Dans les applications de la théorie des moindres carrés il arrive souvent aux techniciens et aux astronomes d'être appelés à former des carrés et des produits. Les calculateurs ont sans doute été souvent amenés à établir, pour leur usage personnel, des tables qui leur permettent d'opérer plus rapidement. Un bon nombre de tables pareilles ont été publiées, mais les plus nouvelles ne sont pas toujours meilleures.

Celle que nous avons sous les yeux semble répondre à un réel besoin. Je l'utilise de préférence à d'autres pour les calculs numériques de certains problèmes; il va sans dire qu'elle ne peut pas convenir à tous les calculs, ce qu'on ne pourrait du reste exiger d'aucune table. Elle présente cependant l'avantage de convenir à des usages très variés tout en étant très condensée. En outre, le texte et les exemples permettent à chacun de se familiariser rapidement avec le maniement de ces tableaux. D'un prix très modique,

cette table se recommande également par une disposition très favorable des tableaux numériques. S. Mauderli (Soleure).

B. Lefebure S. J. — **Cours d'Algèbre élémentaire** à l'usage des cours moyens et des classes d'Humanités. 3e édition. In-8° (21-24) de VIII-608 p. et **Recueil d'exercices et de problèmes d'Algèbre élémentaire.** 3e édition. In-8° (21-14) 280 p. ; 2 fr. 50. Dessain, Liège ; Gauthier-Villars, Paris.

Cet ouvrage présente, disposées dans leur plan normal et traitées avec les développements suffisants, les matières qui rentrent dans le cadre traditionnel de l'Algèbre élémentaire.

On a réuni en Appendice les questions étrangères au programme habituel des cours moyens ; le Binome de Newton, aisément traité par les simples règles de la multiplication, les notions premières et toutes pratiques de la Théorie des déterminants, etc. On a, d'ailleurs, marqué d'astérisques, dans toute la suite de l'Ouvrage, les matières que le professeur de Mathématiques dans les classes d'humanités peut, avec le moins d'inconvénient, faire omettre par ses élèves, soit dans une première étude, soit même peut-être définitivement. On a revu avec un soin particulier les chapitres consacrés aux questions d'Algèbre financière ; ces théories, relatives aux intérêts composés et aux Annuités, aux Rentes viagères et aux Assurances, intéresseront d'autres lecteurs encore que les élèves des cours élémentaires. Dans cette présente édition, la Table de survie, qui ouvre l'étude des opérations viagères, est la Table belge HF (1904), dressée par l'Actuariat de la Caisse générale d'Épargne et de Retraite. Le volume se termine par un choix très considérable de questions, extraites du *Recueil d'Exercices et de Problèmes*, et par de nombreuses Tables numériques.

Le Recueil d'exercices contient plusieurs milliers de questions, munies très souvent de leur clef de solution et accompagnées fréquemment de renseignements historiques. On a consacré de nombreuses pages aux exercices sur les Déterminants, sur les Maxima et les Minima, sur les questions d'intérêts composés et sur les Opérations viagères. Les Tables numériques et le Formulaire d'Algèbre qui figurent à la fin de ce volume, ont subi, dès la seconde édition, des améliorations et des additions qui ne sont pas, croyons-nous, sans utilité. Des additions, parfois importantes, ont été faites presque à chaque page dans cette troisième édition.

Nous signalons ce *Recueil* aux professeurs désireux d'augmenter leur collection d'exercices. Nous y renvoyons aussi l'élève qui a le goût des questions intéressantes de Mathématiques.

C. Schoy. — **Beiträge zur konstruktiven Lösung sphärisch-astronomischer Aufgaben.** — 1 vol. in-8°, 40 p. avec 3 fig. et 8 planches ; 1 M. 60 ; B. G. Teubner, Leipzig.

Tous ceux qui enseignent la trigonométrie plane et sphérique sauront gré à M. Schoy d'avoir réuni et présenté sous une forme très accessible un certain nombre de problèmes d'astronomie sphérique. Parmi les problèmes classiques, ils y trouveront, entre autres, le remarquable problème de la construction des cadrans solaires d'après la méthode des projections normales. L'auteur le présente sous une forme un peu différente de l'exposé habituel et d'une manière extrêmement claire. Signalons également un bel exposé de la résolution graphique du problème de Douves.

S. Mauderli (Soleure).

Schulte-Tigges u. Mehler. — **Die Hauptsätze der Elementar-Mathematik.** — Ausgabe B : *Unterstufe.* für die unteren und mittleren Klassen der Vollanstalten und die Nichvollanstalten. 1908, relié, 2 Mk. — *Oberstufe.* für die oberen Klassen der Vollanstalten, 3 vol., I : Synthetische Geometrie der Kegelschnitte in engster Verbindung mit neuerer und darstellender Geometrie ; relié, 1 Mk. 50. — II : Arithmetik, Trigonometrie, Stereometrie ; reliés, 1 Mk. 50. — III : Funktionale Geometrie (graphische Darstellung von Funktionen, Analytische Geometrie der Ebene, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung) ; relié, 1 Mk. 50. — Reimer, Berlin.

Très répandu en Allemagne, notamment en Prusse où on l'a introduit dans plus de cent établissements, cet *abrégé de mathématiques* mérite d'être signalé aux professeurs de l'enseignement secondaire d'autres pays. Il se recommande par ses qualités de clarté et de concision et par les problèmes et exercices qui accompagnent chaque sujet. On trouve ci-dessus l'énumération des différents petits manuels qui embrassent l'ensemble des mathématiques des écoles secondaires supérieures, depuis l'Arithmétique et la Géométrie jusqu'aux éléments de Géométrie analytique et de Calcul différentiel et intégral.

F. Schur. — **Die Grundlagen der Geometrie.** — 1 vol. in-8°, 192 S ; relié 7 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Depuis que les mémoires fondamentaux de Hilbert ont ouvert de nouvelles voies aux recherches sur les fondements de la géométrie, on a publié de nombreux exposés systématiques de cette partie à la fois importante et intéressante de la géométrie. Dans le présent Ouvrage, l'auteur applique les méthodes modernes à un exposé des fondements de la géométrie dont le choix des axiomes se rapproche, dans une certaine mesure, des travaux de Pasch et de Peano. Après avoir introduit le postulat de la projectivité, il démontre le théorème des trièdres perspectifs et obtient ainsi les fondements qui lui permettent d'introduire les *éléments idéaux*. On est alors amené au théorème de Desargues sur les triangles perspectifs. Les postulats du mouvement conduisent à une démonstration originale du théorème de Pascal au moyen de l'hyperboloïde à une nappe ; ils fournissent également les notions d'orthogonalité de deux droites et la détermination du système polaire absolu dans le plan. Le théorème fondamental de projectivité une fois démontré, le calcul des segments projectifs conduit à une métrique générale (non-euclidienne). Celle-ci permet d'établir d'une manière particulièrement simple les formules de trigonométrie. Le volume se termine par un examen approfondi du postulat des parallèles et du postulat d'Archimède.

Cet intéressant exposé est accompagné de nombreuses figures qui en facilitent la lecture.

Nous saisissons cette occasion pour informer déjà maintenant les professeurs des écoles moyennes suisses, que la commission chargée par la Société suisse des professeurs de gymnase d'organiser des cours de vacances a obtenu le concours de M. le professeur Schur. Les conférences auront lieu à Zurich du 9 au 14 octobre 1911. M. Grossmann (Zurich).

R. Suppantschitsch. — **Lehrbuch der Geometrie für Gymnasien und Realgymnasien.** Mittelstufe : *Planimetrie und Stereometrie.* — 1 vol. in-8°,

340 p., 349 fig., 1296 questions et problèmes; cart., 4 kr. 50 h.; Tempsky, Vienne, 1910.

Ce manuel forme le deuxième cycle[1] du cours de géométrie de M. Suppantschitsch; il commence par une intéressante préface dans laquelle l'auteur expose son but et donne un aperçu historique de l'évolution des méthodes d'enseignement de la géométrie élémentaire. Ce but est de « montrer comment l'expérience extérieure conduit les sciences exactes à établir des notions dont les transformations logiques peuvent être appliquées de nouveau à la nature ».

L'ouvrage est tout pénétré de l'esprit nouveau; les translations et rotations sont utilisées fréquemment; l'auteur insiste souvent sur la « dépendance relative des grandeurs » et conduit peu à peu l'élève à la notion si importante de « fonction ». La représentation géométrique des fonctions linéaire et du second degré est même expliquée avec quelques détails dans un chapitre intitulé : « Verbindung der Algebra mit der Geometrie ». Donnons les titres des principales divisions du livre.

En *Planimétrie :* 1, Segment, angle et circonférence. — 2. Le Triangle. — 3. Les Parallèles. — 4. Symétrie et rotations. — 5. Polygones et circonférence. — 6. Exercices de constructions. — 7. Similitude. — 8. Applications à l'arpentage. — 9. Les Surfaces. — 10. Applications de l'algèbre à la géométrie. — 11. Longueur de la circonférence et surface du cercle.

En *Stéréométrie :* 1. Projections droites et obliques. — 2. Points, droites et plans dans l'espace. — 3. Symétrie, trièdre. — 4. Prismes et cylindres, pyramides et cônes. — 5. Les Volumes. — 6. La Sphère. — 7. Le théorème d'Euler, polyèdres réguliers.

Un *Supplément* de quelques pages est consacré à la notion difficile du nombre irrationnel et l'auteur termine son excellent manuel par un choix nombreux et bien ordonné de questions et problèmes.

Aug. Lalive (La Chaux-de-Fonds).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Publications périodiques :

Giornale di Matematiche di Battaglini. — L.-C. Pellerano, Naples.

Vol. 47. — I. Amaldi : La sezione aurea in computisteria. — L. Amoroso : Dell'estensione del problema di Dirichlet per le funzioni di più variabili complesse. — J.-A. Barrau : Sur une classe de diagrammes de configurations. — A. Bartorelli : Alcune considerazioni di calcolo utili per le applicazioni alle scienze sperimentalti. — S. Cherubino : Sulle generatrici del gruppo alternato delle sostituzioni di n elementi. — Alcune formole arit-

[1] Voir l'analyse du *premier cycle* (Arithmétique et Géométrie), dans l'*Ens. math.*, T. XII, 1910, p. 78.

metiche e loro applicazioni nella teoria dei gruppi di sostituzioni. — G. Cornacchia : Sulla congruenza x. — U. Grudeli : Ultime ricerche nella teoria delle figure di equilibrio di un corpo fluido, omogeneo ed incompressibile, dotato di moto rotario. — Velocità angolare di un fluide, omogeneo ed incompressibile, rotante, limitato da figura di equilibrio. — F. de Helguero : Sui numeri rappresentati dalla forma quadratica binaria. — E. Ducci : Sulle equazioni contrareciproche. — G. Gamberini : Una speciale classe di matrici quadrate permutabili. — G. Guerritore : Calcolo delle funzioni di Lamè fino a quelle di grado. — S. Minetola : Sulle combinazioni con elementi non tutti distinti. — Principii di analisi combinatiria con applicazioni ai problemi di decomposizione e partizione dei numeri. — Sui numeri primi compresi fino ad un limite assegnato. — R. Occhipinti : Su una proprietà caracteristica delle funzioni isobariche. — L. Orlando : Sopra alcune funzioni linearmente independenti. — G. Pirondini : Recensione Obras sobre matematica do Dr F. Gomez Teixeira. — G. Pucciano : Sulle condizioni di validità del teorema di Cauchy. — P. Quintili : Sopra un'equazion analoga all'equazione secolare. — C. Rossi : Intorno ad alcune antiradialli delle curve. — Sulla ricerca del limite di alcune successioni. — F. Sibirani : Sopra i polinomiti trigonometrici ed un determinente relativo. — Sui sistemi di integrali indipendenti di m equazioni differenziali lineari. — M. Sittignani : Le fuzioni intere di genere finito p. 77. — A. Terracini : Nota su una classe di determinanti. — L. Tonelli : Sul teirema di Hadamard relativo al valor maggiorante di un determinante. — C. Votolo : Sulle equazioni differenziali a derivate parziali del prim'ordine. — G.-B. Zecca : Sulla seconda polare mista dei punti ciclici di un piano rispetto ad un sistema di rette.

C'est par ce volume que se termine la série des seize volumes dirigée par le regretté professeur Capelli, *décédé le 28 janvier 1910. A partir du prochain volume, le* « Giornale » *sera publié sous la direction de* M. Ernest Pascal, *professeur à l'université de Naples, avec la collaboration de quelques-uns de ses collègues de la section mathématique.* (Réd.)

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von Em. Lampe. Band 38. Jahrgang 1907. — G. Reimer, Berlin, 1910.

Heft 3. — Mechanik. — Mathem. Physik. — Geodäsie, Astronomie, Meteorologie.

Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, in Monatsheften herausgegeben von A. Gutzmer. Band 19, 1910. — B.-G. Teubner, Leipzig.

Nos 1 et 2 (Janvier-Février). — Friedrich Engel : Hermann Grassmann. — J. Wellstein : Das System der alternierenden Zahlen. — E. Müller : Anregungen zur Ausgestaltung des darstellend-geometrischen Unterrichts an technischen Hochschulen und Universitäten. — Felix Müller : Herrn P. Stäckels Kritik meiner Abhandlung im 17. Bande der Jahresberichte. — P. Stäckel : Umfang der einzelnen Abhandlungen Leonhard Eulers. — Reinhold Müller : Über die Momentanbewegung eines ebenen ähnlich-veränderlichen Systems in seiner Ebene. — E. Waelsch : Über die Kugelfunktionen des vierdimensionalen Raumes und doppeltbinäre Formen.

Nos 3 et 4 (mars-avril). — Georg Pick : Über die Differentialgleichungen der hyperelliptischen Perioden. — Emmy Noether : Zur Invariantentheorie

der Formen von *n* Variabeln. — Georg FABER : Über die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar. — Friedrich ENGEL : Über Kurvenscharen, die zu einem gegebenen Differentialausdrucke kovariant sind. — P. SCHAFHEITLIN : Die semikonvergenten Reihen für die Besselschen Funktionen — Oskar PERRON : Über das Verhalten der Integrale linearer Differenzengleichungen im Unendlichen. — Aug.-W. VELTEN : Die Entwicklung der elliptischen Funktionen. — Georg FABER : Über stets konvergente Interpolationsformeln. — Angelegenheiten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. — Mitteilungen und Nachrichten. — Literarisches.

Nouvelles Annales de Mathématiques, dirigées par C.-A. LAISANT, C. BOURLET et R. BRICARD, 4me série. — Gauthier-Villars, Paris.

Tome X, janvier-avril 1910. — R. BRICARD : Sur la « Géométrie des feuillets » de M. René de Saussure, étude analytique. — Emile TURRIÈRE : Application de l'équation des télégraphistes aux surfaces dont les images sphériques des lignes de courbure sont des loxodromies. — Conséquences de deux théorèmes de M. Bricard, concernant les tangentes communes à deux quadriques. — E. KERAVAL : Surfaces partiellement cylindroïdes. — Tsuruichi HAYASHI : Sur une équation indéterminée. — G. FONTENÉ : Sur les formules de quadrature de Cotes. — Généralisation d'une formule d'Euler. — AMSLER : Sur les suites récurrentes. — H. VILTAT : Sur les surfaces réglées rapportées à leurs asymptotiques. — REBEIX : Section plane d'un cône ou d'un cylindre à base elliptique, hyperbolique ou parabolique. — AURIC : Sur la rectification approchée d'un arc de cercle. — BRICARD : Sur un théorème de Mannheim. — Certificats de calcul différentiel et intégral, d'analyse supérieure et de mécanique. — Solutions de questions proposées.

Revue de Métaphysique et de Morale, publiée par Xavier LÉON. — Librairie Armand Colin, Paris.

17me année, 1909. — L. BRUNSCHVICG : Une phase du développement de la pensée mathématique. — H. POINCARÉ : La logique de l'infini. — A. REYMOND : Note sur le théorème d'existence des nombres entiers et sur la définition logistique du zéro. — J. TANNERY : Pour la science livresque.

Revue générale des Sciences pures et appliquées, dirigée par L. OLIVIER. — Librairie Armand Colin, Paris.

30 janv. 1910. — H. MARCHAND : Les tendances nouvelles de l'enseignement technique et professionnel en Amérique.

15 février. — D. SAVITCH : Le calcul et l'observation de l'éclipse de soleil du 17 avril 1912, visible en France.

15 et 30 mars. — Ct P. RENARD : L'aviation. 1re partie : Considérations générales. 2me partie : Les moyens de réaliser le vol mécanique.

2. Livres nouveaux :

W. M. BAKER and A. A. BOURNE. — **Public School Arithmetic.** — 1 vol. in-8°, 386 et L p. ; 3 s. 6 d. ; or with answers, 4 s. 6 d. ; G. Bell & Sons, London.

H. BOUASSE. — **Cours de mécanique rationnelle et expérimentale,** spécialement écrit pour les physiciens et les ingénieurs. — 1 vol. gr. in-8°, 692 p. ; 20 fr. ; Ch. Delagrave, Paris.

J. G. Coffin. — **Vector Analysis.** An Introduction to Vector-Methods and their various Applications to Physics and Mathematics. — 1 vol. in-12 XIX et 248 p., relié, 2 D. 50 (10 sh. 6). John Wiley & Sons, New-York.

G. Combebiac. — **Les actions à distance.** — 1 vol. *(Collection Scientia.)*, p. in-8°, 89 p.; 2 fr.; Gauthiers-Villars, Paris.

Gustaf Eneström. — **Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers.** Erste Lieferung. — 1 vol. in-8°, 208 p.; 10 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

C. M. Jessop and G. W. Caunt. — **The elements of hydrostatics.** — 1 vol. in-16, 126 p.; G. Bell & Sons, London.

Paul Natorp. — **Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften.** — *(Sammlung Wissenschaft und Hypothese)* 1 vol. in-16, 416 p.; 6 M. 60; B. G. Teubner, Leipzig.

Eugen Netto. — **Die Determinanten.** — (Sammlung : Mathematisch-Physikalische Schriften für Ingenieure und Studierende herausgegeben von E. Jahnke.) 1 vol. in-8°, 129 p.; relié, 3 M. 60; B. G. Teubner, Leipzig.

Maurice d'Ocagne. — **Notions élémentaires sur la probabilité des erreurs.** — 1 fasc. gr. in-8°, 27 p.; Gauthiers-Villars, Paris.

Ch. Pendlebury. — **Exercises and examination papers in arithmetic, logarithms and mensuration.** — 1 vol. in-16. 212 p.; relié, 2 s. 6 d.; seventh edition; G. Bell & Sons, London.

G. Petit Bois. — **Algébrette ou algèbre élémentaire simplifiée.** — 1 vol. in-16, 315 p.; 2 fr. 50; H. Vaillant-Carmanne, Liège.

H. Poincaré. — **Leçons de mécanique céleste.** — Tome III. *Théorie des marées.* — 1 vol. gr. in-8°, 472 p.; 16 fr.; Gauthiers-Villars, Paris.

J. Schick. — **Trifolium Hiberniae oder Diametristik der Fusspunktsdreiecke.** — 1 vol. p. in-8°, 156 p., avec 85 fig.; 6 M.; G. Franz, Munich et Leipzig.

Schwab und Lesser. — **Mathematisches Unterrichtswerk.** — I. Band : *Arithmetik und Algebra* von Oskar Lesser : Lehr- und Uebungsbuch für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra. — Erster Teil : für die mittleren Klassen sämtlicher höheren Lehranstalten. — Zweite Auflage. 1 vol. in-8°, 203 p.; relié, 2 M. 80; F. Tempsky, Vienne, et G. Freytag, Leipzig.

R. Elliot Steel. — **Practical Electricity and Magnetism,** a first year's course. — 1 vol. in-16, 175 p.; 2 s.; G. Bell & Sons, London.

Dr. Toulouse. — **Henri Poincaré.** Enquête médico-psychologique sur la supériorité intellectuelle. — 1 vol. in-16, 204 p.; 3 fr. 50; E. Flammarion, Paris.

Heinrich Weber. — **Encyklopädie der elementaren Algebra und Analysis.** Erster Band der *Encyklopädie der Elementar-Mathematik,* Dritte Auflage. — 1 vol. gr. in-8°, 531 p.; relié, 10 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

W. H. Young. — **The fundamental theorems of the differential Calculus** (Cambridge Tracts in mathematics and mathematical physics, N° 11). — 1 fasc. in-8°, 72 p.; 2 s. 6 d.; University Press, Cambridge.

Fritz Reininghaus. — **Kalender-Reform-Vorschlag.** — 1 broch., Orell Füssli, Zurich.

Exposition allemande de l'enseignement à l'exposition universelle de Bruxelles 1910. Tome I : *Guide,* 207 p.; tome II : *Bibliotheks-Kataloge,* 170 p. — Weidmann, Berlin.

Commission internationale de l'enseignement mathématique.

COMPTE RENDU

DES

SÉANCES DE LA COMMISSION

ET DES

CONFÉRENCES SUR L'ENSEIGNEMENT SCIENTIFIQUE ET SUR L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE MOYEN

faites à Bruxelles du 10 au 16 août 1910 à l'occasion de l'Exposition universelle

publié par

H. Fehr
Secrétaire-général de la Commission.

INTRODUCTION

Lorsqu'en décembre 1909 le Comité central décida d'organiser une réunion partielle de la Commission internationale de l'enseignement mathématique, à l'occasion de l'Exposition universelle de Bruxelles, il se proposait avant tout de grouper les membres des sous-commissions nationales de la Belgique et des pays limitrophes et de provoquer entre eux un échange de vues sur les travaux actuellement en préparation. Son appel a rencontré le meilleur accueil, non seulement dans les pays indiqués, mais auprès de la plupart des délégations ; et ce ne sont pas cinq, mais onze pays qui se trouvaient représentés à la séance des délégués par plus de trente membres des sous-commissions nationales. De nombreux professeurs de l'enseignement scientifique et technique étaient venus se joindre à eux pour suivre les conférences publiques qui avaient été annoncées pour les journées du 10 au 16 août. A côté de l'Exposition proprement dite il y avait donc en quelque sorte une « Exposition-parlée », suivant le terme employé dans l'Avant-Propos de l'Album édité sous le patronage du groupe des Congrès et gracieusement offert aux participants des réunions internationales. Ces séances augmentèrent encore l'attrait déjà très grand

de l'Exposition universelle dont une partie, relativement petite il est vrai, mais non des moins remarquables, a été détruite brutalement par un incendie dans la nuit du 14 au 15 août.

C'est à cet ensemble de belles conférences, réparties sur une semaine entière, que doit être attribué le succès et l'affluence de chacune d'entre elles. Le Comité central tient à renouveler ici ses remerciements à tous ceux qui ont contribué à leur réussite.

Nous ne reparlerons pas des expositions d'enseignement présentées avec tant de soin dans les compartiments allemands, belges et français ; l'*Enseignement mathématique* en a déjà donné un aperçu dans son numéro de juillet. Les pages qui vont suivre sont destinées à donner un compte rendu aussi fidèle que possible des séances qui se sont succédées, conformément au programme ci-après, que nous reproduisons afin d'orienter le lecteur.

Nous répondons au vœu général des participants, en étendant ce compte rendu à l'ensemble des conférences qui ont eu lieu à Bruxelles du 10 au 16 août. Ce vœu est une nouvelle preuve du désir qu'ont les mathématiciens de rester en contact avec toutes les branches de l'enseignement scientifique et de l'enseignement moyen en général et de connaître les progrès réalisés dans les autres disciplines. Ces conférences forment en réalité un tout bien coordonné et elles ont d'ailleurs été organisées après entente entre les différents comités.

Dans une Première Partie, consacrée à la *Commission internationale de l'enseignement mathématique*, nous donnons un compte rendu de la séance des délégués avec un exposé de l'état actuel des travaux dans les principaux pays d'après les renseignements qui y ont été apportés. Puis vient la séance générale publique avec le *texte complet* de la belle conférence, d'une remarquable clarté d'exposition, dans laquelle M. Bourlet examine la pénétration réciproque des mathématiques pures et des mathématiques appliquées dans l'enseignement moyen.

La Seconde Partie donne le résumé des *conférences organisées dans la section allemande* d'enseignement par la Société pour le progrès de l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles, sous le patronage du Ministère prussien de l'Instruction publique.

La Troisième Partie contient le résumé des *conférences sur l'enseignement technique moyen, organisées dans la section française* de l'Exposition de Bruxelles, sous le patronage de M. le Ministre du Commerce et de l'Industrie de la République française.

Enfin dans la Quatrième Partie nous donnons un compte rendu sommaire du *Congrès international de l'enseignement moyen*.

Voici le progamme de ces quatre groupes de conférences ; il forme en même temps la *Table des matières* du présent compte rendu.

I. — COMMISSION INTERNATIONALE DE L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE . . . . p. 357

Mardi 9 août :

9 h. du matin et à 4 h. de l'après-midi : Séances du Comité central.

8 $^1/_2$ h. du soir : Réunion préparatoire.

Mercredi 10 août :

9 h. du matin : Séance des délégués et des membres des sous-commissions nationales.

4 h. de l'après-midi : Séance générale publique.

Ordre du jour :

1. Allocution du représentant de la Belgique, M. J. Klompers, Directeur général au Ministère des Sciences et des Arts.
2. Discours de M. F. Klein, Président de la Commission, sur le but de la Commission et sur l'enseignement en général.
3. Rapide aperçu de l'état des travaux dans les différents pays, par M. H. Fehr, Secrétaire-général.
4. Conférence de M. C. Bourlet, professeur au Conservatoire national des Arts et Métiers (Paris), sur *la pénétration réciproque des mathématiques pures et des mathématiques appliquées dans l'enseignement secondaire.*

II. — CONFÉRENCES SUR L'ENSEIGNEMENT SCIENTIFIQUE EN ALLEMAGNE . . . . p. 387

Jeudi 11 août :

10 Uhr vormittags : Begrüssungen.

Dr. Mosch : Allgemeine Orientierung über die deutsche Unterrichtsausstellung.

10 $^1/_2$ Uhr vormittags : Geh. Rat. Treutlein, Karlsruhe : Über geometrischen Anschauungsunterricht mit Vorführung von Modellen.

11 $^1/_4$ Uhr vormittags : Dir. Grimsehl, Hamburg : Die physikalischen Schülerübungen auf der Uhlenhorst in Hamburg.

12 Uhr vormittags : Dr. Schoenischen, Berlin : Selbsttätigkeit der Schüler im naturkundlichen Unterricht. Erläuterungen zur biologischen Ausstellung.

4 Uhr nachmitags : Dir. Grimsehl : Physikalische Demonstrationen in der Unterrichts-Ausstellung.

4 $^3/_4$ Uhr nachmittags : Dr. Schoenischen u. Dr. Bastian Schmid : Führung durch die biologische Ausstellung mit Demonstrationen.

6 Uhr nachmittags : Dr. Driesen, Charlottenburg : Bilder aus dem Schulleben einer deutschen Grossstadt (kinematographisch-grammophonisch).

Vendredi 12 août :

10 Uhr vormittags : Geh. Rat Klein, Gœttingen : Die Arbeit der deutschen Ausschusses der int. math. Unterrichtskommission. — Schillingsmodelle f. d. math. Unterricht.

10 $^3/_4$ Uhr vormittags : Prof. Poske, Berlin : Probleme des physikalischen Unterrichts ; physikalische Schülerübungen.

11 1/2 Uhr vormittags : Dr. Bastian Schmid, Zwickau : Die Entwicklung des biologischen Unterrichts, seine Ziele und sein gegenwärtiger Betrieb.

4 Uhr nachmittags : Geh. Rat Treutlein u. Geh. Rat Klein : Demonstration mathematischer Modelle.

4 1/2 Uhr nachmittags : Prof. Poske, Dr. Mosch u. M. Drosten : Führung durch die physikalische Ausstellung.

6 Uhr nachmittags : Dr. Schmid : Kinematographische Vorführung von biologischen Schülerübungen.

III. — CONFÉRENCES SUR L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE MOYEN EN FRANCE . . . . p. 393

Samedi 13 août :

9 1/2 h. : Allocution de M. Chapsal, Commissaire général du Gouvernement français à l'Exposition.

Conférence de M. Bourlet, Professeur au Conservatoire National des Arts et Métiers : Les Progrès de l'Aviation en France, les Ecoles d'Aviation (avec vues cinématographiques).

11 h. : Conférence de M. Tramard, Directeur de l'Ecole pratique de Commerce et d'Industrie de Vienne (Isère) : L'Organisation du Travail manuel dans les Ecoles pratiques d'industrie.

3 h. après-midi : Promenade-conférence dans l'Exposition française d'Aviation sous la conduite de M. Bourlet.

4 h. après-midi : Promenade-conférence dans l'Exposition française d'Enseignement Technique sous la conduite de M. Tramard.

Dimanche 14 août :

9 1/2 h. : Conférence de M. Jouglet, Ingénieur de l'Ecole Nationale d'Arts et Métiers à Aix-en-Provence : L'Organisation de l'Enseignement technique pratique dans les Ecoles d'Arts et Métiers.

11 h. : Conférence de M. Beaufils, Directeur de l'Ecole pratique d'Industrie de Saint-Etienne : L'Organisation de l'Enseignement de l'Electricité industrielle dans les Ecoles pratiques (avec expériences de démonstration).

3 h. après-midi : Promenade-conférence dans l'Exposition française de Machines sous la conduite de M. Jouglet.

4 h. après-midi : Promenade-conférence dans l'Exposition française d'Electricité sous la conduite de M. Beaufils.

IV. — CONGRÈS INTERNATIONAL DE L'ENSEIGNEMENT MOYEN p. 413

Lundi 15 août :

10 h. : Séance d'ouverture, discours de M. Discailles, président.

a) L'enseignement secondaire à l'étranger et en Belgique ; sa mission, son importance, les progrès qu'il a réalisés. Conférences de MM. Jules Gautier, directeur honoraire de l'enseignement moyen en France ; A. Thaer, président de la Société allemande pour le progrès de l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles ; et J. Courtoy, président du corps professoral des écoles moyennes officielles de Belgique.

b) Garanties que les juridictions pédagogiques et administratives assurent aux membres du personnel, par M. V. Wittmann, secrétaire général de la Fédération de l'enseignement moyen officiel de Belgique.

Mardi 16 août :

10 h. : Assemblée générale du Congrès.

1. Création d'un *Bureau international* des Fédérations d'enseignement secondaire.

2. Création et extension d'un Office international d'échange de jeunes gens dans le but de faciliter l'étude pratique des langues vivantes.

3 h. : Conférence par M. Chassagny, inspecteur général de l'enseignement secondaire pour les sciences physiques, en France ; Sujet : Modifications qui ont été apportées depuis 1902, en France, aux méthodes d'enseignement des sciences physiques.

Cette conférence sera suivie d'une visite explicative à l'exposition du Ministère de l'Instruction publique Français.

4 1/2 h. : Visite des autres compartiments étrangers d'enseignement.

PREMIÈRE PARTIE

Commission internationale de l'enseignement mathématique.

Réunion de Bruxelles, 9 et 10 août.

Séances du Comité central. — Le Comité central, composé de MM. Klein, Greenhill et Fehr, a tenu deux séances le mardi 9 août, l'une le matin de 9 à 11 heures, l'autre, l'après-midi, de 4 à 7 heures. Ces deux séances ont été consacrées tout d'abord aux affaires courantes concernant la réunion de Bruxelles, puis à l'examen des rapports et correspondances sur l'état des travaux dans les dix-huit pays participants. Le Comité s'est ensuite occupé de ce qu'il conviendrait de faire dans la suite et en particulier du projet de réunir la Commission en 1911.

Le même jour, à 11 heures et demie, les membres du Comité central, accompagnés de M. J. Neuberg, délégué de la Belgique, ont été reçus au Ministère des Sciences et des Arts par M. T. Klompers, Directeur général de l'enseignement moyen.

Réunion préparatoire. — Le soir, à 8 heures et demie, une réunion familière, organisée par le Comité central, groupait une première fois les membres des sous-commissions nationales auxquels étaient venus se joindre les membres du Comité du Congrès international de l'enseignement moyen et de nombreux professeurs de Belgique et de l'étranger. Après des paroles de bienvenue adressées à l'assemblée par M. le prof. J. Neuberg, délégué

belge, et M. V. Wittmann, secrétaire-général du Congrès international de l'enseignement moyen, on entendit encore des discours de MM. Klein, Bourlet et Fehr. Ce dernier a exprimé le vœu que la réunion de ce jour soit le point de départ d'une société mathématique belge, largement ouverte à tous ceux qui désirent travailler en commun aux progrès des sciences mathématiques et de leur enseignement. De pareils groupements existent dans la plupart des pays, et partout ils ont exercé une heureuse influence sur l'étude des questions d'ordre scientifique et pédagogique.

Séance des Délégués et des Membres des Sous-Commissions nationales.

La séance a eu lieu mercredi 10 août, à 9 heures du matin, à la Salle Ravenstein, sous la présidence de M. le prof. F. Klein, assisté de Sir George Greenhill, vice-président, et de M. H. Fehr, secrétaire-général. MM. De Donder et Lambot, de Bruxelles, ont bien voulu fonctionner comme secrétaires-adjoints.

M. Klein ouvre la séance en souhaitant la bienvenue aux délégués et aux membres des sous-commissions nationales.

M. J. Neuberg salue l'assemblée au nom des mathématiciens belges et insiste sur l'importance des travaux de la Commission.

Liste de présence. — On procède ensuite à l'établissement de la liste de présence et à l'appel des représentants des divers pays. Etaient présents :

Allemagne : MM. Klein (Gœttingue) et Treutlein (Carlsruhe), délégués, et MM. End (Munich), Poske (Berlin), H. Schnell (Darmstadt), Thaer (Hambourg).

Belgique : M. J. Neuberg (Liège), délégué, et M. H. Ploumen (Bruxelles).

Danemark : M. P. Heegaard (Copenhague), délégué.

Espagne : M. Z.-G. de Galdeano (Saragosse), délégué.

Etats-Unis : M. Cl.-Br. Upton (New-York), par délégation spéciale.

France : M. Bourlet, délégué, Mlle Amieux (Paris), et MM. Marotte (Paris), Rollet (Paris), et Vogt (Nancy).

Hollande : M. Cardinaal (Delft), délégué, et M. J.-A. Barrau (Delft).

Hongrie : M. E. Beke (Budapest), délégué.

Iles Britanniques : Sir George Greenhill (Londres), délégué, et M. Jackson (Londres).

Russie : MM. Michelson (St-Pétersbourg) et D. Sintzov (Kharkov).

Suisse : M. H. Fehr (Genève), délégué, et MM. Brandenberger (Zurich), Crelier (Bienne-Berne), Lalive (La Chaux-de-Fonds), Scherrer (Küssnacht-Zurich), et Stœcklin (Liestal-Bâle).

L'assemblée comprenait en outre quelques professeurs belges et étrangers.

Reprenant ensuite l'ordre du jour, le président rappelle que le principal objet de la séance est de passer en revue et de discuter l'état et l'organisation des travaux dans les pays participants. En même temps les délégués sont appelés à présenter les rapports partiels déjà terminés. Pour les pays n'ayant pas de représentants à la séance, les renseignements sont fournis par le secrétaire-général.

Nous résumerons ici la situation actuelle en rappelant la liste des rapports annoncés et publiés dans la *Circulaire n° 2* dont un exemplaire est remis à chacun des assistants.

Etat de l'organisation des travaux en août 1910.

Allemagne. — M. Klein rapporte. La sous-commission allemande a adopté deux sortes de publications : Les *Berichte und Mitteilungen* et les *Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland.*

Les *Berichte und Mitteilungen, veranlasst durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission* sont destinés à donner des renseignements généraux, ainsi que des rapports spéciaux de peu d'étendue. Ils sont rédigés par le secrétaire de la sous-commission allemande, M. W. Lietzmann Jusqu'ici il a paru quatre fascicules. Le premier et le troisième donnent le texte allemand du *Rapport préliminaire du Comité central* et de la *Circulaire n° 1.* Le second fascicule est consacré au rapport de M. le Prof. G. Noodt (Berlin) sur les mathématiques dans le plan d'études des écoles supérieures de jeunes filles en Prusse (*Ueber die Stellung der Mathematik im Lehrplan der höheren Mädchenschule vor und nach der Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens in Preussen* (22 p.). Le quatrième fascicule contient : 1. La traduction de la *Circulaire n° 2,* complétée jusqu'au moment de la publication (juin 1910) ; 2. Une Note de quatre pages intitulée *Mathematiker und Zeichenlehrer im Linearzeichenunterricht der preussischen Realanstalten,* par M. Zühlke (Berlin).

Les *Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland. veranlasst durch die Internationale Mathematische Unterrichts-Kommission* comprendront des monographies sur l'enseignement mathématique dans les divers types d'établissements en Allemagne ou sur des questions générales. La publication est dirigée par M. Klein; elle comprendra cinq volumes, chacun de ceux-ci débutant par une introduction générale.

Le *volume I* sera consacré aux établissements secondaires supérieurs du Nord de l'Allemagne ;

Le *volume II,* aux établissements secondaires supérieurs de l'Allemagne du Centre et du Sud ;

Le *volume III,* à des rapports sur des questions générales ;

Le *volume IV,* aux mathématiques dans les établissements techniques :

Et le *volume V,* à l'enseignement primaire.

Voici la division adoptée pour chacun des quatre premiers volumes qui sont édités par les soins de la Maison Teubner (Leipzig) :

I. Band. *Die höheren Schulen in Norddeutschland.* Mit einem Einführungswort von F. Klein.

* 1. Heft. W. Lietzmann, Stoff und Methode im mathematischen Unterricht der norddeutschen höheren Schulen auf Grund der vorhandenen Lehrbücher (XII und 102 S.) 1909. Geh. 2 Mk.

* 2. Heft. W. Lietzmann, Die Organisation des mathematischen Unterrichts an den höheren Knabenschulen in Preussen (204 S.).

3. Heft. W. Lorey, Die Entwicklung der mathematischen Ausbildung der Lehramtskandidaten an den norddeutschen Universitäten und Hochschulen. In Vorbereitung.

4. Heft. A Thaer. Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen der Hansastädte. In Vorbereitung.

Weitere Hefte bleiben vorbehalten.

II. Band. *Die höheren Schulen in Mittel- und Süddeutschland.* Mit einem Einführungswort von P. Treutlein.

* 1. Heft. H. Wieleitner, Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Königreich Bayern (XI u. 85 S.).

* 2. Heft. A. Witting, Der mathematische Unterricht an den Gymnasien und Realanstalten nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Königreich Sachsen (X u. 76 S.).

* 3. Heft. E. Geck, Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen in Königreich Württemberg.

* 4. Heft. H. Cramer, Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen im Grossherzogtum Baden.

* 5. Heft. H. Schnell, Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen im Grossherzogtum Hessen.

6. Heft. Hossfeld, Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen in den thüringischen Staaten. In Vorbereitung.

7. Heft. Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen in den Reichslanden. Berichterstatter noch unbestimmt.

Weitere Hefte bleiben vorbehalten.

III. Band. *Berichte allgemeinerer Art über den mathematischen Unterricht.* Mit einem Einführungswort von F. Klein.

1. Heft. R. Schimmack, Bericht über das Fortschreiten der Reformbewegung im mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Unter der Presse.

* 2. Heft. F.-H.-E. Timerding, Das Mathematische in den Lehrbüchern der Physik.

3. Heft. P. Zühlke, Das Linearzeichnen an den deutschen Realanstalten. In Vorbereitung.

4. Heft. W. Lorey. Über den inneren Betrieb des wissenchaftlichen mathematischen Unterrichts an den Universitäten. In Vorbereitung.

Weitere Hefte bleiben vorbehalten.

IV. Band. *Die Mathematik an den technischen Schulen.* Mit einem Einführungswort von P. Stäckel.

* 1. Heft. H. Grünbaum, Die Mathematik an den technischen Mittelschulen: Reine Mathematik. (XVI und 99 S.)

2. Heft. Ott, Die Mathematik an den technischen Mittelschulen : Angewandte Mathematik. In Vorbereitung.

3. Heft. C. Schilling und H. Meldau, Die Mathematik an den Seefahrtsschulen. In Vorbereitung.

4. Heft. Th. Furtwängler, Über die Ausbildung der Feldmesser.

5. Heft. P. Stäckel, Die mathematische Ausbildung der Architekten, Che-

miker und Ingenieure an den deutschen technischen Hochschulen. In Vorbereitung.

6. Heft. E. Jahnke, Der mathematische Unterricht an Hochschulen für besondere Fachgebiete. In Vorbereitung.

Weitere Hefte bleiben vorbehalten.

Ausserdem sind gegenwärtig noch Berichte über folgende Gegenstände geplant :

1. Die Methodik des Rechnens auf der Unterstufe, nach den Lehrbüchern
2. Die Methodik der Raumlehre auf der Unterstufe nach den Lehrbüchern.
3. Der mathematische Unterricht in den gewöhnlichen und gehobenen Volksschulen sowie an den Lehrerseminaren.
4. Die Mathematik in den Fortbildungsschulen.
5. Der mathematische Unterricht im Bereich der katholischen Orden Deutschlands und seiner Nachbarländer.
6. Der mathematische Unterricht in den deutschen Auslandschulen.

Grâce au concours inlassable d'excellents collaborateurs, les travaux sont en très bonne voie et M. Klein a l'avantage de pouvoir déjà présenter neuf de ces monographies ; ce sont celles de MM. Lietzmann (2 rapports), Wieleitner, Witting, Geck, Cramer, Schnell, Timerding et Grünbaum (elles sont marquées d'une astérisque dans la liste ci-dessus). Les autres sont sous presse ou en préparation.

Autriche. — Les rapports de la sous-commission autrichienne sont publiés sous le titre *Berichte über den mathematischen Unterricht in Oesterreich, veranlasst durch die Internationale Mathematische Unterrichts-Kommission*. Ils seront joints comme suppléments aux périodiques autrichiens : *Zeitschrift für die œsterreichischen Gymnasien* et *Zeitschrift für das Realschulwesen*, et édités à part par la maison Hölder (Vienne).

Trois fascicules ont paru :

Le premier (81 p.) contient, après une Introduction de M. Czuber, les rapports sur *les écoles réales*, par Fr. Bergmann, et *les écoles primaires et primaires supérieures*, par M. K. Kraus.

Le fascicule 2 (52 p.) rapports concernant *les écoles normales d'instituteurs et d'institutrices*, par Th. Konrath, *les écoles de commerce*, par M. Dolinski, et *l'Ecole forestière de Reichstadt*, par M. Adamicka.

Le fascicule 3 (VIII et 79 p.) donne le rapport sur *l'enseignement mathématique dans les gymnases*, par Ern. Dintzl.

Viendront ensuite les rapports concernant les autres types d'établissements :

Universités, par G. de Escherich.

Ecoles polytechniques, par E. Czuber et E. Müller.

Ecoles supérieures de l'agriculture, par O. Simony et Th. Tapla.

Ecoles supérieures des mines, par K. Kobald.

Lycées de jeunes filles, par Th. Konrath.

Musée technologique, par V. Reich.

Ecoles professionnelles, par W. Rulf.

Il y aura en outre un rapport sur *les manuels de mathématiques*, par Ph. Freud.

Belgique. — M. J. Neuberg annonce que la sous-commission belge prévoit cinq rapports qui seront publiés au printemps de 1911 :

Les mathématiques dans les écoles primaires et les écoles normales d'instituteurs, par M. Dock.

Les mathématiques dans les Athénées, collèges et écoles moyennes, par M. Ploumen.

Les mathématiques dans les écoles industrielles, par M. Rombaut.

Sur l'enseignement du dessin dans les écoles primaires et moyennes et dans les Athénées et collèges, par M. Montfort.

L'enseignement des mathématiques dans les Universités et les écoles supérieures, par M. Neuberg.

Danemark. — M. Heegaard, délégué, rapporte. Les travaux préparatoires sont terminés et le rapport d'ensemble sur l'enseignement mathématique en Danemark sera publié dans le courant de l'automne 1910.

Espagne. — M. G. de Galdeano, délégué, a trouvé le meilleur accueil auprès de son Gouvernement et auprès de ses collègues pour la constitution de la sous-commission nationale. Il parle des difficultés que rencontrent les partisans des progrès de l'enseignement scientifique en Espagne, où les études littéraires occupent une place prépondérante. D'importantes réformes sont à l'étude et semblent favorables aux mathématiques.

La *Circulaire N° 2*, a déjà signalé les publications concernant la sous-commission espagnole. M. de Galdeano, présente un nouvel opuscule dans lequel il expose la situation actuelle des mathématiques dans les écoles en Espagne.

Etats-Unis. — La délégation a entrepris une enquête complète sur l'enseignement mathématique aux Etats-Unis suivant une méthode de travail dont nous avons donné un aperçu dans un précédent rapport *(Circ. N° 2)*. M. Upton fait un tableau de l'organisation qui comprend 15 comités, divisés en sous-comités. Leurs rapports préparatoires sont terminés et ont été examinés par les délégués américains au cours de l'été 1910. Ils seront reproduits, tout au moins partiellement, dans différentes revues et feront l'objet d'un Rapport général publié par les soins du *Bureau of Education* des Etats-Unis.

France. — M. Bourlet rapporte. — En France l'organisation des travaux a subi quelque retard, principalement par le fait que les divers types d'établissements se répartissent sur plusieurs ministères. Aujourd'hui la sous-commission est bien organisée, les travaux sont en bonne voie. Plusieurs rapports sont terminés; les autres devront être remis en octobre 1910. La méthode employée est celle d'exposition générale et non de monographies. Les travaux seront répartis sur *cinq volumes*, d'environ deux à trois cents pages chacun, et publiés par la maison Hachette.

Le *premier volume* traitera des mathématiques dans l'*enseignement supérieur:* il sera dirigé par M. de Saint-Germain.

2e volume, L'Enseignement mathématique dans les lycées et collèges de garçons, publié sous la direction de M. Marotte.

3e volume, Les mathématiques dans l'enseignement primaire, publié sous la direction de M. Lefebvre, Inspecteur général.

4e volume, L'enseignement mathématique dans les *écoles techniques* des différents degrés, publié sous la direction de M. Rollet.

5e volume, L'enseignement des mathématiques dans les écoles de jeunes filles (écoles primaires, lycées, écoles professionnelles), publié sous la direction de Mlle Amieux.

Grèce. — (Sans nouvelles récentes.)

Hollande. — M. Cardinaal expose que les rapports sont terminés; ils vont être traduits en français et feront l'objet d'un volume qui sera prêt à la fin de l'hiver.

Le Gouvernement hollandais vient de publier un rapport général sur la réforme de l'enseignement en Hollande. Cette étude, qui est le résultat des travaux d'une Commission officielle, nommée en 1903, donnera lieu à un rapport supplémentaire, rédigé par M. Barrau.

Hongrie. — M. E. Beke rappelle qu'il a déjà eu l'honneur, à Rome, d'annoncer que la Société des maîtres de l'enseignement moyen avait chargé une commission d'examiner les réformes à introduire dans l'enseignement mathématique. Les travaux ont été publiés depuis en hongrois et vont être édités également en allemand. Il s'agit d'un volume d'environ 250 pages. Après un aperçu du développement historique des plans d'études mathématiques en Hongrie, il traite des différentes branches des mathématiques, du mouvement de réformes, de la représentation graphique en arithmétique et en algèbre, de la notion de fonction, des éléments du calcul différentiel et intégral, ainsi que du problème si difficile de la préparation du personnel enseignant. On y trouve aussi un aperçu du mouvement de réformes à l'étranger.

A la suite du Congrès de Rome, une sous-commission a été constituée sous les auspices du Gouvernement et sous la présidence de M. le prof. J. König. La *Circ.* 2 en a donné la composition ainsi que la liste des douze rapports à élaborer; ce sont les suivants :

Ecoles primaires. Par V. Szuppan.

Ecoles primaires supérieures (4 à 6 classes) *(Bürgerschule).* Par J. Wolenszky.

Lycées de jeunes filles. Par A. Visnya.

Ecoles secondaires. Par E. Beke.

Ecoles de Commerce. Par M. Havas.

Ecoles industrielles. Par A. Arany.

Ecoles supérieures de Commerce. Par S. Bogyo.

Ecoles normales d'enseignement primaire. Par Ch. Goldziher.

Ecoles normales supérieures. Par J. Kürschack.

Universités. Par E. Beke.

Polytechnicums. Par G. Rados.

Lycées pour les études pratiques de candidats. Par P. Szabo.

Huit de ces rapports sont déjà terminés et vont être traduits. Le mode de publication n'est pas encore arrêté.

Des essais partiels dans le sens des réformes proposées ont pu être faits dans plusieurs établissements, gymnases, écoles réales et écoles de jeunes filles, notamment dans le gymnase dirigé par M. Ratz, l'un des délégués.

Iles Britanniques. — Sir George Greenhill fait remarquer les difficultés que présente la tâche de la sous-commission anglaise, étant donné qu'il n'existe pas encore d'organisation officielle. Le *Board of Education*, qui suit avec intérêt les travaux de la Commission internationale, a désigné les délégués et les membres de la sous-commission; il se charge de la publication des travaux.

La *délégation anglaise* se compose de Sir George Greenhill, M. Hobson, professeur à l'Université de Cambridge, et M. Godfrey.

La *sous-commission* comprend les membres ci-dessus et M. Ashford, Sir G.-H. Darwin, M. G.-H. Hardy, M. C.-S. Jackson, Sir Joseph Larmor, M. Love et M. Gibson.

M. Jackson a été désigné comme secrétaire.

Le travail de la sous-commission comprendra une série de rapports, dont les premiers seront publiés au commencement de 1911.

Italie. — Quatre des rapports annoncés dans la *circ. n°* 2 sont déjà entre les mains des délégués italiens. Ce sont les suivants :

Sur l'enseignement des mathématiques dans les écoles classiques, par MM. Fazzari et Scarpis.

Sur l'enseignement des mathématiques dans les écoles commerciales et professionnelles, par M. Lazzeri.

Sur les cours de mathématiques pour les élèves ingénieurs, par M. Somigliana.

Sur le doctorat et la préparation des candidats à l'enseignement, par M. Pincherle.

Les autres rapports concernent notamment l'enseignement élémentaire (M. Conti), les écoles normales (M. Conti), et les écoles techniques (M. Scorza).

Le mode de publication sera fixé dans le courant de cet automne.

Norvège. — (Sans nouvelles récentes.)

Portugal. — Les travaux se poursuivent conformément aux indications générales publiées dans la *circ. n°* 2.

Roumanie. — (Sans nouvelles récentes.)

Russie. — MM. Sintzov et Michelson parlent de l'organisation des travaux qui se préparent sous la présidence de M. Sonin. Les rapports doivent être prêts en octobre 1910 et seront examinés dans une réunion que la sous-commission tiendra en novembre. Ils seront publiés en français.

Suède. — Les rapports sont publiés sous le titre de *Berichte und Mitteilungen veranlasst durch die schwedische Abteilung der internationalen mathematischen Unterrichtskommission*. Ils sont dirigés par MM. H. von Koch, délégué, et E. Göransson, secrétaire, et paraissent dans la *Pedagogisk Tidskrift*, à Stockholm.

Trois rapports ont déjà été publiés :

Die Mathematik an den schwedischen Universitäten, von A. Wiman (18 p.).

Die Mathematik an den schwedischen Realschulen, von E. Hallgren u. E. Göransson (28 p.).

Die Mathematik an den technischen Lehranstalten in Schweden, von H. von Koch u. O. Gallander (21 p.).

Les autres rapports, qui sont presque achevés, ont pour objets :

Les mathématiques dans les lycées de jeunes filles, par Mlle A. Rönström ; la préparation des maîtresses de ces établissements, par M. Josephson ; les lycées de garçons ; les écoles primaires et les écoles normales d'instituteurs ; les écoles professionnelles primaires. La sous-commission compte en outre obtenir un rapport sur la préparation des maîtres de dessin, surtout parce que ces professeurs sont chargés de l'enseignement de la Géométrie descriptive.

Suisse. — M. H. Fehr rapporte. En Suisse l'instruction publique dépend des cantons et demi-cantons, sauf pour ce qui concerne l'Ecole poly-

technique fédérale; elle présente une grande variété d'organisation. La tâche des rapporteurs est donc particulièrement difficile.

La sous-commission, composée de 21 membres, a réparti le travail entre des comités, suivant les groupes d'établissements *a. b,...* énumérés par le *Rapport préliminaire*. Ces comités ont adressé un questionnaire aux directeurs et aux professeurs ; après examen des réponses, des programmes et règlements, les rapporteurs ont été choisis comme suit :

Ecoles primaires, M. Stœcklin (Liestal-Bâle).

Ecoles primaires supérieures (Mittelschulen), M. Badertscher (Berne).

Enseignement secondaire supérieur, M. C. Brandenberger (Zurich).

Ecoles supérieures de jeunes filles, M. Gubler (Zurich).

Ecoles techniques moyennes, par L. Crelier (Bienne).

Ecoles de commerce, d'administration, de chemin de fer, par L. Morf (Lausanne).

Ecoles normales d'instituteurs et d'institutrices des écoles primaires, par M. Scherrer (Küsnacht-Zurich).

Les mathématiques dans les universités suisses, par M. J.-H. Graf (Berne), et dans l'*enseignement technique supérieur* en Suisse, par M. Grossmann (Zurich).

Ces rapports seront réunis sous le titre *L'Enseignement mathématique en Suisse. Rapports de la sous-commission suisse publiés sous la direction* de H. Fehr.

Un premier fascicule a paru en janvier 1909; il comprend, après une courte *introduction*, le Rapport préliminaire du Comité central, en allemand et en français, et les questionnaires adressés aux directeurs et aux professeurs.

Pays associés. — M. le président rappelle qu'en dehors des pays ci-dessus, les autres pays possédant un ensemble d'établissements d'instruction publique ont été invités à se faire représenter dans la Commission ; leur participation aux travaux est facultative.

Jusqu'à ce jour seuls les pays ci-après ont répondu à l'appel du Comité central :

Australie, Prof. Carlslaw, Sidney ; suppléant en Europe : Prof. Bragg, Leeds.

Canada, Prof. Bovey, recteur du Collège impérial technique de Londres.

Colonie du Cap, M. Hough, de l'Observatoire royal de Capetown.

Japon. M. Fujisawa, de l'Université de Tokio.

Mexique, M. Valentin Gama, professeur à l'Ecole nationale des ingénieurs, Tacuyaba.

Cela porte à 23 le nombre des pays représentés dans la Commission internationale.

M. le président résume brièvement ces rapports qui montrent que la situation est très favorable dans la plupart des pays. Pendant l'hiver prochain le travail se poursuivra très activement, et, d'ici au printemps, de nombreux rapports pourront être distribués aux membres de la Commission.

Il s'agira ensuite de faire une étude comparée de ces rapports pour chacune des catégories d'établissements et d'en dégager les idées directrices des tendances modernes. Dans quelle mesure

cela est-il possible? Ce sera là précisément l'une des principales questions qu'aura à examiner la Commission dans sa prochaine réunion.

Réunion de 1911. — Dans le *Rapport préliminaire* il est question de réunir la Commission en 1911 pendant les vacances de Pâques. Ce devait être la première conférence. Le Comité central estime qu'il est nécessaire de laisser un intervalle d'au moins un an entre les deux réunions et propose que la prochaine conférence ait lieu en Italie, où les professeurs de l'enseignement secondaire et supérieur témoignent tant d'intérêt aux progrès de l'enseignement mathématique. Les séances auraient lieu au commencement d'octobre dans une ville du Nord de l'Italie sur l'invitation de la délégation italienne. Les délégués présents se déclarent favorables en principe; quelques-uns d'entre eux expriment le vœu que la date soit choisie de préférence en septembre.

Le Comité central tiendra compte dans la mesure du possible des vœux émis après entente avec la délégation italienne[1].

Les notions de calcul infinitésimal dans l'enseignement secondaire. — M. Beke demande dans quels pays ces notions sont introduites *officiellement* dans l'enseignement secondaire. Il s'agit, bien entendu, d'un enseignement d'initiation.

D'après les renseignements fournis par les membres présents ce sont : la France (dès 1902), la Suisse (dans 6 gymnases, calcul différentiel et intégral; dans 6 autres gymnases, selon le calcul différentiel; depuis longtemps); la Russie; l'Autriche; et pour le duché de Bade, la Bavière, et Hambourg dans les écoles réales supérieures.

En France, dit M. Marotte, ces notions sont complètement entrées dans la pratique de l'enseignement et donnent d'excellents résultats; les élèves s'y intéressent beaucoup et trouvent ces leçons faciles.

Dans la plupart des autres pays cette question est à l'étude et ne tardera sans doute pas à recevoir une solution favorable. Du reste, dans beaucoup d'établissements, on laisse généralement une certaine latitude aux professeurs pour le choix de matières des plans d'études.

Après quelques renseignements sur le programme des journées suivantes, la séance est levée à midi. Elle a donné à tous les participants la conviction qu'il s'accomplit dans tous les pays cultivés un travail qui contribuera dans une large mesure aux progrès de l'enseignement des mathématiques.

---

[1] Une premiere entrevue a eu lieu à ce sujet entre M. Castelnuovo et le secrétaire-général, à Genève, le 1er septembre 1910. En raison du climat, la rencontre ne pourrait avoir lieu avant les derniers jours de septembre. Le choix se portera probablement sur Milan ou sur Côme.

Séance Générale Publique
du mercredi 16 août.

La séance est ouverte à 4 heures, à la Salle Ravenstein, devant une nombreuse assistance. Aux membres des sous-commissions nationales s'étaient joints un grand nombre de professeurs belges et étrangers de l'enseignement universitaire et de l'enseignement secondaire public ou privé, ainsi que des représentants de sciences techniques, ainsi que le président, M. Discailles, le secrétaire M. Wittmann et plusieurs membres de la Fédération belge de l'enseignement moyen.

M. F. Klein, président, ouvre la séance et donne la parole à M. Klompers, délégué du Ministère belge des Sciences et des Arts.

Discours d'ouverture.

Allocution de M. T. Klompers, *Directeur général au Ministère des Sciences et des Arts, à Bruxelles.*

Mesdames et Messieurs,

Je suis particulièrement heureux de pouvoir, au nom de Monsieur le Ministre des Sciences et des Arts, qui m'a délégué pour le représenter à cette séance générale, vous souhaiter la bienvenue et remercier chaleureusement votre Comité central de l'honneur qu'il nous a fait en organisant, à Bruxelles, une réunion de la Commission internationale de l'enseignement mathématique.

Messieurs, le Gouvernement suit vos travaux avec un vif intérêt. Préoccupé d'adapter aussi exactement que possible l'enseignement moyen aux conditions vitales du développement de la nation, il soumettait naguère, à l'examen approfondi d'une commission spéciale, tous les problèmes que soulève la rédaction d'un programme rationnel d'études secondaires, répondant aux nécessités si diverses de notre temps. Et ce n'est pas une témérité d'affirmer, tant les progrès des mathématiques sont rapides et leurs applications multiples, que le programme de demain accordera à cet enseignement une importance prépondérante. Nombreux sont

d'ailleurs les avantages qu'il procure; autant, et peut-être, à certains points de vue, plus que nul autre, il apprend à penser juste et donne sûrement à notre raison « la première habitude et le premier pli du vrai », il force l'attention, provoque l'esprit de recherche, fortifie la volonté et contribue, par conséquent, de la façon la plus efficace à cette formation générale, à ce développement des facultés que se propose d'abord l'enseignement secondaire.

Que si certains prétendent que les mathématiques « faussent l'esprit », nous leur demanderons, avec l'un des éminents directeurs de la Revue qui est votre organe officiel, « comment il pourrait se faire qu'en s'efforçant à raisonner juste, on arrivât à fausser l'esprit? La mathématique pure est un modèle d'impeccable logique; elle ne se trompe jamais parce qu'elle opère sur des êtres de raison et parce que ces opérations sont liées et coordonnées entre elles d'une manière rigoureuse ».

Et si l'on va plus loin, si reprenant cette vieille accusation qui indignait Arago, l'on veut que les mathématiques dessèchent le cœur, nous déclarerons bien haut que jamais une science dont les applications permettent à l'homme de hanter les régions de l'air où l'oiseau n'atteint pas et de donner à son vol l'envergure la plus téméraire, que jamais cette science n'a comprimé les battements d'un cœur qui a le sentiment du grand, du beau et du vrai. Au contraire, elle suscite des enthousiasmes ardents et vous tous, Messieurs, représentants les plus autorisés de ces études qui nous sont chères, en avez fait la réconfortante expérience. Pourrait-on, d'ailleurs, rester indifférent devant cette puissance du calcul qui, selon les paroles d'un écrivain français, ancien élève de l'Ecole polytechnique, « pèse les astres et annonce leurs mouvements plusieurs années d'avance, non pas à la minute, ni à la seconde, mais par dixième de seconde; qui, sur l'imperceptible frémissement d'un astre, affirme qu'il y a un astre invisible à un milliard de lieues de nous, qui inquiète celui que l'on voit; qui, enfin, calculant le sens et l'amplitude du frémissement, dénonce le lieu et l'heure où l'on apercevra l'astre inconnu »?

Mais, Messieurs, pas n'est besoin de m'arrêter à cette démonstration de l'importance des mathématiques. En tous les pays, elle a été comprise et de très louables initiatives ont contribué, en ces dernières années, à l'amélioration des parties fondamentales de leur enseignement : l'étude de la géométrie élémentaire s'est faite plus intuitive et accorde une large place au dessin, la géométrie analytique a été simplifiée, l'analyse mathématique s'est développée, l'algèbre financière est devenue l'objet d'un enseignement plus solide et, conséquemment, plus éducatif.

La tâche est loin d'être achevée, toutefois : des questions très difficiles appellent encore un examen attentif et il importe aussi de coordonner les efforts de tous ceux qu'intéresse la diffusion des études mathématiques.

Vous l'avez compris, Messieurs, et lors du Congrès des mathématiciens tenu à Rome, en 1908, vous avez décidé la création d'une Commission internationale ayant pour objet de faire un examen comparé des méthodes et des plans d'étude de l'enseignement mathématique dans les écoles secondaires des différentes nations.

Votre comité central s'est rapidement mis à l'œuvre ; il a organisé la commission, établi le plan général de ses travaux, constitué les sous-commissions qui, en chaque pays, sont appelées à faire connaître les tendances actuelles de leur enseignement ; déjà plusieurs rapports sont publiés : d'Allemagne, d'Autriche, de France nous sont parvenus des travaux remarquables, d'autres, en très grand nombre, sont annoncés qui compléteront l'œuvre si heureusement commencée.

Laissez-moi vous féliciter, Messieurs, de la précision toute mathématique avec laquelle votre travail se poursuit et permettez-moi également de vous dire que si des occupations absorbantes ont empêché la sous-commission belge de répondre aussi complètement qu'elle l'aurait voulu à l'appel que vous lui avez adressé, elle ne tardera pas à suivre votre exemple et elle vous promet aujourd'hui son concours le plus dévoué.

Bientôt, j'en ai l'intime conviction, car le succès de votre entreprise est assuré, l'enseignement mathématique puisera

en tous pays, aux mêmes sources vivifiantes, les idées directrices et les principes généraux. Nous vous serons redevables de ce bienfait, Messieurs, et c'est pourquoi nous vous réitérons nos félicitations et nos remerciements.

Discours de M. F. Klein, président. — M. Klein remercie le représentant du Gouvernement belge des souhaits de bienvenue et des excellentes paroles qu'il vient d'adresser à l'assemblée, puis, dans un discours très goûté, il développe, en allemand, le rôle et les aspirations de la Commission internationale de l'enseignement mathématique. Nous résumons très brièvement les principaux points.

Les mathématiques ne forment pas quelque chose de fini ; comme toutes les sciences elles progressent aussi bien par leur côté purement scientifique que par leurs applications les plus variées. Leur importance dans l'enseignement n'a cessé de croître. Il est donc indispensable que les méthodes et les plans d'études soient adaptés aux conditions actuelles. C'est ce qu'a compris le 4me Congrès international des mathématiciens en chargeant une Commission de faire une étude des tendances modernes de l'enseignement mathématique dans les principales nations.

Le président indique les grandes lignes de l'organisation de la Commission et des sous-commissions nationales. Dès le printemps 1909 le travail effectif a pu commencer dans la plupart des pays afin d'élaborer des rapports demandés par le *Rapport préliminaire* établi par le Comité central et traduit dans les principales langues. L'enquête se poursuit actuellement avec entrain et donnera lieu à des études d'un grand intérêt, ainsi que cela ressort de la séance des délégués qui a précédé cette réunion.

Par la forme de leur exposition et la méthode suivie, les rapports peuvent se répartir en trois catégories. Les uns suivent la *méthode d'exposition systématique,* c'est par exemple le cas pour la France ; dans d'autres pays, par exemple aux Etats-Unis, on suit la *méthode statistique,* par voie d'enquête complète à l'aide de comités et de sous-comités, tandis qu'en Allemagne on a préféré l'exposé par *monographies* pour lesquelles toute liberté est laissée aux auteurs.

Les travaux de la Commission ne manqueront pas d'exercer une heureuse influence sur l'enseignement et plus particulièrement sur celui des mathématiques. Mais ils ont dès maintenant pour effet de produire une certaine émulation entre les divers Etats, puis, dans chacun d'entre eux, de faire mieux connaître sa propre organisation, chose assez difficile surtout dans les pays où l'enseignement n'est pas centralisé. On pourra ensuite se livrer à des comparaisons basées sur des documents établis avec beaucoup de soin sur un plan uniforme pour autant que cela est possible, et tirer parti des expériences et des progrès faits ailleurs.

La Commission ne s'occupe pas seulement des mathématiques pures, mais aussi des branches connexes de l'enseignement scientifique et de l'enseignement technique. M. Klein voit précisément un symbole de ces liens dans la suite des conférences organisées à Bruxelles du 10 au 16 août. Les mathématiques jouissent du privilège de pouvoir être examinées pour elles-mêmes en dehors des passions que soulèvent des questions de théories passagères, de dogmes ou de sentiments. C'est pour cette raison aussi qu'une œuvre internationale telle que celle à laquelle nous collaborons, est plus facile dans ce domaine de la science. Peut-être trouvera-t-elle cependant des imitateurs dans d'autres branches?

Rapports du Secrétaire-Général. — M. Fehr résume le discours présidentiel en français en entrant dans quelques développements destinés à donner un aperçu de l'état actuel des travaux. Il rappelle tout d'abord comment la Commission a pris naissance[1], puis il signale les travaux préparatoires du Comité central qui s'est réuni successivement à Cologne (septembre 1908), à Carlsruhe (avril 1909), à Bâle (décembre 1909), à Gœttingue (avril 1910) et enfin le 9 août à Bruxelles.

Passant rapidement en revue le travail accompli dans chaque pays, il fait ressortir la difficulté de la tâche dans les pays qui n'ont pas une organisation unique. Mais grâce à l'appui des gouvernements et des autorités scolaires et au concours empressé de mathématiciens, les délégations réunissent en ce moment des documents qui donneront une forte impulsion à la réalisation de nouveaux progrès. Ces documents permettront de pénétrer dans l'organisation et les méthodes d'enseignement des nations cultivées. Il s'agira ensuite de dégager les idées directrices des tendances modernes et de coordonner les efforts qui se font de toutes parts en faveur de l'enseignement scientifique.

Les premiers rapports publiés permettent déjà de constater la diversité des organisations et des méthodes suivant les traditions et les qualités de chaque nation. Mais si les plans d'études et les méthodes varient d'un pays à l'autre, les aspirations de tous présentent une belle unité dans l'effort commun de rendre l'enseignement toujours plus vivant et de l'adapter toujours mieux aux besoins de chaque établissement.

Le compte rendu de la séance des délégués donné plus haut nous dispense d'entrer dans le détail de l'exposé au cours duquel le rapporteur a présenté les principales publications concernant la Commission et dont une seconde série d'exemplaires avait été exposée dans la salle.

[1] Voir l'*Enseign. mathém.*, t. VII, p. 382 et p. 471, 1905; et le *Rapport preliminaire*, Introduction. (*L'Enseign. mathém.*, X, p. 446, 1908).

La pénétration réciproque des mathématiques pures et des mathématiques appliquées dans l'enseignement secondaire.

Conférence de M. Carlo Bourlet,
Professeur au Conservatoire national des Arts et Métiers, à Paris.

Messieurs,

Permettez-moi, avant tout, d'adresser en votre nom nos plus vifs remerciements à notre Comité central ;

et d'abord à notre éminent président, M. le professeur Félix Klein, qui, avec tant de bonne grâce et d'autorité, à la fois, a conduit ce matin nos importantes discussions, et dont le nom illustre suffit à lui seul pour garantir par avance l'ampleur et la portée de nos travaux ;

ensuite, au professeur Sir George Greenhill, notre vice-président, dont le grand talent brille au premier rang dans le monde savant et qui, par sa présence assidue, est venu nous apporter la preuve de l'intérêt qu'il porte à notre grande enquête ;

enfin à notre dévoué Secrétaire-général, M. le professeur H. Fehr, la cheville ouvrière de notre vaste organisation, qui a si parfaitement préparé ces réunions et qui, depuis deux ans, travaille sans relâche à assurer le succès de notre entreprise. *(Applaudissements.)*

Vos applaudissements, Messieurs, me prouvent que je viens d'être l'interprète fidèle de nos sentiments à tous.

Messieurs,

Notre président et notre secrétaire vous ont, l'un et l'autre, rappelé tout à l'heure que le Congrès de Rome, en avril 1908, n'avait tout d'abord voulu instituer qu'une vaste enquête sur les mathématiques dans ce que nous appelons en France l'Enseignement secondaire et qui porte ici en Belgique le nom d'Enseignement moyen.

Ce n'est que devant l'impossibilité de limiter le champ des investigations, d'une part à cause de la multiplicité des formes que revêt cet enseignement dans nos divers pays, d'autre part à cause de ses ramifications aussi bien inférieures que supérieures, que l'on décida de ne mettre aucune borne à nos travaux.

Leur objet n'en est pas moins, en fait, assez nettement circonscrit, et c'est de cet objet que je voudrais vous entretenir aujourd'hui, en vous priant, toutefois, de vouloir bien m'excuser si je choisis de préférence mes exemples dans l'Enseignement secondaire français qui, bien évidemment, m'est mieux connu que tout autre.

*
* *

L'enseignement des mathématiques, dans nos lycées, collèges et gymnases de tous pays, passe actuellement par ce que d'aucuns nomment une crise et qui n'est, en somme, qu'une fièvre de croissance, un malaise né de la rapidité même de l'évolution du savoir humain.

Par un labeur formidable, le XIXe siècle, siècle qui sera sans égal dans l'Histoire du monde, nous a légué un trésor de matériaux scientifiques qui se sont accumulés avec une soudaineté et une abondance inimaginables. Brusquement, les professeurs se sont trouvés placés devant ce double problème à résoudre : non seulement acquérir eux-mêmes les connaissances nouvelles au fur et à mesure de leur éclosion, mais encore les faire pénétrer dans leur enseignement. Tandis que les limites de la science reculent de plus en plus loin, le nombre des heures dont nous disposons pour l'enseigner à la jeunesse de nos écoles reste, hélas, invariable. Il faut donc élaguer, simplifier l'enseignement ancien pour faire une place à l'enseignement nouveau. Telle matière qui, il y a vingt ans, n'était professée qu'à l'Université, doit aujourd'hui descendre à l'échelon secondaire. Pour que les fils puissent aller plus avant que leurs pères, il faut que nous aplanissions et que nous rectifions pour eux la route qui conduit aux frontières de nos connaissances actuelles.

Notre rôle, Messieurs, est terriblement lourd, il est capital, puisqu'il s'agit de rendre possible et d'accélérer les progrès de l'Humanité tout entière. Ainsi conçu, de ce point de vue général, notre devoir nous apparaît sous un nouvel aspect. Il ne s'agit plus de l'individu, mais de la société ; et, lorsque nous recherchons la solution d'un problème d'enseignement, nous devons choisir une méthode non pas suivant sa valeur éducative pour l'élève isolé, mais uniquement suivant sa puissance vulgarisatrice pour la masse.

Un enseignement moderne ne saurait se contenter de cultiver les facultés de l'esprit, il doit savoir le meubler de faits, nombreux et précis. Nous n'avons pas à former des philosophes qui vivront en savants ermites, mais des hommes d'action qui devront contribuer, pour leur part, au progrès humain. Et voici pourquoi il ne nous est plus permis maintenant de présenter à nos élèves la science mathématique sous un aspect purement spéculatif et qu'il nous faut, coûte que coûte, plus encore pour rendre service à la société dans son ensemble, qu'à chacun de nos étudiants en particulier, nous efforcer de faire plier les abstractions mathématiques aux nécessités de la réalité.

Ce n'est d'ailleurs là qu'un juste retour ; car, s'il est vrai que les mathématiques sont indispensables à la science appliquée, nous ne saurions méconnaître que c'est dans la Nature qu'elles ont trouvé leurs sources les plus fécondes. Que les mathématiques soient redevables à l'observation des éléments mêmes qui les constituent, que leurs plus beaux problèmes aient pris naissance dans l'étude des phénomènes du monde physique, cela ne fait de doute pour personne. Cependant, avouons-le, nous avons été souvent tentés de l'oublier.

La notion expérimentale de collections d'objets distincts, de leur association, de leur répétition, de leur partage, nous a fourni celle du nombre et de ses opérations élémentaires. Les formes de la nature, idéalisées, régularisées par notre imagination, nous ont conduit à concevoir ces figures irréelles qu'envisage le géomètre. Les mouvements que nous exécutons nous-mêmes ou ceux que nous voyons accomplis

sous nos yeux nous ont fait comprendre la possibilité de rapprocher, de comparer, d'assembler ces figures. Ainsi, sur ces bases d'observation, le mathématicien, par la seule force de son raisonnement logique, a construit un édifice immense. Peu à peu, s'éloignant de plus en plus de cette origine expérimentale, il l'a perdue de vue, ou, ce qui est plus grave, il a souvent *voulu* la perdre de vue ; il a essayé de la masquer sous un appareil verbal, croyant ainsi avoir dégagé sa science de tous les liens matériels qui la faisaient réelle.

C'était là, Messieurs, j'ose le dire, une manifestation néfaste de l'orgueil humain. C'est pour avoir voulu tout tirer de lui-même, c'est pour s'être regardé en quelque sorte comme un dieu omniscient qui se suffit, c'est pour s'être isolé au milieu de l'univers en mouvement que l'homme, pendant des siècles, est resté dans une si grande ignorance des lois naturelles. Et, dans cette nuit obscure du passé, les seuls noms qui brillent sont ceux des Ptolémées, des Archimèdes, de ces génies précurseurs qui ont toujours puisé leur inspiration aux sources inépuisables de la Nature.

Les grands mathématiciens de nos jours ont heureusement renoué cette tradition, et, par la diversité des domaines qu'ils abordent, ils nous donnent l'exemple à suivre. Tandis que les uns assouplissent le calcul au service des sciences expérimentales, les autres reprennent patiemment l'étude philosophique des principes mêmes de notre science et nous font connaître la vanité des prétentions de ceux qui ont cru ou qui croient peut-être encore pouvoir la séparer de la matière.

En partant de la notion ordinale des nombres entiers, considérés comme des symboles déduits les uns des autres par des règles imposées à priori, il est possible de construire une Mathématique purement symbolique qui concorde formellement avec celle que nous avons tirée de l'observation. Cette concordance n'est pas fortuite, nous l'avons voulue ; mais suffit-elle pour que nous puissions légitimement affirmer que nous avons ainsi libéré notre science de l'expérience ? De quel droit identifierions-nous ces symboles ordinaux, créés arbitrairement, avec ces entités cardinales natu-

relles qui sont les nombres entiers ? Dans quelle mesure les équations, auxquelles nous avons donné des noms de figures géométriques, représentent-elles réellement les objets matériels que l'expérience nous a permis de concevoir ? Autant de questions qui, lorsqu'on les a résolues, précisent et dénombrent les données expérimentales qui sont à la base des mathématiques.

Ainsi, Messieurs, deux courants, l'un partant de l'observation, l'autre du symbolisme pur, convergent tous deux au même point. L'un et l'autre nous ont donné une idée plus juste de ce qu'est notre science, de ce qu'elle peut être et de l'usage que l'on doit en faire. Ces deux tendances, la première tournée vers l'application, la seconde vers l'abstraction, ne sont contradictoires qu'en apparence ; et j'aimerais à vous convaincre de l'entente possible et désirable entre ces deux modes.

Analysons donc la question.

*
* *

Il y a un premier point, auquel je faisais allusion à l'instant, sur lequel l'accord est parfait : c'est la nécessité d'harmoniser notre enseignement avec les besoins de la vie.

L'industrie, fille de la science du XIX[e] siècle, règne aujourd'hui en maîtresse dans le monde ; elle a transformé tous les procédés anciens, elle a absorbé en elle presque toute l'activité humaine. Le pauvre paysan qui se sert de machines agricoles et d'engrais chimiques n'échappe pas lui-même à son omnipotence. Notre devoir impérieux est donc de préparer les jeunes gens, dont on nous a confié l'éducation, à connaître, à pratiquer et à faire progresser les sciences expérimentales où cette industrie puise ses forces.

La conclusion qui en découle est inéluctable : Dans nos classes secondaires, le professeur de mathématiques, soucieux, non pas d'*orner* les esprits de ses élèves, mais de rendre service à sa race et à l'humanité, doit résolument écarter de son enseignement tout ce qui n'aura pas une utilité plus ou moins directe dans les applications.

Ceci définit un programme et limite ses matières.

Je sais bien que quelques esprits chagrins ou routiniers déplorent la disparition de certaines questions de luxe, sans utilité pratique, et auxquelles ils attribuent une valeur éducative exagérée. Dès qu'on fait un tableau complet des connaissances mathématiques strictement indispensables à un ingénieur ordinaire, on s'aperçoit aussitôt que le champ ainsi borné est encore immense.

L'obligation de ne pas charger nos élèves d'un bagage inutile et encombrant, de leur faciliter l'acquisition des connaissances pratiques qui leur permettront de faire leur chemin de la vie, nous trace le programme des matières que nous devons leur enseigner. C'est là le premier point à propos duquel nous avons, en général, su nous accorder.

Ces matières ainsi définies, comment les enseigner ? Quels procédés, quels moyens pédagogiques devons-nous préconiser ?

Ici, l'entente est moins complète, et il me faut signaler une confusion fâcheuse qui s'est malheureusement souvent produite, au moins chez nous en France, même dans l'esprit d'hommes de grand talent.

Dès qu'il fut établi que l'enseignement des mathématiques, tel qu'il avait évolué dans nos écoles secondaires, était peu apte à préparer les esprits aux sciences appliquées, quelques réformateurs pressés et irréfléchis accusèrent aussitôt les *méthodes* elles-mêmes. Ayant acquis dans leur jeunesse une certaine somme de connaissances mathématiques, leur esprit se refusa de prime abord à admettre que l'une quelconque de ces connaissances, acquises parfois au prix de grands efforts, puisse être reléguée au rang des objets sans emploi. Tandis qu'il fallait, avant tout, émonder les programmes, supprimer les parties inutiles en pratique, introduire des parties nouvelles indispensables, ils s'ingénièrent uniquement à accommoder les anciens plats à une sauce nouvelle !

Et quelle sauce, grands dieux !

Nous en avons vu qui, pour faciliter soi-disant l'acquisition de l'arithmétique, ont, avec une ingéniosité digne d'un meilleur sort, inventé les appareils les plus compliqués pour

expliquer les choses les plus simples. Nous en avons vu qui, ayant posé en principe qu'en toutes choses l'exemple particulier doit toujours précéder la théorie générale, poussant à l'excès ce principe excellent en soi, exposent la théorie des déterminants par approximations successives en promenant les élèves à travers le dédale effrayant des formules générales de résolution des équations du premier degré à deux, trois et quatre inconnues, résolues par la méthode de substitution. Nous en avons vu qui, sous prétexte de renouveler l'enseignement de la géométrie, se sont contentés d'y supprimer au hasard quelques démonstrations pour les remplacer par une explication vague ou une expérience de menuisier.

Et c'était toujours au fond la même arithmétique, la même algèbre, la même géométrie que l'on enseignait, et dans le même esprit. Les élèves apprenaient toujours que « la suite des nombres premiers est illimitée », ils avaient simplement cessé d'en connaître la raison. L'unité dans la méthode, la rigueur dans la démonstration, ces qualités essentielles et fondamentales d'un enseignement mathématique, avaient sombré dans ce chaos.

Est-ce à dire cependant qu'après avoir revisé avec soin nos programmes, il n'y ait pas lieu de rénover les méthodes d'enseignement ? Certes, non ; mais cette rénovation, si elle est utile ou même nécessaire, doit présenter, à mon avis, un tout autre caractère que celui dont je viens de parler.

Avant tout, une modification pédagogique quelconque ne saurait être limitée à une partie seulement de notre enseignement, au risque d'en rompre l'unité et la continuité. Si, par exemple, nous transformions le mode d'exposition de la géométrie, il serait nuisible de ne faire ce changement que dans les basses classes, comme on l'a proposé, en laissant subsister dans les hautes classes les anciens procédés. Il ne faut pas que ce qui est un axiome aujourd'hui devienne demain une vérité démontrable, et inversement. Toute transformation dans nos méthodes doit donc porter à la fois sur l'ensemble des classes dont le programme comporte l'enseignement modifié.

Cette condition essentielle étant remplie, il nous sera facile de trouver un guide sûr pour faire notre choix entre les divers moyens dont nous disposons, car il nous suffira de nous rappeler sans cesse le but que nous poursuivons. Un même fait mathématique peut être démontré et présenté de diverses manières; mais, parmi ces procédés différents, les uns sont d'élégants artifices et les autres des moyens naturels, les uns sont dénués de toute représentation concrète et les autres, quoique aussi rigoureux, ont une image tangible, les uns sont susceptibles d'extensions et de généralisations et les autres sont bornés à leur propre sphère d'action, les uns ouvrent de larges horizons aux jeunes esprits et les préparent à des connaissances ultérieures et les autres ne suggèrent aucune idée nouvelle. Est-il besoin de dire quel est celui qui aura notre préférence? Ce sera celui qui suivra la voie la plus naturelle, qui sera le plus tangible, le plus général et le plus fécond.

C'est dans cet esprit, Messieurs, que depuis plusieurs années nous luttons patiemment pour le rajeunissement de notre enseignement secondaire en France; c'est aussi dans cet esprit que je vous propose d'en examiner aujourd'hui le détail.

* * *

Les programmes de mathématiques dans nos lycées et gymnases comprennent d'une part l'arithmétique et l'algèbre, d'autre part la géométrie et la trigonométrie. On pourrait y ajouter parfois la mécanique, car dans certains pays cet enseignement est aux mains des professeurs de mathématiques, tandis que dans d'autres, et non sans raison, il est confié aux professeurs de physique.

Les anciennes barrières factices que l'on avait dressées entre l'arithmétique et l'algèbre ont heureusement disparu en même temps que celles qui séparaient l'algèbre de l'analyse. Il est passé le temps où l'on proscrivait l'emploi des lettres en arithmétique et où, sous prétexte de simplicité, on forçait les élèves à cette gymnastique intellectuelle terrible qui consiste à traduire en langage vulgaire tout ce qui

est condensé dans une équation. Depuis vingt ans, l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre a fait dans nos écoles françaises d'admirables progrès dus uniquement aux nécessités de son adaptation aux sciences appliquées.

Résumons-les et essayons de noter au passage les améliorations possibles et désirables.

Il n'est pas, dans tout le programme de nos classes secondaires, de partie plus délicate que les théories de l'arithmétique. Par un contraste étrange et déconcertant, ce sont précisément ces quatre opérations, rudiments indispensables qui constituent la base des connaissances mathématiques, ce sont les fractions ordinaires et décimales et tout leur cortège dont la théorie est ce que notre enseignement élémentaire présente de plus difficile. Pour bien en saisir les démonstrations synthétiques, il faut un esprit ayant une certaine maturité. Aussi, depuis quelque temps déjà, est-on entré résolument dans la voie rationnelle qui consiste à ne faire apprendre aux jeunes enfants que le mécanisme du calcul et à rejeter à la fin l'exposé de ces théories, après l'étude élémentaire de l'algèbre.

Nous n'avons même pas encore été assez hardis dans ce triage heureux. A quoi bon fatiguer les cerveaux d'enfants de dix à treize ans par des variations sans fin sur le plus grand commun diviseur et le plus petit commun multiple, par des propositions fort élégantes, mais parfaitement inutilisables en pratique, sur les nombres premiers et les fractions décimales périodiques ? Que nos élèves apprennent les opérations fondamentales du calcul des nombres entiers, décimaux et fractionnaires, qu'ils sachent manier imperturbablement le système métrique, et le maître trouvera dans des problèmes de pratique courante matière suffisante pour exercer leur raisonnement. A quoi cela servira-t-il à quatre-vingt-dix-neuf élèves sur cent de savoir que la décomposition d'un nombre entier en facteurs premiers n'est possible que d'une seule manière ? et même de savoir réduire une fraction à sa plus simple expression ? On pourrait compter sur les doigts les cas pratiques exceptionnels où cette connaissance pourra être utilisée, comme par exemple le pro-

blème du choix du train d'engrenages nécessaire pour exécuter sur un tour parallèle une vis de pas donné. Ne sera-t-il pas infiniment plus profitable au jeune étudiant de posséder, au lieu de ce bagage pédantesque, des notions pratiques d'algèbre et de géométrie qui auront, en outre, l'avantage appréciable de l'intéresser? Je ne désespère pas, Messieurs, de voir bientôt toutes les théories sur les diviseurs et les nombres premiers définitivement reléguées dans la dernière des classes de la section scientifique de nos écoles secondaires.

Nous avons presque tous connu le temps où l'algèbre occupait cette place réduite et élevée que je voudrais voir réserver aujourd'hui au plus grand commun diviseur et au crible d'Eratosthène. Nous avons assisté à sa descente, par gradins successifs, dans toutes les classes supérieures de nos établissements. Ce fut d'abord l'emploi timide de lettres en arithmétique, l'introduction des équations du premier degré venant enfin détrôner les procédés baroques, les *trucs* arithmétiques dignes de la scholastique du moyen âge. En même temps les élèves de la classe de Mathématiques Elémentaires, la dernière classe scientifique dans nos lycées, recevaient quelques notions — combien réduites et imparfaites ! — sur la variation des fonctions simples.

Je me souviens qu'en 1895, il y a quinze ans, j'eus la hardiesse insigne — qui n'avait pour excuse que mon jeune âge — d'écrire pour les candidats au baccalauréat ès sciences des « Leçons d'Algèbre » qui étaient alors révolutionnaires. Non seulement j'avais débuté par l'exposé direct des nombres négatifs avec des exemples concrets choisis dans les applications usuelles, non seulement j'avais semé d'un bout à l'autre du volume la notion de fonction et de sa représentation graphique, mais j'avais eu l'audace inouïe d'y parler de limites, de continuité et de dérivées ! Si mon éminent maître, M. Gaston Darboux, alors doyen de la Faculté des Sciences de Paris, n'avait pas eu la bienveillance de patronner mon ouvrage et de le couvrir de sa haute autorité, j'eusse vraisemblablement été fort maltraité par bon nombre de critiques de ce temps-là.

Or, il y a un an, mon éditeur me priait avec insistance de remettre au point ce volume et, à l'appui de sa demande, il m'envoyait des lettres de jeunes professeurs qui lui écrivaient : « l'Algèbre de Bourlet est encore — *encore* — un bon ouvrage, mais elle a *vieilli !* » Et je suis certain que ces jeunes collègues, qui ne me connaissent pas, s'imaginent que l'auteur de ce livre préhistorique est un vieillard à cheveux blancs. Si je me permets de citer cet exemple personnel, ce n'est pas pour en tirer vanité, mais uniquement pour constater, avec joie, la rapidité avec laquelle, dans ce domaine au moins, notre enseignement a progressé en France. Ce ne sont d'ailleurs ni moi ni aucun des nombreux auteurs qui ont suivi le même chemin que moi, qui avons été les promoteurs de ce progrès : c'est la nécessité même, c'est l'influence dominante des sciences appliquées dont nous n'avons été que les premiers serviteurs.

La notion de fonction est à la base de toute étude des phénomènes naturels. Du jour où l'enseignement de la physique et de la mécanique quitta l'Université pour pénétrer dans nos écoles secondaires, il fut implicitement décrété que les rudiments de la théorie des fonctions devraient les accompagner. Lorsqu'il y a quinze ans, — après d'ailleurs en avoir fait l'essai sur mes élèves, — j'affirmais que les candidats au baccalauréat apprendraient sans peine le calcul des dérivées, lorsque je réclamais la suppression des spéculations inutiles et l'introduction de tout ce qui sert dans l'application, bien des « sages » d'alors levèrent les bras au ciel. Aujourd'hui, nos futurs bacheliers apprennent la notation différentielle et font déjà quelques quadratures; et nos élèves de Première et de Seconde scientifiques jonglent avec les dérivées.

* * *

Un progrès est d'autant plus facile à réaliser qu'il ne heurte aucune habitude acquise. Si, en moins de vingt ans, nous avons pu donner une aussi large place à l'Algèbre et à l'Analyse dans nos lycées, c'est que le champ était libre. En

arithmétique, nous avons été moins heureux, car il s'agissait de modifier un état de choses fort ancien et de décider le corps des professeurs, non pas à introduire des matières nouvelles, ce qui est assez facile, mais à faire d'amples coupures dans ce que, jusque là, ils avaient coutume de considérer comme l'A B C fondamental de leur enseignement.

En géométrie c'est pis encore.

Pendant des siècles, des générations successives de mathématiciens ont étudié, complété, perfectionné celle dont Euclide nous a donné le plan; et peu à peu l'œuvre du savant grec a pris cette forme définitive qui, semble-t-il, assure la pérennité. Cependant, lorsque, poussés par la nécessité, nous avons voulu initier à cette science des enfants de onze et douze ans, lorsque surtout nous avons voulu leur enseigner une géométrie pratique qui se plie à des applications immédiates au dessin, à la mécanique, aux arts industriels, il nous a fallu constater que la méthode rigide et dogmatique d'Euclide manquait de la souplesse désirable et répugnait à ces jeunes cerveaux.

Ce fut le désarroi. Les uns déclarèrent simplement que cet essai malheureux prouvait que la compréhension de la géométrie exigeait beaucoup de maturité d'esprit et proposèrent de revenir au « statu quo ante »; les autres, plus persévérants et plus confiants dans les capacités de nos étudiants, émirent l'avis que le coupable était non pas l'élève, mais le professeur, et qu'il était temps de rechercher le moyen de rendre la géométrie accessible aux enfants.

L'intention était louable, malheureusement les procédés employés pour la réaliser ne méritent peut-être pas toujours les mêmes éloges. En hâte, car le temps pressait, on a, trop souvent, inconsidérément taillé, coupé, rapiécé et recousu notre géométrie classique. Qu'un théorème paraisse trop difficile, on le supprime ou on le transforme en axiome; qu'une proposition utile en pratique soit trop lente à venir, on lui fait faire un bond en avant dans la suite logique. Ce fut là ce qu'on décora du nom de géométrie expérimentale qui prétendait modestement se contenter de faire connaître aux jeunes enfants des *faits géométriques*, dans un ordre

arbitraire, jusqu'au jour où ils atteindraient les classes supérieures et où on redresserait tout cela d'un seul coup.

Il faut n'avoir jamais enseigné à des enfants pour ne pas savoir quelle trace profonde laisse en eux la première initiation et quel trouble on jetterait dans leurs esprits en superposant deux procédés aussi radicalement opposés. Comme je l'ai dit plus haut, et je le répète ici avec plus de force, une modification pédagogique ne saurait être limitée à une partie seulement de notre enseignement, au risque d'en rompre l'unité et la continuité. Il faut ou reviser l'ensemble ou se résoudre à ne rien changer.

Permettez-moi, Messieurs, une comparaison vulgaire qui précisera ma pensée.

Une formule d'art, l'art gothique, par exemple, étudiée, perfectionnée par des générations d'architectes de talent, nous a livré des chefs-d'œuvre incomparables. Voici un édifice admirable légué par nos pères, parfait dans ses proportions harmonieuses, exactement adapté au but pour lequel il a été élevé et dans lequel chaque partie concourt, pour sa part, à assurer un équilibre judicieux et élégant. Mais, hélas, ce bijou historique ne répond plus aux besoins de notre vie moderne : les vitraux coloriés laissent passer un jour insuffisant, les escaliers tortueux et étroits sont fatigants, les salles sont trop vastes et on y gèle en hiver. Allons-nous remplacer les verreries par des glaces de Saint-Gobain, installerons-nous un ascenseur dans la tour ciselée et diviserons-nous les grandes salles par des cloisons en briques pour y aménager un chauffage à vapeur ? Ce serait un scandale ; et l'architecte moderne, soucieux à la fois de respecter une œuvre d'art et de se rendre utile à ses contemporains, laissera intact le vieux monument, dont il fera un musée, et construira plus loin, suivant une formule nouvelle, un palais moderne luxueux et confortable.

Il en est de même pour la géométrie.

Classons l'antique édifice d'Euclide, admirable d'harmonie et de perfection, au rang des monuments historiques, et bâtissons, suivant un plan nouveau, une œuvre homogène conforme aux nécessités du jour.

Voici, Messieurs, une tâche importante à laquelle nous devons tous travailler. Je suis certain que nos efforts peuvent aboutir et permettez-moi, en terminant, d'esquisser la voie dans laquelle, à mon avis, nous pouvons nous engager résolument.

Deux notions expérimentales sont à la base de toute géométrie : celle des figures idéales que nous envisageons et celle de leur déplacement sans changement de forme. « S'il n'y avait pas de corps solide, a dit Henri Poincaré, il n'y aurait pas de géométrie ». Nous pouvons ajouter qu'il n'y en aurait pas non plus s'il n'y avait pas de mouvement qui permette de rapprocher et de comparer ces corps. La possibilité du déplacement étant la condition primordiale de l'existence même de la géométrie, n'est-il pas naturel de faire de ce déplacement le moyen principal de recherche et de démonstration dans notre nouvelle méthode ? Nous réaliserons, du coup, deux progrès notables ; car, d'une part, nous instituerons un mode d'exposition plus concret et plus accessible, quoique parfaitement rigoureux, et, d'autre part, nous préparerons les voies à l'enseignement de la cinématique qui se présentera ainsi comme le prolongement ou le complément naturel de la géométrie. Au lieu, suivant les errements d'Euclide, de placer en tête des cas d'égalité de triangles destinés à supprimer le plus tôt possible les déplacements de toutes les démonstrations, nous aurons soin, au contraire, de mettre ces déplacements en évidence et, alliant sans cesse l'exercice graphique à la démonstration théorique, nous les réaliserons sous les yeux des élèves avec les instruments du dessin. La théorie et l'application marcheront ainsi de front.

Mais il y a plus.

Puisque dorénavant le déplacement sera pour nous l'instrument fondamental de démonstration, c'est lui qu'il nous faudra étudier tout d'abord, de même qu'un bon ouvrier apprend avant tout à connaître l'outil dont il doit se servir. Or, — et ce n'est pas là l'un des résultats les moins surprenants de cette nouvelle méthode, — notre géométrie, ainsi conçue, prendra une envergure inattendue. Qu'est-ce, en

somme, que dire qu'on peut déplacer une figure invariable et que deux figures égales à une troisième sont égales entre elles, si ce n'est affirmer que les déplacements forment *un groupe*, au sens que Gallois et Sophus Lie ont attaché à ce mot? Parmi eux nous étudierons d'abord les plus simples : les rotations et les translations, et nous constaterons l'existence de sous-groupes invariants. Placés sur ce terrain, nous nous apercevrons alors que ce qui caractérise la géométrie dite Euclidienne, c'est le fait que *les translations y forment un sous-groupe invariant*. C'est donc là le postulat qui pourra remplacer celui auquel on attache le nom d'Euclide.

Il est inutile, Messieurs, que j'insiste sur ce sujet devant un auditoire de mathématiciens; car vous concevez sans peine les conséquences multiples de cette nouvelle méthode d'exposition de la géométrie pure. Présentant les faits sous une forme plus naturelle, elle est plus intuitive et plus accessible aux débutants; mais, d'autre part, se rattachant à la plus vaste des théories modernes, elle ouvre des horizons nouveaux à l'élève curieux. Comme je l'ai dit ailleurs, « cette Géométrie descend plus bas, mais elle monte aussi plus haut ». Certes, les travaux faits dans cette nouvelle voie sont loin d'avoir un caractère définitif; mais les premiers essais sont si encourageants que j'ose affirmer que le doute n'est plus guère permis sur la réussite finale.

Unissons donc nos efforts en un labeur commun. De l'enquête que nous avons entreprise jailliront de nouvelles lumières qui illumineront la route que nous suivons. Sans rien sacrifier des qualités de rigueur, de logique et de précision qui sont l'apanage des mathématiques, nous saurons y discerner l'essentiel, y mettre en évidence les moyens les plus propres à préparer les élèves à la compréhension des sciences expérimentales.

La limite entre les mathématiques pures et les mathématiques appliquées n'existe pas, car ces deux sciences, loin d'être séparées, doivent sans cesse s'entr'aider et se compléter. Cette pénétration réciproque est le gage d'un progrès certain. Elle empêchera les mathématiciens de perdre leurs efforts dans des travaux de spéculation pure, de faire une

œuvre stérile comme le fut jadis, pour une bonne part, celle des philosophes grecs; elle arrêtera les expérimentateurs sur la voie de l'empirisme et les obligera à se soumettre au contrôle sévère de l'Analyse.

Ainsi, Messieurs, appliquant à notre usage la belle devise de notre hôtesse, la nation belge, nous trouverons ensemble la Force dans l'Union.

DEUXIÈME PARTIE

Conférence sur l'enseignement scientifique en Allemagne.

Jeudi 11 août.

Aux séances de la Commission internationale de l'enseignement mathématique viennent faire suite les conférences organisées dans la section allemande d'enseignement par la Société pour le progrès de l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles (*Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaflichen Unterrichts)* sous le patronage du Ministère prussien de l'Instruction publique.

La séance est ouverte par M. le Prof. Thaer, président, directeur de l'Ecole réale supérieure de Holstentor à Hambourg, devant une nombreuse assistance, dans la salle des Conférences du Pavillon allemand. Cette salle est pourvue des derniers perfectionnements techniques pour tout ce qui concerne les conférences scientifiques et les projections lumineuses.

M. le Dr. A. Matthias, wirkl. Geh. Oberregierungrat, prend la parole au nom du Ministère prussien de l'Instruction publique. Il a suivi avec intérêt les progrès des écoles en Prusse où l'enseignement scientifique a fait tant de progrès depuis que les élèves ont été appelés à prendre une part active aux leçons. Le véritable rôle des sciences dans l'enseignement moyen a été longtemps méconnu sous l'influence prépondérante des études classiques. Aujourd'hui on reconnaît leur valeur éducative. Les élèves et les maîtres y apportent un intérêt et un entrain tout particuliers depuis l'introduction des travaux pratiques dans les différentes branches scientifiques.

M. le Prof. Roumen (Anvers), salue l'Assemblée au nom de la Fédération de l'enseignement moyen officiel belge, et Sir Green-

HILL exprime les vœux de la Commission internationale de l'enseignement mathématique pour la réussite des conférences qui vont avoir lieu dans les sections allemandes et françaises.

M. le Dr. MOSCH, Commissaire de l'Exposition allemande d'enseignement, donne un aperçu du but de cette exposition et des dispositions adoptées. Tandis qu'à l'Exposition universelle de Saint-Louis, l'enseignement supérieur était largement représenté, on a préféré cette fois accorder plus de place à l'enseignement élémentaire et secondaire supérieur et représenter en détails l'enseignement dans les différentes branches. Ainsi on trouve d'une manière complète tout ce qui concerne les différents types d'établissements représentés chacun par une école (Ecole réale, Ecole réale supérieure, Gymnase réal, Gymnase et ses différentes variétés). On pourra consulter les plans et photographies des bâtiments scolaires, des classes et des laboratoires, ainsi que les plans d'étude, manuels, procès-verbaux des conférences des maîtres, des séances d'examens, etc.[1] M. le Dr. MOSCH estime que c'est à la grande initiative laissée aux maîtres qu'il faut attribuer les progrès réalisés dans l'enseignement.

Le Président remercie les orateurs et ouvre ensuite le série des conférences en donnant la parole à M. le Prof TREUTLEIN (Carlsruhe).

CONFÉRENCE DE M. TREUTLEIN

sur l'enseignement de la Géométrie.

C'est en quelque sorte un complément de la conférence faite la veille par M. Bourlet. M. Treutlein a derrière lui une longue expérience de l'enseignement. Ses efforts ont constamment porté à développer chez l'élève de l'intuition et de l'expérience géométriques. Aujourd'hui, on ne songe plus à enseigner la géométrie en se bornant uniquement au texte d'Euclide. On attribue une place à l'intuition des élèves et on y parvient en ayant recours à des modèles, au dessin, au pliage, surtout au début.

L'enseignement doit être à la fois expérimental et logique. M. Treutlein développe sa méthode en présentant une série de nouveaux modèles qui vont être édités par la maison Teubner, à Leipzig.

Dans une seconde séance, qui a eu lieu le lendemain à 4 heures, M. Treutlein a montré comment les nouveaux modèles doivent être utilisés à l'Ecole.

---

[1] *L'Enseignement mathématique* a déjà signalé (N° de juillet 1910, p. 315) *le catalogue* spécial de l'exposition allemande d'enseignement; 2 vol. de 300 et 170 p.; librairie Weidmann, Berlin.

Conférence de M. Grimsehl
sur les exercices pratiques de physique.

La seconde conférence est consacrée à la question des exercices pratiques de physique, qui est d'une grande actualité.

M. Grimsehl montre comment on peut organiser des exercices pratiques même dans des locaux relativement petits et avec un matériel très limité. Il donne d'abord une description des exercices pratiques commencés, il y a dix ans, dans des conditions peu favorables, à l'Ecole réale de Uhlenhorst, dont il est le directeur. Après d'heureuses transformations leur organisation passe aujourd'hui pour un modèle d'installation en Allemagne.

On commença d'abord les exercices en attendant d'avoir les locaux nécessaires et l'enseignement de la physique et de la chimie fut donné dans un petit auditoire. Le cours d'exercices pratiques de physique de M. Noack était le seul livre pouvant servir de guide pendant la première période de travaux pratiques. Les élèves n'avaient à leur disposition que des appareils destinés aux démonstrations; on en augmenta le nombre par quelques appareils inventés par M. Noack. Il n'existait toutefois qu'un seul modèle de chaque appareil, aussi les élèves ne pouvaient-ils être occupés simultanément aux mêmes exercices qui consistaient presque exclusivement en répétitions. Pour le maître ces travaux pratiques étaient très fatigants et l'on se vit obligé à recourir à une autre organisation permettant d'occuper plusieurs groupes d'élèves à un même exercice ou à des exercices semblables. Afin d'obtenir des appareils à un très bas prix, les élèves furent chargés de les construire eux-mêmes, c'est-à-dire que les exercices de physique se transformèrent en un enseignement manuel. De cette manière les élèves ont construit avec beaucoup de zèle et non moins de succès des appareils qui sont encore employés aujourd'hui.

On abandonna cependant bientôt cette façon de procéder, car le temps et la peine qui y étaient consacrés n'étaient pas compensés par les connaissances acquises. L'enseignement manuel de la physique fut abandonné au bout d'un an.

Sur ces entrefaites un agrandissement de locaux permit d'établir une salle spéciale pour les exercices de physique. L'installation est très simple et ne consiste qu'en tables avec les conduites faciles à déplacer pouvant amener l'eau, le gaz ou l'électricité. En même temps on inventa des appareils plus simples et aujourd'hui l'école possède une dizaine de modèles de la plupart des appareils. En général, deux élèves travaillent ensemble avec un appareil, ce qui permet à un seul professeur de surveiller les travaux d'une

vingtaine d'élèves. Les exercices sont considérés comme un complément des leçons de démonstrations ou de théorie. Ils sont presque toujours le point de départ de discussions ou de développements théoriques. Quelquefois aussi ils servent à déterminer la valeur d'une constante de physique dont on a besoin dans la leçon. Les appareils qui sont aujourd'hui en usage à l'Oberrealschule d'Uhlenhorst sont presque tous dûs à M. Grimsehl. On peut en voir une grande partie à l'Exposition dans la section allemande d'enseignement. Ils ont été exécutés dans les ateliers Kruss, à Hambourg.

Signalons quelques-uns des appareils et des projets d'expériences que M. G. a présentés à cette conférence : pistolet à ressort et cible pour la démonstration des lois sur le jet horizontal. Appareils pour la démonstration de la loi de Mariotte, pour la détermination du nombre des vibrations en acoustique, pour la mesure de l'allongement dans la dilatation de corps solides. Divers appareils pour l'optique. Mesure de résistance en électricité, etc.

Dans une séance de démonstration qui a eu lieu le même jour, à 4 heures, M. Grimsehl a examiné en détail l'emploi de quelques-uns de ses appareils.

Conférence de M. Schoenichen

sur l'enseignement des Sciences biologiques.

Cette conférence a pour but de montrer comment on organise les cours et les laboratoires de sciences naturelles dans les écoles allemandes. Le maître doit avoir recours à la participation personnelle des élèves; il doit chercher à développer les facultés d'initiative et d'observation dans ses leçons théoriques et les travaux pratiques consacrés aux sciences naturelles. On peut y parvenir, notamment, en faisant construire des dessins, des modèles, du modelage, etc., et faire des expériences.

Le même jour, à 4 $^3/_4$ heures, MM. Schönichen et B. Schmidt ont fait des démonstrations à l'exposition biologique.

Conférence de M. Driesen.

La vie scolaire en Allemagne.

Jeudi soir, à 6 heures, M. Driesen a présenté à un nombreux public le tableau cinématographique et gramophonique de la vie scolaire de la ville de Charlottenbourg. C'est là une intéressante innovation dans le domaine des recherches et de la propagande pédagogiques. M. Driesen n'y est parvenu qu'après avoir

surmonté des difficultés techniques considérables afin de réunir le cinématographe au gramophone par le chronophone.

Le principe est le même que celui de la reproduction des concerts, mais son application à l'école est nouvelle et présente de nombreuses difficultés. Il faut arriver à une concordance complète entre les paroles et les mouvements.

Le but est d'obtenir des tableaux complets et vivants de l'activité scolaire donnant l'illusion de la réalité. Les auditeurs ont pu suivre la vie, l'enseignement et les tendances des écoles de Charlottenbourg par l'entremise de M. Driesen, leur représentant, et cela dans l'ordre suivant : Jardins d'enfants, leçons de calcul dans une classe B (classe d'enfants anormaux), travaux pratiques en physique, leçon de français avec la méthode directe; puis les établissements d'enseignement supérieur avec la « Waldschule » de Charlottenburg et enfin, pour la gymnastique, des exercices d'ensemble avec accompagnement de musique, que le conférencier a obtenu au moyen d'un grand orchestre par gramophone, essai qui devrait être imité.

En résumé, la conférence donnait un aperçu des multiples réformes scolaires introduites à Charlottenbourg.

Vendredi 12 août.

Conférence de M. F. Klein.

Le programme annonçait une conférence de M. Schwering, Directeur de Gymnase à Cologne, avec le titre *Ist Mathematik Hexerei?* Empêché par la maladie, M. Schwering n'a pu se rendre à Bruxelles. M. le Prof. Klein, qui veut bien le remplacer, regrette que le distingué mathématicien et pédagogue qu'est M. Schwering n'ait pu venir développer devant cette assemblée les idées que renferme l'intéressante brochure, qu'il a publiée sous l'anonymat avec le même titre [1], et dans laquelle on trouvera d'utiles directions pédagogiques [2].

M. Klein parle d'abord des travaux qui ont été entrepris en Allemagne sur l'initiative de la Commission internationale de l'enseignement mathématique et présente les monographies déjà publiées. La liste a été donnée plus haut, dans la première partie.

L'objet principal de la conférence est l'emploi de modèles géométriques en mathématiques supérieures. Après avoir rappelé l'influence de Monge et d'Olivier, il présente les modèles les plus

---

[1] *Ist Mathematik Hexerei?* Von einem preussischen Schulmeister. Verlag Herder, Freiburg i. B.

[2] Dans le second rapport intitulé, *Die Organisation der math. Unterrichts an dem höheren Knaben-Schulen in Preussen*, M. Lietzmann reproduit précisément une leçon qu'il a entendue dans une classe de M. Schwering. (v. p. 64 et suiv.).

remarquables construits en Allemagne, notamment les collections Brill et Schilling relatifs à la Géométrie des courbes et des surfaces.

Dans une seconde séance, qui a eu lieu l'après-midi à 4 heures, MM. Treutlein et Klein apportent quelques développements sur l'emploi des modèles exposés.

Conférence de M. Poske,

sur l'enseignement de la Physique.

M. Poske (Berlin), parle *des problèmes de l'enseignement de la Physique* qui sont aujourd'hui d'une grande actualité en Allemagne. Un premier problème est celui des rapports entre l'enseignement des mathématiques et celui de la physique. Cette dernière ne peut pas se passer du secours des mathématiques, et comme l'a montré M. Timerding dans son rapport destiné à la Commission internationale, elle ne peut procéder exactement sans avoir recours au calcul infinitésimal. Les notions fondamentales de ce calcul doivent être fournies par l'enseignement mathématique. M. Höfler a réuni en 4 pages les formules de la physique qui reposent sur le calcul infinitésimal, il les a données dans le supplément de sa « Naturlehre ».

Un second problème est celui de la place à accorder à la technique. Ici il faut un compromis établi avec beaucoup de soins et de tact.

Un choix convenable des matières constitue un troisième problème. On ne doit pas aller trop loin dans la délimitation du champ en faveur d'une étude méthodique trop approfondie, tandis que d'importants chapitres seraient laissés de côté. Le but doit être de donner un tableau d'ensemble du monde physique.

A ce problème se rattache celui de la méthode d'enseignement. Doit-elle être uniquement heuristique ? Le conférencier recommande une combinaison de la méthode heuristique et de l'enseignement de l'exposition. Quant au manuel, il ne doit pas suivre l'enseignement, mais présenter les matières groupées dans leur ordre logique.

D'autres problèmes concernent les travaux pratiques d'élèves. M. Poske montre les différentes directions que l'on peut suivre et termine en présentant une série d'appareils de MM. Noack et Hahn, qui viennent ainsi compléter les démonstrations qui ont été faites dans une séance précédente par M. Grimsehl.

L'après-midi à 4 heures et demie a eu lieu une visite à l'Exposition des instruments de Physique, sous la direction de MM. Poske, Mosch et Drosten ; à cette occasion des expériences ont été faites par les représentants des différentes maisons.

Conférence de M. Bastian Schmid
sur l'enseignement de la Biologie, son but et son organisation.

M. Schmid examine d'abord la question par son côté historique en rappelant le rôle utile qu'a joué la section d'enseignement par ses importants rapports présentés aux congrès des médecins et naturalistes allemands, notamment à Meran. Il indique les difficultés qui restent encore à vaincre, puis il fait un tableau de l'état actuel. Les biologistes allemands s'efforcent à donner un enseignement bien approprié au but de l'instruction secondaire supérieure. Dans certaines branches telles que l'anatomie, la physiologie, l'anthropologie, etc., on peut tirer un grand parti des exercices pratiques en ayant recours au microscope et à quelques préparations. En outre, le professeur peut, en passant, aborder des questions d'ordre philosophique.

Le même jour, à 6 heures, M. Schmid a fait dérouler sur l'écran une série de vues cinématographiques représentant les élèves au travail et il mit en circulation des photographies et des préparations faites par les élèves du Realgymniasum de Zwickau dont il est professeur.

TROISIÈME PARTIE

Conférences sur l'enseignement technique moyen en France.

Samedi 13 août 1910.

Sous le patronage du Ministère du Commerce et de l'Industrie de France, M. Carlo Bourlet avait organisé une série de conférences sur l'Enseignement technique en France, qui eurent lieu dans la Salle du Cinématographe des Chemins de fer français.

M. Chapsal, *Commissaire général du Gouvernement français à l'Exposition de Bruxelles,* en avait accepté la présidence effective.

La première de ces conférences faite par M. Bourlet sur « Les progrès de l'aviation en France, les écoles d'aviation », eut lieu le samedi 13 août, à 9 h. 1/2 du matin. Dans l'assistance se trouvaient au premier rang M. le professeur Félix Klein, Sir Georges Greenhill, M. le professeur Fehr, M. le professeur E. Discailles, président de la Fédération belge de l'Enseignement moyen, et M. Witt-

mann, secrétaire de cette Fédération, MM. les professeurs Dr Thaer, Dr Bode, Dr Grimsehl, M. de Geynst, directeur honoraire d'École normale, etc.

Allocution de M. Chapsal

M. Chapsal prend d'abord la parole. Il dit qu'il est heureux de présider la séance d'ouverture de cette série de conférences à un double titre, d'abord comme représentant à l'Exposition du Gouvernement de la République française, ensuite comme directeur au Ministère du Commerce, où il a collaboré à la grande œuvre de réorganisation de l'Enseignement technique en France dont il sera parlé dans la suite.

Cet Enseignement technique comprend trois degrés :

1° Les *Ecoles pratiques de commerce et d'industrie* et les *Ecoles professionnelles* qui constituent le degré primaire et primaire supérieur. Elles ont spécialement pour but de faire apprendre aux enfants de 12 à 16 ans un métier, et ainsi de remédier à la crise de l'apprentissage qui sévit partout depuis le développement du machinisme. Ces écoles forment non seulement de bons ouvriers, mais aussi des chefs monteurs, chefs d'équipe, chefs d'atelier et contremaîtres.

2° Les *Ecoles d'arts et métiers* (Angers, Aix-en-Provence, Châlons, Cluny, Lille et bientôt Paris) qui sont le degré secondaire. Elles avaient primitivement pour but de former de bons contremaîtres, mais peu à peu le niveau de leur enseignement s'est élevé et actuellement, elles délivrent aux meilleurs élèves des diplômes d'ingénieur, fort appréciés.

3° L'*Ecole centrale des arts et manufactures* qui est la grande pépinière française d'ingénieurs de toutes catégories, et le *Conservatoire national des arts et métiers,* où les professeurs font des cours publics sur les sujets les plus nouveaux et les plus élevés de l'art industriel, constituent enfin l'Enseignement supérieur technique.

M. Chapsal félicite M. Carlo Bourlet d'avoir choisi comme sujet les « Progrès de l'Aviation » qui, par les efforts des hommes de science et des techniciens français, est devenue une œuvre essentiellement française. Les résultats d'ailleurs se montrent en ce moment même, et l'orateur, faisant allusion au circuit de l'Est, dont deux des étapes avaient déjà été franchies par les aviateurs Aubrun, Leblanc et Legagneux, dit que cette grande épreuve met en évidence les deux qualités principales du tempérament français : l'ingéniosité dans l'invention et la hardiesse devant le danger.

Le commissaire général termine en exprimant l'espoir que les

aéroplanes, en annihilant les frontières et en facilitant encore la pénétration réciproque des peuples, soient des instruments de paix et de civilisation dans l'humanité.

Il donne la parole à M. Bourlet qui, après avoir remercié M. Chapsal et l'assistance, commence aussitôt un bref historique de l'Aviation.

Conférence de M. Bourlet

sur les progrès de l'aviation en France et les écoles d'aviation.

Le premier savant qui posa correctement le problème du « plus lourd que l'air » fut un Anglais, George Cayley, qui, en 1809, publia une étude fort bien faite sur le vol artificiel. Cette étude resta ignorée ; ce n'est qu'en 1872 qu'un Français, Pénaud, la découvrit et la prit comme point de départ d'un travail très remarquable qui fut couronné par l'Académie des Sciences de Paris.

Pénaud avait complètement prévu les aéroplanes actuels et avait d'ailleurs déjà montré comment un tel appareil pourrait *planer* sans moteur pourvu qu'il ait assez de vitesse acquise. Il mourut malheureusement fort jeune et c'est à un Allemand, Lilienthal, auquel plus tard on élèvera des statues dans le monde entier, que revint l'honneur d'avoir le premier réussi des vols planés. Le mérite de Lilienthal est moins d'avoir osé des essais considérés comme téméraires que d'avoir allié la recherche scientifique à l'expérimentation en plein air.

Les lois de la résistance de l'air ont été longtemps énoncées d'une façon complètement inexacte ; aujourd'hui encore, elles ne sont que très imparfaitement connues. Newton avait affirmé que lorsque l'air frappe *normalement* une surface plane, la poussée résultante est proportionnelle à l'aire plane et au carré de la vitesse et que son point d'application (centre de poussée) est situé au centre de gravité de la surface. Cette loi est sensiblement exacte, à condition de considérer des surfaces assez grandes pour pouvoir négliger l'influence des bords et de limiter la vitesse entre 10 et 40 mètres à la seconde. Lorsque l'air frappe obliquement le plan, Newton avait cru qu'il suffisait de décomposer la vitesse en deux composantes, l'une parallèle au plan, l'autre $v \sin i$ normale au plan, et que tout se passait comme si l'air frappait normalement avec la vitesse $v \sin i$. En d'autres termes, si P_{90} est la poussée sous l'angle d'attaque 90°, la poussée normale P_i sous l'angle d'attaque i serait donnée par la formule :

$$P_i = P_{90} \cdot \sin^2 i ,$$

et le centre de poussée serait le centre de gravité de la surface.

C'est ce qu'on appelait *la loi du sinus carré*. Or, on dut bientôt reconnaître que cette loi était radicalement fausse, et l'un des mérites de Lilienthal est, avant de construire un appareil ou de se livrer à des essais, d'avoir exécuté une série d'expériences de laboratoire qui lui ont, sinon fait connaître la loi exacte, au moins appris, en gros, comment les choses se passent. Il a ainsi vu deux faits principaux, à savoir : 1° que le rapport $\frac{P_i}{P_{90}}$ n'est pas égal à $\sin^2 i$ mais est *de l'ordre de grandeur de* $\sin i$, 2° que le centre de poussée n'est pas situé au centre de gravité de la surface, quand l'air frappe obliquement, mais que ce centre de poussée *avance vers le bord antérieur lorsque l'angle i diminue*.

Lilienthal construisit alors ses planeurs, qui comprenaient déjà les deux éléments essentiels de sustentation et d'équilibre : les *ailes portantes* et la *queue stabilisatrice*. Au 2000me vol, Lilienthal, pris dans un remous d'air, fit une chute terrible et se tua le 9 août 1896.

Parmi les diverses recherches scientifiques subséquentes, M. Bourlet cite les beaux travaux du professeur américain Langley et du colonel Renard, ainsi que les premiers essais si remarquables de M. Ader qui construisit des machines volantes et le fameux *Avion*, qui est pieusement conservé au Conservatoire des arts et métiers. Il est probable que M. Ader a réussi le premier à voler 200 mètres avec moteur, au camp de Satory, sur son *Avion* en 1897.

Un Français établi en Amérique, Chanute, continua les essais de Lilienthal ; et à son tour Chanute eut pour élèves les frères Orville et Wilbur Wright qui, après avoir longuement étudié le vol plané sans moteur, réussirent avec succès à construire des aéroplanes avec moteur et à effectuer, dès 1903, de véritables vols prolongés.

Mais les frères Wright étaient plutôt de bons commerçants que des hommes de science. Au lieu de faire connaître aussitôt leur invention, ce que n'eurent pas manqué de faire de vrais savants, ils la cachèrent jalousement pour essayer de la monnayer fort cher ; et c'est ainsi qu'ils laissèrent à des Français la gloire d'avoir, les premiers, prouvé *publiquement* la possibilité du vol artificiel et d'avoir doté le monde de ce grand progrès.

Tandis, en effet, que les frères Wright exécutaient, dans le plus grand secret, leurs essais aux Etats-Unis et cachaient jalousement les résultats obtenus, des Français, suivant, eux aussi, les traces de Lilienthal et Chanute, refaisaient le chemin parcouru avant eux, à leur insu, par les ingénieurs américains. Ce furent Ernest Archdeacon et le capitaine Ferber qui firent, à Nice et à Berck, des expériences fort concluantes, et principalement les deux frères Voisin. Méthodiquement, ils firent d'abord de longues expé-

riences en traînant des cerfs-volants et des surfaces volantes, au-dessus de l'eau ; puis ensuite, ils poursuivirent ces essais sur la terre ferme.

Parallèlement, M. Santos-Dumont, le hardi aéronaute brésilien, faisait une série d'essais qui lui permirent d'exécuter, sur biplan, dès 1906, quelques vols en ligne droite de 100 à 200 mètres, à Bagatelle, près Paris.

Le grand événement eut lieu en 1908. MM. Ernest Archdeacon et Deutsch de la Meurthe avaient fondé, en 1904, un prix de 50,000 francs qui serait accordé au premier aviateur qui réaliserait le vol du *kilometre bouclé*, c'est-à-dire qui suivrait un chemin *fermé* d'un kilomètre. Ce prix fut gagné par *Henri Farman* sur un appareil *Voisin*, le 13 janvier 1908.

Ainsi, indépendamment des Wright, sans connaître leurs travaux, les frères Voisin avaient résolu le problème et eux, en vrais hommes de science, ne craignaient pas de faire voir leur appareil en public.

Cet exploit obligea les frères Wright à sortir de l'ombre. Tandis qu'Orville Wright s'exhibait aux Etats-Unis, son frère Wilbur venait en France exécuter une série de vols remarquables. Le branle était donné. Farman et les Voisin ne s'endormirent pas, et pendant que Wilbur Wright tournait en rond au-dessus du camp d'Auvours, Henri Farman, plus hardi et plus confiant en son biplan Voisin, effectuait le premier vol de ville à ville en se rendant, par-dessus les champs et les maisons, de Châlons à Reims.

Les Wright et les Voisin avaient inventé des biplans. C'est à un Français, Blériot, qu'on doit le triomphe du monoplan.

Dans le temps où Farman, Delagrange, Ferber faisaient leurs premières prouesses sur biplan Voisin, les journaux annonçaient ironiquement : « M. Blériot a encore essayé un vol sur son monoplan, il a réussi à quitter terre pendant 200 mètres, mais a brisé son appareil en atterrissant. » Cependant Blériot avec une patience et une ténacité admirables, continuait ses essais, demolissant des appareils, les modifiant, les retouchant avec une foi dans le succès que rien ne pouvait ébranler. Un beau jour, il réussit à s'envoler et du coup, sans préparation, il fila dans les airs d'Etampes jusqu'au voisinage d'Orléans.

Tout le monde connaît les progrès rapides et extraordinaires du monoplan en France, les monoplans Antoinette montés par Latham, le moteur rotatif Gnome dont le principe est dû au colonel Renard et qui a été exécuté par les frères Seguin, etc.

Blériot traversant la Manche, Paulhan volant de Londres à Manchester sur appareil Farman, la semaine de Reims, etc. Les progrès sont si nombreux et si rapides qu'on ne peut plus énumérer.

Avant de faire défiler sous les yeux des assistants une série de

projections, M. Bourlet indique à grands traits les caractéristiques des divers appareils et leurs points communs.

Dans un aéroplane il faut réaliser *la sustentation, l'équilibre* et *la conduite.*

1° *La sustentation.* — Un aéroplane est soumis à trois forces : son poids, la résistance de l'air et la traction de l'hélice. Pour que le centre de gravité de l'appareil décrive une ligne droite d'un mouvement uniforme, il faut et il suffit que, si on transporte ces trois forces au centre de gravité, elles forment un triangle.

La première condition à remplir est donc de disposer des *ailes sustentatrices* capables de développer une poussée d'air assez grande pour fermer ce triangle. Ces ailes sont naturellement près du centre de gravité et de grandes dimensions.

2° *L'équilibre longitudinal.* — Lorsque le triangle des trois forces est fermé, le centre de gravité décrit une ligne droite. Il faut encore que l'aéroplane *ne tourne pas* autour du centre de gravité, c'est-à-dire que la somme des moments des forces par rapport à ce centre soit nulle. C'est là le rôle de la *queue stabilisatrice.* C'est une surface plane de petite dimension qui reçoit une poussée faible, assez faible pour ne pas influencer sensiblement sur le triangle précédent, mais éloignée du centre de gravité, de façon à avoir un grand bras de levier et par suite à fournir un moment assez grand pour réaliser l'équilibre cherché.

L'*équilibre latéral* s'obtient au moyen de la déformation des ailes, soit par gauchissement (Wright), soit par ailerons mobiles (système français).

3° *La conduite.* — Elle est réalisée : A) en hauteur par les *plans de profondeur,* plans sensiblement horizontaux dont l'inclinaison modifie le moment autour du centre de gravité et change l'orientation de l'aéroplane. B) latéralement au moyen du *plan de direction* qui est placé à l'arrière, est vertical, et agit comme le sajou d'un bateau.

M. Bourlet fait ensuite une série de projections du planeur Lilienthal, du biplan Wright et des appareils français : biplan Voisin (avec plans verticaux de dérive), biplans Farman (type Voisin, avec ailerons et sans plans de dérive), monoplan Blériot (avec et sans plan de dérive), monoplan Antoinettte-Levasseur (à ailes symétriques), etc. Puis il fait voir une vue cinématographique de la semaine d'aviation de Reims en 1909.

Le conférencier termine par des indications sur les « écoles d'aviation ».

Il ne parle pas des écoles militaires de Chalais-Meudon et Mourmelon-le-Grand qui ont un caractère tout spécial ; ni des écoles d'apprentissage fondées par les divers constructeurs, uniquement pour former des pilotes et apprendre à leur clientèle à se servir des aéroplanes, car elles n'ont aucun caractère scientifique.

Actuellement il y a des enseignements réguliers organisés en France.

1° A l'Université de Paris, grâce à des dons généreux de MM. Deutsch de la Meurthe et Sakharoff, il a été fondé un Cours d'aéronautique à la Sorbonne, dont le titulaire est M. le professeur Marchis, et une station d'études et essais d'aviation qui est dirigée par le professeur Maurain.

2° Le commandant Roche a créé une *Ecole d'ingénieurs aéronautes,* école d'un caractère privé, mais qui est honorée de subventions officielles. Elle reçoit d'anciens élèves de l'Ecole polytechnique et Centrale, des étudiants de la Faculté des Sciences déjà licenciés, et des élèves admis au concours. La durée des études est d'un an, et les étudiants reçoivent à la sortie, après examen, un diplôme d'ingénieur aéronaute.

L'enseignement, donné par des professeurs de talent tels que MM. Painlevé, Lecornu, etc., et des techniciens spécialistes réputés tels que le commandant Renard (frère du regretté colonel Renard), le commandant Soreau, etc., comprend une partie théorique relative aux connaissances nécessaires aux aviateurs et aéronautes et une partie purement pratique et expérimentale.

En terminant, M. Bourlet souhaite, à son tour, que son pays, poursuivant ses nobles traditions humanitaires, continue à tenir en mains le flambeau du progrès, contribue, pour sa part, en développant cette admirable science nouvelle, comme il a déjà développé l'automobile et les sous-marins, à assurer une ère définitive de paix et de fraternité dans le monde.

Après la conférence, et avant d'entendre celle de M. Tramard, les personnalités présentes, sur l'initiative de M. Schubert, ingénieur à la Compagnie des chemins de fer du Nord français, au nom des compagnies françaises, se réunirent dans un salon de réception pour boire une coupe de champagne.

M. le Commissaire général Chapsal fit un toast de bienvenue aux délégués étrangers, auxquel répondirent M. le professeur Discailles, au nom des Belges, M. le professeur Félix Klein, agissant au nom de la Commission internationale des mathématiques, M. le professeur Thaer, au nom des Allemands, et enfin M. le Dr Haurot, ancien maire de la ville de Reims.

Le samedi soir à 3 heures les auditeurs se retrouvent à la *Section française d'aviation.* M. Bourlet leur présente des modèles réduits de biplans Voisin et Farman, des monoplans de Blériot et Esnault-Pelleterie en vraie grandeur, prêts à fonctionner, un modèle réduit du monoplan Antoinette et le fameux moteur rotatif à sept cylindres Gnome. De nombreuses explications techniques complètent ainsi l'exposé historique et théorique de la conférence du matin.

Conférence de M. Tramard

sur l'organisation du Travail manuel dans les écoles pratiques d'industrie.

M. Tramard indique d'abord le but des Ecoles pratiques d'industrie qui est de « former des employés de commerce et des ouvriers aptes à être immédiatement utilisés au comptoir et à l'atelier » ; donc, outre l'habileté de la main, les élèves doivent acquérir à l'Ecole la connaissance pratique des principales machines-outils. Ces écoles sont adaptées au besoin de chaque région. M. Tramard a exposé plus particulièrement l'organisation de l'Ecole pratique de commerce et d'industrie de Vienne (Isère), dont il est le directeur.

Cette école comprend quatre années d'études. Pour être admis, les élèves doivent être pourvus d'un certificat d'études primaires. Ils entrent à douze ou treize ans. La première année est une année préparatoire pendant laquelle les jeunes élèves cherchent leur voie. Au début de la seconde année, les uns entrent dans la section d'ajustage ou de tournage ; les autres suivent la section de draperie. Il y a aussi une section commerciale. En moyenne, vingt heures par semaine sont consacrées au travail manuel. On s'évertue avant tout à développer l'esprit d'initiative des élèves. Les ateliers sont munis de divers types de machines-outils au maniement desquelles les apprentis sont initiés, de façon qu'ils ne soient pas déroutés en passant dans les ateliers ou les usines dont l'organisation technique s'écarte de celle de l'école.

En dernière année, les élèves sont divisés en équipes, dont chacune construit elle-même au moins une machine-outil ou un moteur complet. C'est une grande satisfaction pour les apprentis de pouvoir — à la fin de l'année scolaire — montrer leurs travaux à leurs parents et aux personnes qui patronnent l'école et de faire marcher eux-mêmes les machines qu'ils ont fabriquées.

Un diplôme de capacité est délivré à la fin des études à ceux des élèves qui ont subi avec succès un examen pratique devant un jury composé d'industriels et de praticiens de la ville. Les candidats ont à exécuter un objet ou à tisser un échantillon d'étoffe, dans l'espace de 18 heures de travail.

L'école, qui a été ouverte en 1902, donne déjà d'excellents résultats. Cette année, il en est sorti 34 jeunes gens ajusteurs, tourneurs et drapiers. Ils trouvent immédiatement à se placer dans les ateliers et usines de Vienne et des environs. Les salaires de début varient de 2 à 3 francs. C'est une école qui forme non des directeurs de travaux ou des chefs de fabrication, mais des ouvriers qui peuvent devenir d'excellents contremaîtres.

M. Tramard a excellement fait ressortir les méthodes d'enseignement appliquées dans son école. Des projections lumineuses ont illustré cet intéressant exposé en montrant l'aspect des ateliers, les machines-outils et, entre autres, quelques-unes des machines fabriquées par les élèves eux-mêmes.

Cette conférence a été complétée l'après-midi, à 4 heures, par une promenade-conférence à l'Exposition française de l'enseignement technique sous la direction de M. Tramard.

Dimanche 14 août 1910.

Conférence de M. Jouglet

sur l'organisation de l'enseignement technique pratique dans les écoles d'arts et métiers.

La seconde journée à la section française débute par la conférence de M. Jouglet, ingénieur de l'Ecole nationale d'arts et métiers d'Aix. Après avoir retracé les raisons qui ont créé peu à peu la crise de l'apprentissage et l'ont amené à l'état aigu qui a réclamé l'attention des pouvoirs publics dans les divers pays industriels, le conférencier expose les grandes lignes de l'enseignement dans les écoles d'arts et métiers.

Leur but est la formation : de chefs d'atelier, d'ingénieurs et d'industriels versés dans la pratique des arts mécaniques.

Les diverses disciplines auxquelles l'esprit des élèves est soumis embrassent :

1° *La culture générale,* étude : du français ; de l'histoire et de la géographie économiques ; de la comptabilité et de la législation industrielles ; de l'instruction civique et morale ; de l'économie sociale ; d'une langue étrangère, anglais ou allemand.

2° *La culture scientifique,* qui comprend l'étude : des compléments de mathématiques nécessaires à la poursuite des questions de mécanique et d'électricité ; de la physique ; de la cinématique ; de la mécanique ; des machines motrices ; de la chimie ; de la métallurgie ; du chauffage et de la ventilation ; de l'électricité industrielle.

3° *La culture technique,* qui permet de poursuivre l'étude raisonnée : des matériaux employés dans la construction mécanique ; de l'outillage à main et des machines-outils ; des mécanismes et des machines ; de la composition mécanique et du dossier de dessins d'exécution ; des principes qui forment la base des arts du modeleur, du forgeron, du mouleur et du fondeur-mécanicien, de l'ajusteur, du conducteur des machines-outils diverses, du monteur ; du prix de revient de l'outillage, des mécanismes et des machines ; de l'organisation des ateliers de modèlerie, de fon-

derie, de forgeage et d'ajustage; des notions sur les constructions civiles et principalement sur l'édification des usines mécaniques.

4° *La culture professionnelle*, qui comprend à la fois l'étude et l'exécution du dessin industriel et celle des procédés rationnels que l'on applique dans la pratique du travail manuel et des travaux mécaniques.

L'école d'arts et métiers est une véritable usine de constructions mécaniques qui se suffit à elle-même au double point de vue technique et pratique. On y élabore au bureau des études les minutes des dessins d'exécution, leurs calques qui permettent de fournir, aux divers ateliers concourrant à l'exécution d'une machine, des dessins identiques pour les pièces à construire; puis les divers ateliers poursuivent, chacun en ce qui le concerne, les travaux de préparation et de façonnage des pièces constitutives de la machine considérée, enfin elle est montée, puis vérifiée au laboratoire d'essais.

Les élèves, au nombre de cent par année d'études, réalisent leurs études pratiques dans l'esprit suivant: en première année, l'effectif, divisé en deux sections, est réparti dans les quatre ateliers où les élèves séjournent, par suite d'un roulement aisé à concevoir, une demi-année à l'ajustage et un sixième d'année dans chacun des ateliers de modèlerie, de fonderie et de forgeage.

Pendant les deux dernières années, les élèves sont spécialisés.

Dans chaque atelier, un chef, secondé par le nombre de souschefs convenable, donne à chaque groupe toutes les instructions nécessaires à l'exécution des travaux, en discutant la valeur respective des divers procédés employables; puis les élèves poursuivent l'exécution des pièces sous l'œil vigilant de leurs maîtres qui n'interviennent que quand un point délicat dans le travail n'a pas été compris par leurs pupilles.

Nous retrouverons dans l'enseignement technique pratique la trace de ce souci du développement de l'individualité, par la nécessité dans laquelle se trouve l'élève de poursuivre les diverses phases de son travail avec un intérêt soutenu, éclairé qu'il a été par l'analyse du but à atteindre et l'étude des voies et moyens employés pour y parvenir; le résultat obtenu varie avec l'intelligence, l'habileté, l'opiniâtreté, la probité et l'enthousiasme avec lesquels il accomplit son labeur.

La première année d'atelier nous permet d'unifier l'acquit de nos élèves en les pénétrant de la valeur des principes de chaque profession, par leur application même, en éclairant ces principes à l'aide des explications techniques qui les justifient. En deuxième et en troisième années d'études, la spécialisation donne à cette méthode pédagogique une force plus grande encore, l'intérêt éveillé chez les élèves au cours de l'exécution des divers travaux en est une démonstration concluante.

Les exercices pratiques, en dehors de ceux qui sont les fondations de chaque spécialité, se trouvent dans les diverses pièces constitutives des machines dont l'exécution se poursuit afin d'assurer l'existence d'un matériel aussi moderne que possible.

Les machines exécutées proviennent soit des études propres de l'école, soit de la communication de dossiers d'exécution faite par les constructeurs français, qui montrent ainsi l'intérêt porté par eux à nos établissements, en même temps qu'ils font connaître leurs produits aux futurs industriels ou techniciens.

Un grand nombre de vues ont été projetées devant l'auditoire qui a pu se convaincre de l'organisation professionnelle d'une des écoles, dans laquelle les élèves suivent un emploi du temps journalier qui comprend :

1 heure et demie de cours, ayant trait soit à la culture générale, soit à la culture scientifique toujours orientée dans le sens des applications ;

1 heure et demie de dessin et de technologie en dessin ;

5 heures d'atelier et d'exercices de technologie pratique ;

3 heures d'étude.

Au cours de chaque semaine, 3 heures de travaux de recherches ou d'applications aux laboratoires de chimie, physique et mécanique, ou électricité industrielle.

L'élève d'une école d'arts et métiers reçoit une éducation nettement orientée vers l'étude des principes et des applications scientifiques, techniques et professionnels qui lui permettent de fixer rapidement son choix sur la combinaison mécanique nouvelle qu'il poursuivra et sur les procédés à employer tant pour sa reproduction graphique que pour son exécution matérielle et économique.

Au cours de l'étude de ce nouvel appareil, de cette nouvelle machine-outil ou de cet engin nouveau, ses connaissances physiques, chimiques, cinématiques et mécaniques lui ont permis de se pénétrer des vérités scientifiques qui en formeront la véritable et solide fondation ; la technologie en dessin lui a fourni les formes les mieux appropriées au but qu'il s'est assigné pour les éléments, les organes mécaniques et les supports dont il a fait choix ; il en connaît les proportions les plus courantes, les raisons d'être ; les travaux professionnels, par les stages qu'il a faits en 1re année, l'ont convaincu de l'importance des principes fondamentaux de chaque profession et il s'est pénétré davantage de leur valeur réelle, de la facilité de leur mise en œuvre, de la sûreté d'exécution de celui qui les applique fidèlement, au cours des travaux qu'il réalise pendant les deux années de spécialisation.

Si son éducation s'arrêtait là, si les disciplines que nous lui donnons n'avaient point d'autre but, notre tâche resterait incomplète, sa culture d'ensemble et la formation de son esprit offriraient

une solution de continuité. Il ne pourrait avoir la conviction d'ensemble qu'il importe d'établir dans son esprit pour qu'il puisse aborder la lutte industrielle avec une confiance en soi, affermie et consolidée par la technique que nous lui voulons, et sans forfanterie, ni recherche, de sa part, de procédés aléatoires trop aisés à trouver.

Appuyé sur les exercices professionnels, ayant mis la main à la pâte, il a pu se rendre compte des difficultés nombreuses qui se dressent devant celui qui veut rendre tangible sa pensée, faire d'une idée ou d'un ensemble d'idées une machine, d'une série de vibrations intellectuelles de la matière façonnée et capable de réaliser un travail particulier, d'une manière continue, sous la conduite et la surveillance, souvent peu éclairées, du machiniste.

La soudure des divers chaînons de son éducation de technicien doublé d'un praticien habile et instruit, n'est point encore faite.

Ce complément indispensable de son éducation, il le trouve dans l'enseignement technique pratique tel que nous le poursuivons dans les écoles d'arts et métiers.

Cette branche de l'art de l'ingénieur forme comme la pierre de touche mise à sa portée pour rendre son esprit plus réfléchi, plus sagace et plus mûr.

Au cours de ses études techniques pratiques, tous ses pas sont marqués par des constatations nouvelles ou des renseignements d'une valeur primordiale d'autant plus grande qu'elle sera contresignée par les faits.

Les formes diverses, que les vérités scientifiques avaient revêtues jusque-là pour l'éclairer, vont subir une métamorphose qui les lui rendra plus accessibles encore et qui fera éclater leur enchaînement étroit.

Comment présenter avec progression ces données importantes pour la maturité de l'esprit de nos élèves ; comment les leur rendre plus aisément assimilables ?

Nous avons résolu ce problème en étendant l'enseignement technique pratique sur l'ensemble des trois années d'études. Nous en faisons un cycle parallèle à celui de l'enseignement professionnel sans éviter les pénétrations réciproques que permettent les démonstrations dont la matière est formée par les travaux en exécution.

Cette méthode donne d'autant plus de fruits que, dans la grande majorité des cas, nous nous adressons à des sujets déjà spécialisés par leurs travaux antérieurs et, pour le reste, à des élèves vite familiarisés avec les principes des autres branches professionnelles que nous appliquons.

La *technologie pratique* embrasse :

1° *l'étude des propriétés physiques, mécaniques et technologiques des matériaux employés en construction des machines;*

2° *l'étude des outils à main et des machines-outils ainsi que des méthodes qui permettent la meilleure utilisation de la main-d'œuvre manuelle et mécanique;*

3° *l'étude des générateurs et des machines motrices en ce qui touche à leur capacité industrielle;*

4° *la vérification des qualités des mécanismes et des machines construites.*

Elle comprend des explications orales données parallèlement au développement de l'enseignement professionnel, dans chaque spécialité, au fur et à mesure de l'exécution des travaux qui forment autant de démonstrations pratiques efficaces et concluantes.

Ces explications sont données par les chefs et sous-chefs d'atelier, à pied d'œuvre.

Chaque semaine, chaque chef d'atelier réunit l'ensemble des élèves auxquels, à des jours et heures marqués par le tableau de l'emploi du temps spécial à cette branche de l'enseignement, des explications ont été fournies, et, dans une conférence d'ensemble, sous une forme suivie et méthodique, il place à nouveau, devant l'esprit de ses élèves, les faits dont ils ont été témoins, accompagnés des explications techniques afférentes à chacun d'eux. Il synthétise et systématise cette partie importante des connaissances que le technicien doit posséder.

Par suite du roulement effectué en première année, tous les élèves ont été éclairés sur les propriétés des matières premières et diverses, de l'outillage à main et du petit outillage mécanique que l'on emploie dans les quatre ateliers pour l'exécution des principes fondamentaux de chaque profession, avec leurs applications dans la confection des modèles, du moulage et de la coulée des petites pièces, du forgeage et de l'ajustage des exercices adéquats. En deuxième année, bien que spécialisés, ils se rendent dans tous les ateliers et reçoivent les explications techniques avec travaux exécutés à l'appui, concernant: la description, le fonctionnement et l'utilisation des machines-outils à travailler les bois et les métaux; les genres de travaux que l'on peut demander à chaque groupe de machines similaires; les procédés de travail employés dans l'industrie; le gros outillage de la forge et de la fonderie pour l'obtention des pièces brutes.

Les élèves, divisés en 2 sections, comprenant chacune 3 groupes de 16 à 18, se rendent à l'atelier où ils doivent recevoir les explications orales et assister aux démonstrations pratiques à l'appui. Le roulement est exécuté conformément au tableau qui a été présenté, lequel porte l'indication des jours et heures des conférences hebdomadaires faites par les quatre chefs d'atelier à l'ensemble d'une demi-division.

Les chefs d'atelier s'appesantissent sur le montage des pièces et

particulièrement, pour le travail en série, sur le réglage des machines et la fabrication de l'outillage.

En troisième année d'études, le programme comporte :

des essais qu'exécutent tous les élèves réunis en groupes de 2 ou 3, suivant la nature de l'essai et le nombre des appareils mis à leur disposition. Plusieurs essais sont poursuivis simultanément, car les laboratoires de mécanique, d'essais des matériaux, d'essais des moteurs ou des machines-outils, occupent des locaux différents.

Ces essais ont pour objet de faire connaître, par l'expérimentation :

les propriétés des matériaux employés dans les constructions mécaniques;

de préciser quelques coefficients relatifs à ces matériaux et qu'on rencontre dans les formules pratiques;

de donner aux élèves des idées nettes : sur la transformation et la conservation de l'énergie dans les machines, sur le rendement industriel des machines et de quelques-uns des mécanismes les plus répandus.

Ces essais se font aux ateliers sous la direction de l'ingénieur et la surveillance d'un chef ou d'un sous-chef d'atelier.

Ils sont conduits de telle façon qu'ils obligent les élèves à chercher, à observer et à méditer ; ils les conduisent à un travail personnel de la plus grande importance pour la formation de leur jugement et leur développement individuel ; ils les entraînent dans la méthode expérimentale, indispensable à celui qui crée, leur donnent de l'assurance et de la confiance en soi et leur montrent la nécessité d'allier le plus étroitement possible la théorie, qui éclaire et guide, à la pratique sans laquelle on ne peut fonder quoi que ce soit de fructueux et de durable.

L'ingénieur réunit, au commencement de chaque semaine, les 50 élèves qui devront procéder à ces exercices pendant la période hebdomadaire qui s'ouvre ; il leur explique sommairement l'essai à exécuter, les procédés que l'on peut suivre, le matériel que l'on peut employer et leur donne les instructions nécessaires pour jalonner leurs recherches de façon à les guider, de loin en loin, dans la marche générale, en leur laissant le loisir d'observer avec attention les phénomènes qui se produisent, d'effectuer les mesures ou les pesées, de relever les données dont l'ensemble correspond au travail de l'essai proprement dit.

Son rôle est rempli de manière à laisser aux élèves une grande liberté, afin que, livrés à eux-mêmes, ils soient obligés de réfléchir et de tâtonner au besoin, le chef ou le sous-chef n'intervenant qu'en cas de nécessité, pour éviter un accident fortuit, matériel ou personnel.

Après chaque essai, les élèves du groupe font un rapport sur l'étude qu'ils ont poursuivie ; le travail de bureau est basé sur

les notes, relevés, mesures et observations faites ou prises au cours de l'essai, il comporte les calculs qui en découlent.

Les onze essais auxquels se livrent les élèves sont les suivants :

I. — *Essais des matériaux.*

1. A la traction, à la compression, à la flexion, sur deux échantillons de métaux différents, dans chaque cas. — Essais au choc, essais de dureté. — Les machines employées sont de sources diverses : machines Falcot, de la Société alsacienne, de Frémont, Scléroscope, appareil de Brinell.
2. Métallographie microscopique. — Etude des résultats obtenus : exemples de microstructure de fers, aciers, fontes, alliages de cuivre.
3. Résistance des bois.
4. Essais de réception des fers et aciers : à froid, à chaud.
5. Essais industriels des fontes.

II. — *Essais de matières diverses.*

6. Essais des huiles ; études sur les courroies.

III. — *Essais sur la transformation de l'énergie.*

7. Combustion et vaporisation dans un générateur à vapeur ; températures des flammes et des gaz par l'emploi des pyromètres ; analyse des gaz par l'appareil Orsat.
8. Essais d'un moteur à vapeur. — Etude de la distribution ; puissance indiquée, puissance effective.

IV. — *Rendement d'organes mécaniques.*

9. Renvoi de mouvement. — Poulie ou éngrenages. — Puissance absorbée par le fraisage, le perçage ou le tournage.

V. — *Réception et contrôle.*

10. Des pièces brutes de fonderie et de forge ; des pièces finies et ajustées.
11. De machines terminées.

Pendant le reste de la 3me année les élèves reçoivent les compléments techniques suivants :

Organisation des ateliers de modèlerie, de fonderie, de forge ou d'ajustage ;

Etude de la composition de fontes données ;

Fonte malléable et acier moulé ;

Procédés employés pour le forgeage de pièces spéciales ou de quelques travaux importants.

Les appareils ou machines nécessaires aux essais, et que l'on ne peut acquérir sur le marché industriel, sont composés et exécutés par les écoles.

Ainsi, la machine à vapeur servant à l'étude de la distribution et à la mesure de la puissance indiquée ou effective, est constituée par un moteur vertical de 220 × 260 développant 5 chevaux effectifs à 60 tours ; il peut recevoir un condenseur séparé.

Étudié et construit par l'école, il comporte : un indicateur Richard permettant les relevés simultanés sur les 2 faces du piston, et un frein de Prony. Les distributions d'admission et d'échappement sont séparées, pour juger convenablement des divers phénomènes qui prennent naissance quand on change les conditions de distribution et de marche de la machine.

Les tiroirs sont cylindriques, formés chacun de deux pistons amovibles sur la même tige, de telle sorte qu'il est possible d'allonger ou de diminuer la longueur totale du tiroir, tandis que l'écartement des lumières reste constant; on peut ainsi changer, à volonté, la longueur du recouvrement extérieur ou intérieur du tiroir. Les excentriques de commande sont à calage et excentricité variable à la main.

Cette machine peut subir toutes les phases de distribution depuis la pleine ouverture continue, pendant un tour complet, jusqu'à la pleine fermeture pendant la même amplitude de mouvement. Le frein de Prony dont elle est munie permet, dans une certaine mesure, la variation de la résistance.

Les élèves peuvent donc se rendre un compte exact des effets néfastes d'un mauvais réglage, en même temps que de l'influence relative des diverses phases de la distribution.

Pourvu d'un ensemble aussi complet de connaissances scientifiques, techniques et professionnelles approfondies par suite de l'exécution d'applications nombreuses, faites méthodiquement aux laboratoires et dans les ateliers, l'ingénieur des écoles d'arts et métiers est capable :

1° de concevoir un mécanisme, un appareil ou une machine destinés à l'industrie mécanique et dont le rôle et les conditions de marche ont été définis, à priori. L'étude à laquelle il peut se livrer comprend deux phases : la conception de la combinaison mécanique nouvelle, formée de supports solides, d'éléments et d'organes mobiles ou fixes; elle provient des recherches auxquelles il s'est livré, dont les principales sources d'information et de documentation sont : les études poursuivies à l'école, les archives de l'usine, au personnel de laquelle il appartient, les connaissances plus ou moins étendues qu'il possède sur les mérites des concurrents et l'étude qu'il a faite du matériel que possède sa firme.

A la suite de la discussion mentale, au cours de laquelle prend naissance, puis se développe dans le cerveau du technicien, l'image virtuelle de la machine à réaliser, ses idées se subdivisent, les points de détail s'éclaircissent et, dans l'établissement d'un mémoire descriptif et justificatif, plus ou moins développé, suivant les cas, les formes et les dimensions des diverses parties s'arrêtent les unes après les autres : l'image virtuelle est fixée.

Jusqu'ici le compositeur-mécanicien n'a travaillé que pour lui; le côté égoïste de son rôle est dès à présent terminé, il en reste la

partie la plus délicate, la plus complexe et la plus longue à remplir.

Au cours de cette élaboration importante qui permettra la traduction graphique et exacte de sa pensée, ses efforts seront dépensés pour autrui.

A l'aide du dessin industriel et de conventions généralement adoptées, dont les diverses physionomies diffèrent peu les unes des autres, le compositeur établit le dossier d'exécution de la machine nouvelle, qui devra représenter, à côté des organismes semblables employés jusqu'ici, soit un rendement industriel plus élevé, soit un moyen de production plus efficace, soit des facilités de manœuvre ou une valeur économique telle que les faveurs du marché lui seront réservées.

Les dessins d'atelier comprennent tout ce qu'a arrêté le compositeur; c'est le recueil des ordres que chacun exécutera au cours de sa tâche individuelle.

Le compositeur a créé, l'ouvrier réalise. Leurs rôles sont inséparables l'un de l'autre, ils se complètent par la poursuite de travaux d'une nature toute différente ; l'un « pense » et traduit sa pensée dans un langage qui atteint, éclaire et conduit l'opérateur; l'autre exécute fidèlement, afin que la machine terminée représente totalement la matérialisation de la pensée créatrice.

Avec le dossier des dessins d'exécution, l'ingénieur des Arts et Métiers poursuivant son rôle, va diriger les efforts : du modeleur qui donnera la forme et les dimensions à chaque pièce, laquelle, une fois coulée, représentera le solide capable des cotes définitives avec le minimum de métal superflu à enlever ; du mouleur qui préparera le moule dans lequel le métal liquide viendra revêtir, en l'épousant avec fidélité, la forme définitive qu'il conservera quand il aura repris la température ambiante ; du forgeron qui sous son contrôle, façonnera les diverses pièces de fer ou d'acier que la température élevée à laquelle il les porte rend plus malléables.

Toutes ces pièces brutes ne seront pas travaillées partout par l'ajusteur, soit manuellement, soit mécaniquement; seules les faces qui devront être en contact au montage, quelques cordons réclamés par l'esthétique, les pièces animées d'un mouvement rapide qui devra s'exécuter sans balourd, recevront l'action de l'outil avec la précision différente que réclamera leur état de repos ou leur état de mouvement, l'effort statique ou dynamique auquel leur résistance devra s'offrir, leur contact ou leur assemblage.

A l'ajustage, notre technicien suivra, d'une manière aussi éclairée qu'au cours des étapes précédentes, la mise aux cotes définitives des diverses parties constitutives de la machine : bâti, supports divers, pièces de la chaîne, cinématique, véritables feeders

de l'énergie mécanique, porte-outil et porte-pièce qui assurent et maintiennent la position relative de l'outil et de la pièce durant le travail. Parmi les divers organes, les uns, massifs et rigides, sont les véritables points d'appui des organes mobiles, légers et agiles qui, tantôt forceront l'outil à mordre profondément le métal pour dégrossir la pièce, tantôt, au contraire, l'appliqueront sur la surface en travail avec la légèreté nécessaire pour assurer un beau fini.

Toutes les pièces sont ajustées, elles ont été vérifiées et contrôlées à l'effet de s'assurer de l'observation des tolérances ; la machine est prête à subir sa mise sur pied, son montage.

Là, le compositeur-praticien va suivre, avec une attention de plus en plus éveillée, les travaux de montage et, dès leur achèvement, la machine — sa machine — apparaîtra dans sa forme et sous ses aspects définitifs. Il ne lui manquera plus, pour ajouter à l'harmonie de ses mouvements, dans quelques cas, à la grâce et à la délicatesse de ses gestes, toujours un peu brusques, qu'un cachet de coquetterie, c'est le peintre qui le lui donnera.

Le rôle que pourra jouer l'ingénieur des Arts et Métiers ne s'arrête pas encore ; de même qu'il a vérifié les coefficients de fatigue adoptés dans l'application des formules pratiques, en se livrant aux essais des matériaux mis en œuvre, grâce à l'emploi des appareils du laboratoire; de même, il lui reste à vérifier si le nouvel outil qu'il va offrir à l'industrie possède bien les qualités dont il s'est ingénié à le doter.

Le laboratoire d'essais va lui procurer les ressources nécessaires ; là, il se convaincra du résultat industriel obtenu, et, au cours de ses vérifications, il puisera une suite d'informations qui lui permettront déjà de perfectionner cette première machine du type nouveau, par l'apport d'une modification de forme d'un appoint de matière ou d'un changement de mécanisme qui la rendra plus adéquate à ses fins ou plus économique d'exécution.

Il sait alors ce qu'il va offrir sur le marché industriel, il lui sera donc aisé de faire connaître et apprécier son produit en même temps que de le défendre.

Ainsi, l'ancien élève de nos écoles, ingénieur des Arts et Métiers, est un technicien éclairé, doublé d'un praticien habile, capable : de composer judicieusement une machine en l'appropriant à ses fins, d'en élaborer les dessins d'atelier, d'en faire poursuivre l'exécution, de vérifier la valeur économique et industrielle des matériaux mis en œuvre, de perfectionner les procédés de construction et de constater si la machine qu'il a conçue et fait construire est bien le moteur ou l'outil nouveau qu'il voulait réaliser. C'est à l'enchaînement méthodique et complet des études qu'il a faites dans nos écoles et tout particulièrement à l'enseignement technique pratique, qu'il doit la lumière dont les effets lui per-

mettent de fonder ses convictions sur des bases solides et, à l'aide de ses connaissances scientifiques et professionnelles, de marcher avec hardiesse et sécurité dans la voie du progrès.

— L'après-midi, à 3 heures, M. Jouglet a conduit ses auditeurs à l'Exposition française de machines.

Conférence de M. Beaufils

sur l'enseignement de l'Electricité industrielle dans les Ecoles pratiques.

M. Beaufils insiste à son tour sur le rôle des *Ecoles pratiques d'industrie* et présente l'organisation de l'*enseignement de l'électricité* dans ces écoles en envisageant plus particulièrement le cas de l'Ecole de Saint-Etienne, dont il est le directeur.

Les élèves doivent, selon lui, posséder une préparation particulière. En raison de la pénétration réciproque de la mécanique et de l'électricité, il faut que le futur électricien soit déjà ajusteur et tourneur, qu'il connaisse la technologie des principales machines, qu'il sache dessiner et résoudre les questions élémentaires d'arithmétique et de mécanique. Il faut qu'il ait un minimum d'instruction technique bien déterminé.

Pour ce qui est de l'*enseignement théorique*, le conférencier pose et développe les conditions suivantes :

1. L'enseignement théorique doit être expérimental et précis, débarrassé de tout ce qui a un caractère spéculatif et historique.

2. Il doit reposer sur de judicieuses comparaisons qui, pour n'être pas toujours rigoureuses, n'en sont pas moins commodes et très efficaces.

3. Il nécessite de multiples appareils de démonstration permettant de familiariser l'élève avec des phénomènes apparemment compliqués.

4. Chaque leçon doit être suivie de nombreux exercices, sous forme de schémas et de problèmes.

A l'appui de sa thèse, M. Beaufils expose, à titre d'exemple, la question des « champs tournants et leur application aux moteurs d'induction » ; il utilise plusieurs appareils de démonstration d'une simplicité remarquable et quelques graphiques ou constructions géométriques, puis des schémas. Après avoir mis en évidence les conséquences industrielles de cette étude, il établit la possibilité de la faire suivre de problèmes et d'installations pour les mesures et les essais qui se présentent journellement.

La question des « manipulations et mesures » retient longuement l'attention du conférencier ; elles n'exigent pas un matériel extrêmement coûteux, car, en dehors des instruments de préci-

sion, tout peut et doit se construire à l'école ; il insiste pour que dans les dispositifs du laboratoire on laisse un peu d'initiative à l'élève et que l'on saisisse toutes les occasions pour faire des manipulations en dehors du laboratoire.

En ce qui concerne le dessin, la méthode ne diffère de celle qui est appliquée en mécanique que par l'analyse schématique du rôle que doivent remplir les appareils et l'étude des dispositifs spéciaux permettant d'y réussir pratiquement.

Une collaboration intime entre le professeur d'électricité, le professeur de dessin et le chef d'atelier permet de compléter chaque année la série des schémas classiques par de nouvelles études et de nouveaux problèmes.

Quant aux travaux exécutés, ils ont trait :

1° A l'entretien du matériel (moteurs, éclairage, sonneries, téléphones, accumulateurs).

2° A la construction des appareils de démonstration, dont le nombre et la nature varient chaque année avec les besoins et l'habileté des élèves.

3° A la construction de machines complètes réclamées par le laboratoire, la plateforme d'essai ou les ateliers eux-mêmes.

Après avoir fait passer sous les yeux du public une longue série d'appareils les plus divers et les plus instructifs, le conférencier fait remarquer que l'intérêt de cette construction réside également dans l'appareillage particulier nécessité par un montage variable avec chaque modèle ; à l'appui de cette remarque, il passe des vues établissant les diverses phases de la construction en 1910 :

1° D'un moteur de 6 HP à vitesse variable.

2° D'une perceuse électrique.

3° D'un moteur asynchrone de 3 HP.

Relevant ensuite, pour la rectifier, une observation faite dans un récent congrès d'électriciens où l'on reprochait au programme d'une école pratique de comporter l'étude d'un « projet de dynamo », M. Beaufils fait remarquer que l'enseignement qu'il vient d'analyser ne produit pas de phénomènes, mais prépare simplement des sujets compétents, des hommes d'initiative demandés et recherchés par les industriels et les directeurs des grandes compagnies et qui sont très appréciés par les ingénieurs qui placent rapidement en eux toute leur confiance.

— Le même jour, à 4 heures, eut lieu une promenade-conférence dans l'Exposition française d'électricité, sous la conduite de M. Beaufils.

QUATRIÈME PARTIE

Le Congrès international de l'Enseignement moyen.

Lundi 15 août.

Séance d'Ouverture.

Le Congrès devait s'ouvrir le lundi matin 15 août à 10 h. L'incendie de l'Exposition en a retardé l'ouverture qui a été reportée à 3 h. après-midi. Au début de la séance le Président, M. Discailles, professeur émérite de l'Université de Gand et membre de l'Académie Royale de Belgique, a dit avec une grande émotion la douleur causée par le désastre de la veille. Les délégués étrangers s'associent au deuil de la Belgique. L'éminent professeur passe ensuite en revue les grands progrès réalisés dans l'enseignement supérieur, dont les méthodes ont donné de bons résultats ; il en appelle pour preuves les sections d'enseignement organisées à l'Exposition.

M. Jules Gautier, Conseiller d'Etat, directeur honoraire de l'enseignement moyen en France, prend ensuite la parole et montre les réformes par lesquelles ont passé les programmes des lycées français au siècle dernier. Il donne un aperçu de l'organisation actuelle dont les méthodes doivent s'adapter davantage aux nécessités de la vie. M. Gautier est partisan des études gréco-latines, mais il estime qu'elles peuvent être faites en deux ou trois ans en n'y appelant toutefois que ceux ou celles qui ont les aptitudes nécessaires.

On donne ensuite la parole à M. Thaer, président de la « Société allemande pour le progrès de l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles », pour sa conférence sur le développement de la méthodologie dans l'enseignement mathématique et scientifique des écoles supérieures. Le distingué directeur de l'« Oberrealschule » de Hambourg passe en revue le but et les méthodes des diverses disciplines scientifiques, depuis les mathématiques à la biologie, en insistant sur les réformes qui sont à l'ordre du jour dans les divers pays. Ainsi, pour les mathématiques, il fait ressortir l'importance de la notion de fonction et des éléments du calcul différentiel et intégral. Pour la physique il montre que l'on tend peu à peu à introduire des exercices pratiques en diminuant les leçons théoriques ; ces exercices doivent même précéder l'enseignement oral.

M. Courtoy, directeur de l'École moyenne de St-Gilles (Bruxelles) et vice-président du Congrès, s'est occupé plus particulièrement de l'enseignement moyen belge. Il a esquissé la réforme générale de l'enseignement secondaire préconisé par la Fédération belge de l'enseignement moyen officiel. Il indique ensuite ce qu'il faudrait faire pour donner aux jeunes professeurs d'athénées une meilleure préparation professionnelle et aux régents des écoles moyennes une culture scientifique plus complète.

M. Wittmann, secrétaire-général du Congrès et de la Fédération de l'enseignement moyen belge, a examiné les garanties que les juridictions pédagogiques et administratives assurent aux membres du personnel enseignant. Son excellent discours fait ressortir que les progrès de l'enseignement dépendent également de l'indépendance de pensée et de la situation accordée aux professeurs. Au point de vue des traitements et des questions de discipline, le corps enseignant belge peut, à beaucoup de points de vue, envier la situation des professeurs allemands et français.

Mardi 16 août.

2me Séance générale. — L'ordre du jour porte la création d'un *Bureau international des Fédérations de l'enseignement secondaire*. Après discussion, l'assemblée reconnaît le rôle utile d'une pareille institution et décide la création d'un Bureau provisoire.

Vient ensuite la question de la création et de l'extension d'un *Office international d'échange de jeunes gens*, dans le but de faciliter l'étude pratique des langues vivantes. De nombreux renseignements sont donnés sur ce qui se fait dans les divers pays. On estime qu'il y a lieu de développer la correspondance interscolaire, de créer des relations plus étroites entre professeurs des divers pays, afin de pouvoir donner aux parents des indications plus sûres. En outre, il y a lieu de faire de la propagande auprès des parents et des élèves pour leur montrer les multiples avantages de séjours à l'étranger.

Conférence de M. Chassagny. — La séance de l'après-midi comporte une conférence de M. Chassagny, inspecteur général de l'enseignement supérieur pour les sciences physiques en France, avec le titre : *Modifications qui ont été apportées depuis 1902, en France, aux méthodes d'enseignement des sciences physiques.*

Le conférencier montre d'abord l'orientation de l'enseignement de la physique dans les lycées français. Pendant la première moitié du XIXe siècle on mit en doute la valeur éducative des sciences expérimentales. Ainsi, en 1841 encore, on ne faisait qu'une petite place à la physique ; on écartait la chimie et l'histoire naturelle.

La physique elle-même n'était enseignée que d'une façon purement spéculative; l'étude des lois de la pesanteur, par exemple, était une occasion de calculs et non d'observations. Mais peu à peu, avec le développement de la science, la physique pénètre davantage dans l'enseignement moyen.

La réforme de 1902 marque un progrès important. Sans être proscrit, le calcul n'occupe plus la première place. L'enseignement est fait à l'aide d'expériences, au moyen d'appareils spéciaux peu compliqués. L'exposé oral est très réduit; les élèves consacrent la plus grande partie de la leçon à des travaux pratiques et y apportent un grand intérêt.

M. Chassagny rend hommage aux professeurs qui ont contribué à la réforme de l'enseignement de la physique en transformant les méthodes et en faisant preuve d'une grande ingéniosité dans la construction d'appareils de démonstration.

C'est par de longs applaudissements que les auditeurs ont remercié M. Chassagny de sa belle conférence.

CHRONIQUE

Les travaux de la Section de Mathématiques et d'Astronomie de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences[1].

Congrès de Toulouse 1-6 Août 1910.

Le Congrès de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences, tenu à Toulouse du 1er au 7 août, a été très intéressant. Il a été présidé par M. le Professeur Gariel, dont le discours d'inauguration était intitulé : *Les applications du froid.*

Les travaux de la section de Mathématiques et d'Astronomie du Congrès de Toulouse ont été organisés par le Président M. Em. Belot, Ingénieur-Directeur des manufactures de l'Etat, à Paris, M. G. Tarry, du Havre, vice-président, et A. Gérardin, de Nancy, secrétaire. Les nombreuses communications furent réparties sur six séances.

1. — M. Ernest Lebon, ancien Président des Sections I et II, présente *deux opuscules de la collection des « Savants du Jour », relatifs à MM. G. Darboux et E. Picard.*

---

[1] Nous devons ces notes à l'obligeance de M. A. Gérardin (Nancy). *Réd.*

J'ai l'honneur de présenter deux nouveaux opuscules de la collection des *Savants du Jour*, dont j'ai entrepris l'an dernier la publication. L'un se rapporte à M. Gaston Darboux, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, l'autre à M. Emile Picard, actuellement président de l'Académie des Sciences. Pour la rédaction de ces deux ouvrages, j'ai suivi le même plan général que pour l'ouvrage analogue sur M. Henri Poincaré, présenté au Congrès de Lille. Qu'il me soit permis d'attirer l'attention sur les parties de ces deux opuscules qui sont plus particulièrement mon œuvre, les notices sur la vie et les travaux de MM. G. Darboux et E. Picard.

2. — M. Em. Belot, Président des Sections fait ensuite deux communications, devant un nombreux auditoire, où l'on remarque M. Cosserat, directeur de l'Observatoire de Toulouse.

1° *Note sur la rotation et la constitution intérieure du soleil.* — La formule des durées de rotation T des planètes sur leur axe, donnée et démontrée dans une note présentée au Congrès de Clermont-Ferrand (1906), fournit par une application sommaire au soleil : $T = 22^j$, alors que la durée moyenne de sa rotation est de $27^j,5$ environ.

La raison de cette discordance est dans ce fait que la distance moyenne des molécules au centre du soleil dépend de sa constitution intérieure. En tenant compte de cette constitution par une loi des densités de même forme que celle qui a été appliquée par E. Roch et Maurice Léwy à la Terre, on trouve par la formule précédente que la durée moyenne de la rotation du soleil doit être comprise entre $24^j,6$ (cas de l'homogénéité) et $28^j,5$ (cas d'une densité nulle à la surface et infinie au centre). La durée moyenne de rotation étant de $27^j,5$, on en conclut que la densité au centre est au moins deux cent fois plus grande que la densité à la surface de la photosphère.

Aucune autre méthode connue ne permet d'obtenir quelques notions sur la constitution intérieure du soleil.

2° *Présentation d'un modèle du système solaire primitif construit à une échelle métrique d'après les formules de la cosmogonie tourbillonnaire.* — Il est parfois difficile d'imaginer dans l'espace les formes et courbes auxquels conduisent les calculs : pour montrer toute la précision de la cosmogonie tourbillonnaire exposée dans plusieurs notes aux Congrès de Clermont-Ferrand (1908) et de Lille (1909), j'ai construit à une échelle métrique un modèle du système solaire primitif permettant d'embrasser d'un coup d'œil les formes des nappes planétaires primitives et des trajectoires de leurs molécules : par là on comprend aussitôt le mode de condensation des planètes dans les nappes tourbillonnaires, leur distribution en distance, et les causes des inclinaisons d'axes et des excentricités d'orbite : le même modèle montre le mode de formation des nébuleuses spirales.

3. — M. Montangerand, astronome-adjoint à l'Observatoire de Toulouse, fait une conférence *Sur des utilisations intéressantes des clichés de la carte photographique internationale du ciel*, puis présente le tome 6 des *Annales de l'Observatoire astronomique de Toulouse*, et son *Etude de la surface focale de l'objectif photographique*, ainsi qu'une *carte photographique du ciel*.

Ces travaux intéressent vivement la section, qui se rend ensuite

à l'Observatoire, après avoir assisté à l'ascension d'un ballon sphérique.

Notons aussi que le meeting d'aviation de Toulouse a eu lieu, en partie, pendant le Congrès, et que plusieurs membres de la section y ont assisté.

4. — Miss Martha Craig, fait ensuite deux conférences, et présente d'abord son *hypothèse expliquant la création, la formation, les mouvements, la destruction et la recréation des corps célestes*, que l'on peut ramener à l'impulsion sous ses deux formes de manifestations: l'impulsion spirale et l'impulsion rectiligne.

Puis Miss Martha Craig parle *sur l'origine de la lumière, la chaleur, la cause des marées* et présente ensuite plusieurs observations intéressantes faites à l'étranger pendant la dernière éclipse de soleil.

Miss Craig a déjà fait de nombreuses conférences à l'étranger devant des auditoires composés de plusieurs milliers de spectateurs.

5. — *Question à l'ordre du jour de la Section*, proposée par le Président :

Plus que toutes les autres, les Sciences Mathématiques devraient être indemnes d'erreurs de raisonnement viciant les résultats obtenus : et cependant les plus grands mathématiciens ont commis des erreurs de ce genre. En faire l'inventaire, les classer par catégories logiques, examiner en quoi elles ont retardé l'évolution de chaque branche des sciences mathématiques ou même comment elles auraient pu contribuer à leur progrès, semble être une œuvre éminemment profitable pour les esprits adonnés aux sciences exactes et capable de fournir la matière de travaux intéressants et variés qui pourraient être poursuivis pendant plusieurs Congrès successifs.

M. Belot a trouvé des exemples peu connus d'erreurs logiques tirées des œuvres de Newton et Laplace.

M. A. Gérardin sur Legendre, Euler, Sophie Germain, Cauchy, Laplace, et autres, et plus de 800 fausses démonstrations du théorème de Fermat [à signaler la question 2855 de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (voir 1904, 285 ; 1905, 275 ; 1906, 65, 110, 150, 200, 248 ; 1907, 31, 275 ; 1908, 60, 230 ; 1909, 272) ; voir aussi *Sphinx-Œdipe* 1909, 45, 95, 121.]

M. G. Tarry cite une erreur de Vallès, et M. le Cdt Litre, une de Bertrand.

6. — M. le Commandant Litre, de Toulouse, fait deux communications :

1° *Le problème de la composition des rotations. — Ce qu'elle n'est pas.*

L'auteur démontre les trois propositions suivantes :

1° Le mouvement qui aurait pour vitesse la résultante des vitesses et pour

accélération, l'accélération totale de Coriolis n'est, à aucun instant, une rotation ;

2° La résultante des vitesses n'est pas et ne peut pas être la vitesse résultante. Il n'est, d'ailleurs, pas plus permis de composer isolément les accélérations que les vitesses ;

3° Dans chaque mouvement composant, vitesse et accélération sont liées entre elles et inséparables du plan qu'elles déterminent : la composition des plans doit précéder celle des lignes.

2° *Ce qu'est la composition de deux rotations. — Le principe de Galilée.*

7. — Puis M. Gaston Tarry, du Havre, expose une intéressante *Note sur les angles hyperboliques.*

Extension de la définition de l'angle hyperbolique au cas où deux semi-droites passant par le centre d'une hyperbole équilatère ont des directions quelconques, par rapport à la direction de l'axe transverse prise pour origine.

Mesure d'un angle hyperbolique, connaissant les directions de ses côtés ainsi que la direction origine.

Démonstration géométrique élémentaire des formules connues qui donnent le sinus et le cosinus de la somme et de la différence de deux angles hyperboliques, au moyen du sinus et du cosinus de ces deux angles.

Application à quelques théorèmes nouveaux :

Si autour d'un point fixe comme sommet on fait tourner un angle hyperbolique de grandeur constante, ses deux côtés marquent sur une transversale fixe deux divisions homographiques qui ont toujours les mêmes doubles réels, quelle que soit la grandeur de cet angle. Le théorème similaire pour l'angle circulaire constant a été qualifié de singulier par Chasles.

Tout angle inscrit dans un segment hyperbolique a pour mesure la moitié de l'angle au centre correspondant. C'est l'extension à l'hyperbole équilatère de la propriété angulaire de la circonférence.

Dans toute hyperbole, les cordes des segments hyperboliques de même aire enveloppent une seconde hyperbole ayant les mêmes asymptotes, c'est-à-dire un double contact à l'infini avec la première. En considérant l'ellipse comme la projection du cercle, on voit immédiatement que pour toute ellipse on a le théorème similaire.

8. — Ensuite M. Jolivet, de Toulouse, présente une *nouvelle démonstration du théorème de* Fermat. (Cette communication sera examinée par le comité de publication) [2].

9. — M. Gardès, de Montauban, fait une communication *sur la réforme du calendrier russe.*

10. — Enfin, M. A. Gérardin présente trois notes à la section :

1° Ayant une identité vraie en même temps aux degrés, 1, 2 et 4, par exemple :

$$1^n + 9^n + (-10)^n = 5^n + 6^n + (-11)^n$$

[1] M. Jolivet publie une brochure sur ce sujet (1 fr. 25) ; 11, boul. Montplaisir Toulouse.

avec

$$n = 1, 2 \text{ et } 4,$$

il est très facile d'en tirer des solutions générales à l'aide de deux indéterminées au premier degré, par exemple

$$(f - 2g)^n + (4f - g)^n + (3g - 5f)^n = (4f - 3g)^n$$
$$+ (2g - 5f)^n + (f + g)^n$$

on pourrait trouver aussi facilement le système des solutions que voici :

$$(6s^2 + 4sk)^n + (3s^2 + 5sk + k^2)^n + (3s^2 - sk - k^2)^n$$
$$= (6s^2 + 4sk + k^2)^n + (3s^2 + 2sk + k^2)^n + (3s^2 + 2sk)^n$$

2° Ayant une solution telle que

$$1^4 + 25^4 + 42^4 = 17^4 + 43^4.$$

on peut en trouver une infinité par la méthode de Fermat.

On pose, en effet,

$$1 + x^4 + (x + y)^4 = y^4 + (x + y + 1)^4 \qquad (1)$$

d'où l'on tire avec

$$x = y + 2p, \qquad (2)$$

$$(p - 4)y^2 + (2p^2 - 8p - 3)y + (2p^3 - 4p^2 - 3p - 1) = 0 \qquad (3)$$

On voit que $p = 4$ étant solution, il suffira, pour en obtenir une nouvelle, de poser $p = a + 4$; le déterminant deviendra

$$(2a^2 + 8a - 3)^2 - 4a\,(2a^3 + 20a^2 + 61a + 51) = Z^2$$

ou encore

$$9 - 252a - 192a^2 - 48a^3 - 4a^4 = Z^2$$

On posera

$$Z = 3 - 42a + fa^2$$

d'où

$$f = -326$$

pour annuler le coefficient de a^2 ; il reste alors

$$Z^2 = (3 - 42a - 326a^2)^2 - a^3\,(g + ak)$$

Si nous faisons

$$a = -\frac{g}{k}, \quad \text{on aura} \quad Z = 3 + 42\,\frac{g}{k} - 326\,\frac{g^2}{k^2}$$

d'où p. L'équation (3) donne alors y, et (2) donne x.

Au lieu de partir de (1), on aurait pu écrire

$$1^4 + (x + 8)^4 + y^4 = x^4 + (y + 1)^4$$

d'où l'on tire

$$y = 2g, \quad \text{puis}$$
$$4\,(x^3 + 12x^2 + 64x + 128) = g\,(4g^2 + 3g + 1)$$

Posons

$$g = x + h\,;$$

nous aurons

$$(45 - 12h)x^2 + (255 - 6h - 12h^2)x + (512 - h - 3h^2 - 4h^3) = 0$$

On écrira que le déterminant est un carré parfait, ce qui donnera une infinité de solutions, à la seule condition d'en avoir une ; or, si l'on annule le coefficient de x^2, ce qui donne

$$h = \frac{15}{4}\,, \quad \text{on aura} \quad x = -\frac{2041}{510}\,, \quad \text{puis } y = -\frac{257}{510}\,;$$

enfin, en prenant les valeurs absolues des inconnues, on obtient la nouvelle solution suivante

$$257^4 + 510^4 + 2039^4 = 253^4 + 2041^4$$

Cette méthode, donnant des solutions à l'infini, permettra de trouver des formules générales de résolution de ce problème.

3° Etat actuel de la démonstration du dernier théorème de Fermat. Notes personnelles.

On entendit dans les autres séances les communications suivantes :

11. — M. Farid-Boulad, du Caire : *Application de l'homologie à la transformation des nomogrammes à points alignés. 1° L'anamorphose homographique complète des nomogrammes à points alignés. 2° Recherche d'une bonne disposition à donner aux nomogrammes. 3° Déformation des échelles curvilignes à intervalles irrégaliers en d'autres échelles à graduation uniforme.*

12. — M. Lucien Libert : *Un catalogue de 1371 étoiles filantes observées du 7 janvier 1897 au 19 septembre 1908* (2e partie).

13. — M. D. A. Pio, de Londres : *Résolution arithmétique de l'équation* $x^5 + ax^3 + \frac{a^2}{5}x = b$:

1° Réduction de l'équation ; 2° Détermination de ω ($x = \rho\omega$) ρ étant un nombre réel toujours positif ; 3° Tableau synoptique pour la résolution ; 4° Exemples.

14. — M. E. N. Barisien : *Résolution de l'équation du 3e degré.* — Exposé d'un procédé de résolution de l'équation du 3e degré :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

en la ramenant à la forme

$$A(x + \alpha)^3 + B(x + \beta)^3 = 0$$

15. — M. G. Sourdille : 1° *Sur la présence certaine de l'eau, de l'air et du gaz constituant une atmosphère à notre satellite et des causes principales de l'influence lunaire exercée sur la Terre ; rayons obscurs de la Lune et de la lumière diffuse ou zodiacale constante autour de la Terre.*

2° *Evaluation de l'épaisseur de l'atmosphère terrestre par le procédé des*

rayons visuels : et amplification d'une communication précédente relative à la présence de l'atmosphère lunaire ainsi que de la lumière diffuse et constante qui existe autour de la Terre.

16. — M. A. Pellet : Sur les équations ayant toutes leurs racines réelles, et les relations qui existent entre leurs coefficients et les modules des racines les plus petites.

17. — M. Fontaneau : *Le principe de d'Alembert et ses applications à l'hydrodynamique.*

18. — M. le Cap. G Fauveau : *Observations de la comète de Halley.* — (Notes extraites de l'*Hydrographic-Bulletin* de Washington D C, 20 avril. Notes communiquées à New-York.) — Il est possible que durant l'apparition de la Comète de Halley un phénomène électro-magnétique puisse se produire. — Des effluves magnétiques pourraient être produites : soit par des décharges électriques, soit par des parties de météorites.

Dans ce cas, des perturbations seront observées dans les appareils de la télégraphie sans fil.

L'effet maximum de perturbation aurait lieu entre le 16 et le 20 mai et particulièrement le 18 mai.

Le compas pourrait être aussi affecté... (suivent différents conseils pour l'enregistrement des observations à bord).

Le Congrès de 1911 se tiendra à Dijon. Le président de la première section sera M. Belot, le secrétaire M. A. Gérardin.

IVme Congrès international de Philosophie.

Bologne, mars-avril 1911.

Conformément aux décisions prises à Heidelberg, en septembre 1908, le IVme Congrès international de Philosophie, placé sous la haute protection de S. M. le roi d'Italie, se réunira à *Bologne* pendant les vacances de Pâques de 1911. Il sera présidé par M. F. Enriques.

Le Comité chargé d'organiser ce Congrès adresse à tous ceux qui s'intéressent aux problèmes philosophiques l'invitation de vouloir bien y prendre part, de manière que les courants d'idées les plus différents puissent s'y rencontrer, et donner lieu à une discussion libre et féconde.

Les travaux du Congrès comprendront des *séances générales*, auxquelles on a voulu donner encore plus d'ampleur en invitant spécialement à y prendre la parole plusieurs illustres représentants de la pensée scientifique, et des *séances de section*.

Les séances générales seront occupées par des conférences et des discussions. On annonce dès maintenant les conférences de MM. S. Arrhenius — G. Barzellotti — E. Boutroux — R. Eucken

— P. Langevin — W. Ostwald — H. Poincaré — A. Riehl — F.-C.-S. Schiller — H. v. Seeliger — G.-F. Stout — F. Tocco — W. Windelband.

Les sections seront au nombre de huit : 1. *Philosophie générale et Métaphysique.* — 2. *Histoire de la Philosophie.* — 3. *Logique et Théorie de la Science.* — 4. *Morale.* — 5. *Philosophie de la Religion.* — 6. *Philosophie du Droit.* — 7. *Esthétique et Méthodique de la critique.* — 8. *Psychologie.*

La Commission chargée de l'organisation des travaux et de la section 3 est composée de MM. Masci, Volterra et Peano.

Les communications destinées au Congrès doivent être envoyées au secrétaire-général, M. G.-C. Ferrari (Bologna, Piazza Calderini 2) avant le 1er janvier 1911, afin que les Commissions organisatrices des sections puissent juger de leur admissibilité et en préparer l'impression et la distribution préliminaire aux adhérents inscrits au Congrès, de façon à rendre les discussions plus rapides et plus profitables.

Pour les communications ainsi que pour les discussions, quatre langues sont admises : allemand, anglais, français, italien.

La carte de membre a été fixée à 25 fr.

Société mathématique suisse.

Réunion de Bâle, 4-6 septembre 1910.

Nous avons déjà annoncé la fondation de la *Société mathématique suisse,* due à l'initiative de MM. Fehr (Genève), Fueter (Bâle) et Grossmann (Zurich). L'assemblée constituante a eu lieu à Bâle, à l'occasion de la 93e réunion annuelle de la *Société helvétique des Sciences naturelles,* le dimanche 4 septembre 1910. Le nombre des adhésions était de 102.

D'après les statuts, proposés par le Comité d'initiative et adoptés après de légères modifications, la Société mathématique suisse constitue une section permanente de la Société helvétique des Sciences naturelles ; ses séances ordinaires ont lieu en même temps que celles de la Société helvétique.

La Société est dirigée par un comité de trois membres nommés pour deux ans ; le président sortant de charge n'est pas immédiatement rééligible. Le Comité pour les années 1910 et 1911 a été constitué comme suit : *Président,* R. Fueter, professeur à l'Université de Bâle ; *vice-président,* H. Fehr, professeur à l'Université de Genève ; *secrétaire-caissier,* M. Grossmann, professeur à l'Ecole polytechnique fédérale, à Zurich.

La première réunion scientifique a eu lieu le mardi 6 septembre, au Bernoullianum, comme séance de section de la réunion de la Société helvétique des sciences naturelles. Neuf communi-

cations figuraient à l'ordre du jour; ce sont celles de MM. Fehr (Genève), Fueter (Bâle), Grossmann (Zurich), Lemmel (Zurich), Meissner (Zurich), Mirimanoff (Genève), Prasil (Zurich), Rudio (Zurich) et Spiess (Bâle). Nous en donnerons un compte rendu dans le prochain numéro.

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Allemagne. — Un *cours de Stéréophotogrammétrie*, dirigé par le Dr C. Pulfrich, aura lieu à Iéna, du 3 au 8 octobre 1910, sous les auspices de la fondation Carl Zeiss. Les instruments seront fournis par la maison Zeiss. Les inscriptions sont reçues auprès de M. Pulfrich, Kriegerst. 8, Iéna.

— M. Conrad Müller, privat-docent à l'Université de Gœttingue, est nommé professeur de mathématiques à l'Ecole technique supérieure de Hanovre.

Privat-docents. — Ont été admis en qualité de privat-docents : M. Th. v. Karman, pour la mécanique appliquée, à l'Université de Gœttingue ; M. L. Lichenstein, pour les mathématiques pures, à l'Ecole technique supérieure de Berlin ; M. H. Rosenberg, pour l'astronomie, à l'Université de Tubingue.

Etats-Unis. — MM. Babb, Chambers, Gleen et Hallett ont été nommés professeurs de mathématiques à l'Université de Pensylvania (Philadelphie).

M. O. Kellog est nommé professeur de mathématiques à l'Université de Missouri, Columbia, Mo.

M. W.-M. Mitchell est nommé professeur extraordinaire d'astronomie à l'Université de Michigan.

M. E.-F. Wilczynski est nommé professeur extraordinaire de mathématiques à l'Université de Chicago.

M. H.-L. Wolf est nommé professeur extraordinaire à l'Université de Wisconsin, à Madison.

M. F.-W. Joung, de l'Université de l'Illinois, est nommé professeur à l'Université du Kansas.

M. O. Veblen, de l'Université de Princeton, a été promu professeur titulaire.

Italie. — MM. E. Ciani, de l'Université de Gênes, G. Fubini, de l'Ecole Polytechnique de Turin, B. Levi, de l'Université de Cagliari, ont été nommés professeurs ordinaires.

M. V. Volterra, de l'Université de Rome, a été nommé associé étranger de la Société Royale de Londres.

M. U. Dini, de l'Université de Pise, a été élu président de la Société italienne des Sciences (dite des XL) ; M. T. Levi-Civita, de l'Université de Padoue, membre de la même société.

— *Reale Accademia dei Lincei.* — MM. G.-A. Maggi et P. Pizzetti, de l'Université de Pise, ont été nommés associés nationaux; M. J.-H. Poynting, de l'Université de Birmingham, associé étranger; M. F. Severi, de l'Université de Padoue, membre correspondant.

Suisse. — *Université de Genève.* — M. A. Padoa, professeur à l'Institut technique de Gènes, donnera une série de conférences, en français, sur la *Logique mathématique.* Elles auront lieu au commencement du semestre d'hiver, à la fin de la deuxième quinzaine d'octobre.

Privat-docent. — M. L. Biberbacher, privat-docent à l'Université de Gœttingue, a été admis comme privat-docent pour les mathématiques à l'Université de Zurich.

Nécrologie.

L. Olivier. — Nous enregistrons avec un très vif regret la mort de notre distingué confrère M. Louis Olivier, fondateur et directeur de la *Revue générale des Sciences pures et appliquées.* La mort l'a terrassé brutalement, en pleine force, au moment même où paraissait le numéro du 15 août.

Né à Elbeuf le 29 juin 1854, Louis Olivier s'intéressa de bonne heure aux sciences; ses recherches se portèrent plus particulièrement vers la Biologie et fournirent d'importantes contributions à la Physiologie végétale et à la Bactériologie. Mais depuis 1890 son activité fut entièrement consacrée à la *Revue générale des Sciences pures et appliquées,* dont il fut le fondateur et qui ne tarda pas à devenir l'un des périodiques scientifiques les plus appréciés dans le monde entier. Esprit encyclopédique, témoignant un égal intérêt à toutes les découvertes, à toutes les théories ou applications nouvelles dans tous les domaines de la science, il savait choisir ses collaborateurs parmi les savants les plus compétents de chaque branche. Qu'il nous suffise de rappeler ici, pour les mathématiques, les noms de Borel, Duhem, Hadamard, Poincaré, Picard. La collection des vingt volumes parus représente en quelque sorte l'histoire de la science depuis vingt ans, à laquelle ses intéressantes *revues annuelles* apportent des contributions fondamentales. Une pareille publication ne saurait disparaître, aussi nous joignons-nous au vœu exprimé de toutes parts pour que l'œuvre d'Olivier soit continuée.

Les questions d'enseignement intéressaient également Olivier par l'influence qu'un enseignement bien approprié peut exercer sur les progrès des sciences pures et appliquées. Il ne l'a pas seulement prouvé dans sa *Revue,* mais nous en avons eu des preuves directes par ses conseils et ses paroles encourageantes, lorsqu'il y a douze ans nous lui faisions part de notre projet de fondation de *L'Enseignement mathématique.* La Rédaction.

Eugène Rouché. — On annonce la mort du mathématicien français Eugène Rouché, survenue le mois dernier à Lunel. Né à Sommières (Gard) en 1832, il était ancien élève de l'Ecole polytechnique. Il consacra sa carrière entièrement à l'enseignement et à la science. Il fut successivement professeur au Lycée Charlemagne et à l'Ecole centrale, examinateur d'entrée à l'Ecole polytechnique, puis professeur au Conservatoire national des arts et métiers. Ses travaux scientifiques appartiennent à l'Algèbre, à l'Analyse, à la Mécanique analytique, au Calcul des Probabilités et surtout à la Géométrie; quant à ses travaux didactiques, publiés, seul ou en collaboration avec d'autres savants, ils sont bien connus et très appréciés non seulement en France, mais aussi à l'étranger. Son beau Traité de Géométrie, publié avec de Comberousse, a largement contribué à répandre dans l'enseignement les théories de la Géométrie moderne.

Eugène Rouché faisait partie de l'Académie des Sciences depuis 1896, en qualité d'académicien libre.

— G. Davidson, professeur à l'Université de Californie, est décédé à l'âge de 84 ans.

J.-G. Galle, ancien professeur d'astronomie à l'Université de Breslau, est mort à Potsdam à l'âge de 98 ans.

L'astronome italien Schiaparelli, sénateur, ancien directeur de l'Observatoire de Milan, est décédé à l'âge de 75 ans.

Le professeur Sokolow, vice-directeur émérite de l'Observatoire de Pulkowo, est décédé à l'âge de 57 ans.

J. Weingarten, professeur à l'Université de Fribourg i. B., est décédé à l'âge de 74 ans.

NOTES ET DOCUMENTS

Cours universitaires.

Semestre d'hiver 1910-1911 (suite).

ALLEMAGNE

Berlin; *Universität*. — Schwarz : Diff.-rechnung, 4 ; Übgn. ; Anw. der ellipt. Funktionen, 4 ; Th. der komplexen Zahlgrössen, 2 ; Mathem. Kolloquien ; Seminar. — Frobenius : Algebra, 4 ; Seminar. — Schottky : Allgemeine Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen, 4 ; Potentialtheorie des Raumes und der Ebene, 4 ; Seminar. — Hettner : Über

unendliche Reihen, Produkte und Kettenbrüche, 2. — Knoblauch : Determinanten, 4 ; Th. der Raumkurven und der krummen Flächen, 4 ; Mathem. Übungen, 1. — Förster : Geschichte der alten Astronomie, 2 ; Die Grundlehren der astronom. Messkunst, 1 ; Naturwissenschaftliche Erkenntnistheorie, 1. — Struve : Sphär. Astronomie, 1 1/2 ; Prakt. Übungen. — Cohn : Einf. in die Himmelsmechanik 4 ; Seminar für wissenschaftliches Rechnen, 2. — Lehmann-Filhés : Analyt. Geometrie, 4 ; Bestimmungen von Planeten- und Kometenbahnen, 4. — Scheiner : Spektralanalyse der Gestirne, 3 ; Astrophysikalisches Kolloquium, 1. — Marcuse : Allgemeinverständliche Himmelskunde, 1 1/2 ; Theorie und Praxis geographisch, nautisch- und aeronautisch-astron. Ortsbestimmungen mit Übungen, 1 1/2. — Witt : Theorie der Finsternisse, 2. — Helmert : Höhenmessung, 1 ; Theorie der Gradmessungen, 1. — Kohlschütter : Geographische Landmessung, 3 ; Übgn. — Rubens : Mathem. Ergänzung zur Experimentalphysik, 1 ; Physikalisches Kolloquium.

Bonn ; *Universität*. — Study : Analyt. Mechanik, 4 ; Seminar. — London : Analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes, 4 ; Darst. Geometrie II mit Übungen, 3 ; Seminar. — Hausdorf : Differential- und Integralrechnung II, 4 ; Einführung in die Gruppentheorie, 2 ; Seminar. — Müller : Potentialtheorie, 3. — Küstner : Th. der Bahnbestimmung der Kometen und Planeten, 3 ; Topographie des Sonnensystems, 1 ; Praktische Übungen. — Mönnichmeyer : Methode der kleinsten Quadrate, 2 ; Praktische Übungen. — Bucherer : Einführung in die mathem. Behandlung physikalischer Probleme.

Breslau ; *Universität*. — Rosanes : Algebr. Gleichungen, 4 ; Seminar. — Sturm : Analyt. Geometrie der Ebene, 4 ; Zahlentheorie, 2 ; Seminar. — Kneser : Variationsrechnung, 4 ; Theorie des Kreisels, 2 ; Seminar. — Schnee : Integralrechnung, 4 ; Übungen dazu, 1. — Franz : Mechanische Quadratur und Störungsrechnung, 3 ; Seminar ; Astronomisches Kolloquium. — Schäfer : Mechanik der Kontinua, 3.

Erlangen ; *Universität*. — Gordan : Algebra, 4 ; Übgn., 3. — Noether : Differentialrechnung, 4 ; Analyt. Mechanik, 4 ; Seminar ; Synth. Geometrie, in Vorträgen und Übungen. — Schmidt : Analyt. Geometrie der Ebene, 4 ; Lineare Differentialgleichungen, 4 ; Seminar.

Freiburg i. Br. , *Universität*. — Lüroth : Analyt. Geometrie der höh. Kurven und Flächen, 4 ; Übgn. dazu, 1 ; Seminar. — Stickelberger : Analyt. Geometrie der Ebene und Differentialrechnung, 5 ; Übgn. dazu ; Zahlentheorie, 3. — Loewy : Differentialgleichungen, 4 ; Einführung in das Versicherungswesen, 4. — Seith : Darst. Geometrie, 2 ; Übgn. dazu.

Giessen ; *Universität*. — Netto : Differential und Integralrechnung, 4 ; Zahlenth., 2 ; Determinanten, 2 ; Übgn. des mathem. Seminars für mittlere und höhere Semester. — König : Mathem. Ergänzungen zur Experimentalphysik. — Fromme : Ausgleichungsrechnung und Elemente der höh. Geodäsie, 2 ; Populäre Astronomie und mathem. Geographie mit prakt. Übgn. und Demonstrationen, 1 1/2. — Grassmann : Funktionenth. mit geometr. Anwendungen, insbesondere auf Kartenprojektion, 4 ; Graphische Statik mit Übgn., 4 ; Übgn. des mathem. Seminars, Abteilung für mittlere Semestern. Übgn zur Funktionentheorie, 1. — Schmidt : Einführung in die mathematische Behandlung physikalischer Fragen, mit Uebungen, 2 ; Arbeiten für Vorge-

schrittene auf dem Gebiet der Elektronenlehre, ganz- und halbtägig. — Uller : Einführung in die Theorie der Luftschiffahrt und des Fluges, 1.

Göttingen ; *Universität*. — Klein : Die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, 4 ; Seminar (Einführung in die neuere mathematische Literatur). — Hilbert : Mechanik, 4 ; Seminar. — Landau : Differential- und Integralrechnung II, 4 ; Übgn., 1 ; Seminar. — Runge : Darst. Geometrie mit Übgn, 8 ; Seminar. — Prandtl : Aeromechanik und Luftschiffahrt, 4 ; Mechanikpraktikum ; Seminar. — Koebe : Determinanten und Anwendung derselben, 2 ; Einleitung in die Funktionentheorie, 4 ; Übgn. dazu, 2. — Toeplitz : Algebra, 4 ; Mengenlehre in elementarer Darstellung, 2 ; Seminar. — Bernstein : Ellipt. Funktionen, 4 ; Versicherungsrechnung, 2. — Müller : Die Geschichte der Entdeckung der Infinitesimalrechnung, 2. — Wiechert : Vermessungswesen, theoretischer Teil, 4 ; Thermodynamik, 4 ; Geophysikalisches Praktikum ; Seminar. — Haar : Einführung in die Variationsrechnung, 2 ; Störungstheorie, 2. — Weyl : Die Reihenentwicklungen der mathem. Physik, 4. — Hartmann : Allgemeine Astronomie, 2 ; Übgn. — Ambronn : Übgn. im astron. Beobachten ; Astron. Kolloquium. — Riecke : Ausgewählte Probleme der Mechanik. — Voigt : Theorie und Anwendung des Potentials, 4. — v. Karman : Hydrodynamik, 2. — Born ; Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften.

Greifswald ; *Universität*. — Thomé : Ellipt. Funktionen, 4 ; Seminar. — Engel : Differential- und Integralrechnung II, 4 ; Partielle Differentialgl. und Pfaffsches Problem, 4 ; Übgn. dazu ; Seminar. — Vahlen : Algebra I, 4 ; Übgn. dazu, 1 ; Politische Arithmetik, 1. — Mie : Mathem. Ergänzungen zur Experimentalphysik, 1. — Holtz : Mechanik mit Experimenten, 1 ; Physik der Gestirne mit Experimenten, 1.

Halle ; *Universität*. — Cantor : Analyt. Mechanik, 5 ; Seminar. — Wangerin : Th. der Raumkurven und Flächen, 4 ; Elemente der synth. Geometrie, 2 ; Seminar. — Gutzmer : Th. der analyt. Funktionen, 4 ; Integralrechnung mit Übgn., 4 ; Seminar. — Eberhard : Lineare Gleichungen und Determinanten, 2 ; Über die Natur der Irrationalzahlen, 2 ; Kolloquium, 1. — Buchholz ; Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung, 1 ; Mechanik des Himmels (analyt. Störungstheorie), 2. — Langheineken : Mathematische Methoden im Erbrecht des B. G. B., 1.

Heidelberg ; *Universität*. — Königsberger : Differential- und Integralrechnung II, 2 ; Höh. Algebra, 4 ; Elemente der Zahlenth., 1 ; Seminar. — Cantor : Differential- und Integralrechnung, 4 ; Übungen dazu, 1 ; Elementare Arithmetik, Zahlentheorie und Algebra, 2. — Köhler : Synth. Geometrie, 4. — Böhm : Elementarmathematik I : Grundlagen der Arithmetik, Algebra und Analysis, 4. — Bopp : Potentialtheorie, 2. — Wolf : Spektralanalyse, 3. — Kopff : Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung, 1. — Ramsauer : Mathematische und historische Erläuterungen zur Experimentalphysik, 2.

Jena ; *Universität*. — Thomae : Elem. Funktionentheorie (algebr. Analysis), 5. — Haussner : Algebra, 4 ; Differential- und Integralrechnung II, mit Übgn, 5 ; Analyt. Geometrie des Raumes, 4 ; Seminar. — Frege : Analyt. Mechanik, 4 ; Begriffsschrift, 1. — Kutta : Technische Mechanik, 4 ; Übgn., 1 ; Photogrammetrie, 1 ; Übgn., 1. — Thaer : Gruppentheorie, 2 ; Einführung in die höhere Mathematik, 2. — Knopf : Mathematische Geographie, 2 ; Sphär. Astronomie, 2.

Karlsruhe ; *Techn. Hochschule.* — Stäckel ; Höh. Mathematik I mit Übgn., 6 + 2. — Krazer : Höh. Mathematik II, 3 ; Ellipt Funktionen und deren Anwendungen, 2. — Disteli : Darst. Geometrie I mit Übgn., 4 + 4 ; Graph. Statik mit Übgn , 2 + 2. — Heun : Mechanik I mit Übgn., 4 + 2 ; Mechanisches Seminar — Mohrmann : Übgn. in den Grundlehren der höh. Mathematik, 2 ; Arithmetik und Algebra mit Übgn., 2 + 1 ; Ebene und sphär. Trigonometrie mit Übgn., 2 + 1. — Vogt : Elementare und analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes mit Übgn., 2 + 1 ; Mathem. Instrumente und ihre praktische Verwendung, 1. — Winkelmann : Elemente der Mechanik mit Übgn., 3 + 1 ; Allgemeine Mechanik fester, elatischer Körper, 2 — Haid : Praktische Geometrie, 3 ; Höh. Geodäsie, 3 ; Methode der kleinsten Quadrate, 2. — Brauer ; Theoretische Maschinenlehre mit Übgn., 6 + 3.

Kiel ; *Universität.* — Pochhammer : Analyt. Geometrie des Raumes, 4 ; Th. der bestimmten Integrale, 4 ; Seminar. — Heffter : Integralrechnung, 4 ; Übgn. dazu, 1 ; Darst. Geometrie II (Axonometrie und Perspektive), mit Zeichenübungen, 3 ; Seminar. — Landsberg : Zahlenth., 4 ; Grundlagen der Geometrie, 2 ; Zahlenth. Übgn., 1. — Harzer : Allgemeine Astronomie, 2 ; Sphär. Astronomie, 3 ; Übgn. im numerischen Rechnen, 1. — Kobold : Bahnbestimmung von Kometen und Planeten, 2 ; Übgn. dazu, 1 ; Übgn. an den Instrumenten der Sternwarte. — Wilkens : Bewegungsverhältnisse der Doppel- und mehrfachen Sterne, 1.

Königsberg ; *Universität.* — Meyer : Analyt. Geometrie II, 3 ; Übgn. dazu, 1 ; Ellipt. Funktionen, 4 ; Seminar. — Schoenflies : Funktionentheorie, 4 ; Seminar. — Kaluza : Integralrechnung, 4 ; Übgn. dazu, 1 ; Algebra der Logik, 2. — Battermann : Sphär. Astronomie, 2 ; Methode der kleinsten Quadrate, mit Rücksicht auf die Praxis, 1.

Leipzig ; *Universität.* — Neumann : Ausgew. Kapitel der Mathematik, 3. — Hölder : Analyt. Mechanik, 5 ; Zahlenth., 2 ; Seminar. — Rohn : Determinanten, 2 ; Anwendung der Differentialrechnung auf Kurven und Flächen, 4 ; Seminar. — Herglotz : Differential- und Integralrechnung, 5 ; Elemente der Theorie der part. Differentialgleichungen, 2 ; Seminar. — Liebmann : Analyt. Geometrie des Raumes, 4 ; Übungen dazu, 1 ; Nichteuklidische Geometrie, 2 ; Seminar. — Bruns : Himmlische Mechanik, 2 ; Praktische Analysis, 2 ; Astron. Praktikum. — Peter : Bestimmung der Fixsternörter, 2 ; Seminar.

Marburg ; *Universität.* Hensel : Analyt. Geometrie des Raumes, speziell Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung, 4 ; Zahlentheorie, 4 ; Seminar. — Neumann : Ellipt. Funktionen, 4 ; Gewöhnliche Differentialgleichungen, 2 ; Seminar. — v. Dalwigk : Integralrechnung, 4 ; Ergänzungen und Übgn. zur Differential- und Integralrechnung, 1 ; Geodäsie II, 2 ; Höhere Kapitel aus der darst. Geometrie mit Übungen. — Hellinger : Bestimmte Integrale und Fouriersche Reihen, 3 ; Theorie der Determinanten, 2.

München ; *Universität.* — Lindemann : Th. der Funktionen einer komplexen Variabeln, 4 ; analyt. Geometrie der Ebene, 4 ; Einleitung in die Th. der Transformationsgruppen, 2 ; Seminar. — Voss : Algebra, 4 ; Th. der Differentialglgen, 4 ; Seminar. — Pringsheim : Differentialrechnung, 5 : bestimmte Integrale und Fouriersche Reihen, 4 ; Brunn : Neueste Entwicklungen der Analysis situs, 2. — Doehlemann : Darst. Geometrie I, 5 ; Übgn. dazu, 3 ; Liniengeometrie in synthetisch-analytischer Behandlung, 4 ; das Ima-

ginäre in der Geometrie, 1. — Hartogs : Th. der Raumkurven und krummen Flächen, 4. — v. Seeliger : Mechanik des Himmels 1, 4 ; astron. Kolloquium. — Grossmann : Anleitung zur Ausführung astronomischer Rechnungen und zum Gebrauch der Jahrbücher, 3 — Sommerfeld ; Analyt. Mechanik, 4 ; geometrische Optik, 2 ; Seminar. — Laue : Vektoranalysis, 2. — Wagner : Mathem. Ergänzungen zur Experimentalphysik I, 1.

Strassburg ; *Universität.* — Weber : Differential- und Integralrechnung. 4 ; Ellipt. Funktionen, 2 ; Oberseminar. — Schur : Projektive Geometrie des Raumes, 4 ; Grundlagen der Geometrie, 2 ; Übgn. — Simon : Geschichte der Mathematik von den Araben bis zur Verbreitung infinitesimaler Methoden, 2. — Wellstein : Einf. in die Th. der algebr. Funktionen, 4 ; Unterseminar. — Epstein : Einf. in die Th. der linearen Differentialglgen, 2. — v. Mises : Kinematik und Kinetik starrer Körper, 2 ; Seminar in angew. Mathematik. — Bauschinger : Einl. in die theoret. Astronomie, 4 ; Methode der kleinsten Quadrate mit Übungen, 1 ; Astron. Beobachtungen. — Cohn : Mechanik, 3. — Hergesell : Die heutigen Luftschiffe und Flugmaschinen, 2.

Tübingen ; *Universität.* — v. Brill : Einf. in die höh. Mathematik, 4 ; Über nichtstarre Systeme und die Mechanik von Hertz, 3 ; Übungen. — Maurer : Niedere Analysis, 3 ; Ellipt. Funktionen, 3 ; Übungen. — Happel : Graphische Statik, 1 ; Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung, 1. — Perron : Höh. Analysis II, 4 ; Ausgew. Kapitel aus der Elementargeometrie, 3 ; Seminar. — Rosenberg : Einführung in die Probleme der Astrophysik ; Theorie und Anwendung der astronomischen Instrumente.

Würzburg ; *Universität.* — Rost : Th. der Funktionen einer komplexen Veränderlichen, 4 ; Darst. Geometrie I, 4 ; Astromechanik, 2 ; Proseminar ; Seminar. — v. Weber : Algebr. Analysis, 4 ; Analyt. Mechanik I, 4 ; Seminar. — Hilb : Einführung in die Differentialglgen, 4 ; Algebra, 4 ; Elementare Einführung in die höhere Analysis, 1.

ÉTATS-UNIS D'AMÉRIQUE

Cours annoncés pour l'année universitaire 1910-1911 (suite).

Harvard University *(Cambridge, Mass).* — W. E. Byerly : Dynamics of a rigid body, 3 hours ; trigonometric series, 3, with Prof. B. O. Peirce. — W. F. Osgood : Advanced calculus, 3 ; Infinite series and products, 3, first half year ; Advanced algebra, 3, second half year ; Theory of functions, II, 3 — M. Bôcher : Linear differential equations, 3. — J. L. Coolidge : Introduction to modern geometry and modern analysis, 3 ; Projective geometry, 3, first half year ; Non-euclidean geometry, 3, second half year. — J. K. Whittemore : Theory of functions, I, 3 ; Calculus of variations, 3, first half year ; Equations of mechanics, 3, second half year ; Introduction to differential geometry of curves and surfaces, 3, first half year. — Osgood and Whittemore : Seminary in the theory of functions.

University of Pennsylvania *(Phidadelphia, Pa).* — Prof. E. S. Crawley : Modern analytic geometry, 2 hours ; Theory of numbers, 3 ; mathematics of insurance, 2. — Prof. G. E. Fisher : Differential equations, 3 ; Theory of functions of a complex variable, 3 ; The calculus of variations, 2. — Prof. I. J. Schwatt : Theory of functions of a real variable, 3 ; Infinite series and products, 3. — Prof. G. H. Hallett : Introduction to modern higher alge-

bra, first term, 3; The Galois theory of equations, second term, 3; Theory of groups of a finite order, 3. — Prof. F. H. SAFFORD: Partial Differential equations, 3. — Dr. O. E. GLENN: Geometry of contact transformations, first term, 3; Higher algebraical equations, second term, 3.

SUISSE

Basel; *Universität*. — K. VON DER MÜHLL: Analyt. Mechanik, mit Uebgn., 4; Mathem. Physik, 4, mit Uebgn., 2; Mathem.-physikalische Uebgn., 2. — A. RIGGENBACH: Sphär. Trigonometrie und Einltg. in die sphär. Astronomie, 3. — R. FUETER: Diff. u. Integralrechnung, I. Teil, 4; Gewöhnliche Diff.-Gleichungen, 4; Mathem. Proseminar: Uebgn. zur Diff.-Rechnung, 1; Mathem. Seminar.-Diff. (gemeinsam mit Prof. O. SPIESS), 1. — H. VEILLON: Vectoranalysis, 2. — O. SPIESS: Geometrische Konstruktionen, 2; Einltg. in die Theorie des Modulfunktionen, 2; Mathem. Seminar mit Prof. FUETER, 1. — R. FLATT: Pädagog. Seminar, mathem.-naturw. Abteilung, I. Teil, 3; Projektive Geometrie, 4.

Bern; *Universität*. — GRAF: Kugelfunktionen, I, m. Repetitor., 3; Besselsche Funktionen, II, m. Repetitor., 3; Integralrechng. m. Repetitor., 3; Differentialgleichgen, 2; Funktionentheorie, 2; Renten- u. Versichergsrechng., 2; Mathemat. Semin. in Verbindg. m. Prof. Huber, 1 1/2. — OTT: Algebr. Analysis, II, 2; Integralrechng., 2; Analyt. Geomet., II, 2. — G. HUBER: Sphär. Astronomie, I, 2; Theorie d. höh. ebenen Kurven, 3; Ellipt. u. Thetafunktionen, 2; Mathemat. Semin. (geometr. Richtg.) mit Prof. Graf, 1. — BENTELI: Darstell. Geomet., Kurven, Strahlenflächen, regul. Polyeder, 2; Darstell. Geomet.: Übgn. u. Repetitor., 2; Prakt. Geom., I, 1. — CRELIER: Synthet. Geomet.: Kegelschn. u. Flächen d. 2 Gr., 2; Nichteuklid. Geomet., 2. — MOSER: Versicherungsmathem.: Ausgew. Kap. d, Reservenrechng N. Übereink.; Mathemat.-versicherungswissenschl. Semin., 1—2. — BOHREN: D. soziale Versicherg. u. i. Grundlagen, 1—2; Polit. Arithmetik, 2; Variationsrechng., 1.

Genève; *Université*. — CAILLER: Calcul différentiel et intégral, 3; Exercices, 2; Mécanique rationnelle, 3; Exercices, 2; Conférences d'analyse, 2. — FEHR: Eléments de mathématiques supérieures, 3; Conférences d'algèbre et de géométrie, 1; Exercices pratiques sur les éléments de mathématiques supérieures, 2; Géométrie projective, 1; Séminaire d'algèbre et de géométrie supérieure: Théorie des équations, 2. — R. GAUTIER: Astronomie physique, 2; Géographie physique, 2. — M. PLANCHEREL: Potentiel newtonien et théorie des équations intégrales, 4. — R. de SAUSSURE: Géométrie cinématique, 2.

Lausanne; *Université*. — AMSTEIN: Calc. différ. et intégr., I, 6; Exerc. de calc., I, 1; Calcul différ. et intégr., III, 2; Exerc. de calc., III, 1; Théor. des fonct., 3. — LACOMBE: Géomét. descript., 4; Géométr. anal., 2; Epures de géom. descript., 1 ap.-m.; Géomet. de posit., 3. — MAYOR: Mécan. rationn., I, 4; Exerc. de mécan., III, 1; Phys. mathémat., 2; Statique graph., III, 3; Epures de statiq., III, 1 ap.-m.; St. graph., V, 2; Epures de stat., V, 1 ap.-m. — MAILLARD: Calc. infinités. avec applicat. aux sc., 3; Exerc. de calc., 1; Astron. sphér.: la Terre, le Soleil, 3. — JACCOTTET; Mathémat. élément. envisag. au point de vue de leur enseignem., II, Géométrie, Analyse, 2.

Neuchâtel; *Université*. — Isely : Calcul infinitésimal, I, 3 ; II, 2 ; Calcul des variations, 1 ; Th. des probabilités et des assurances, II, 2. — Gaberel : Th. des fonctions, 2. — Le Grand Roy : Astronomie sphér., 2 ; Géodésie, 1 ; Exerc. d'Astronomie, 1 ; Calcul des orbites, 1.

Zürich; *Universität*. — Zermelo : Diff. u. Integralrechg., 4 ; Diff.-gleichungen, 4 ; Üb. f. Vorger, 2. — Wolfer : Astronomie, 3 ; Üb. dazu., 2 ; Bahnbestimmg. v. Planeten u. Kometen, 2. — Weiler : Darstell. Geomet., I., m. Üb., 4 ; Analyt. Geom. m. Üb., 4 ; Mathem. Geogr., 2 ; Synt. Geom., 3. — Einstein : Elektrizität u. Magnetismus, 4 ; Theor. Phys., 2 ; Physik. Prkt. f. Vorger. tgl. — Gubler : Algebr. Analysis, 2 ; Geom. Unterricht an Mittelschulen, 1. — Adler : Einltg. in d. Physik, 2 ; Geom. Optik, 1. — Du Pasquier : Neuere Entwicklg. d. Zahlenbegriffs, 1 ; Methode d. kleinstein Quadrate, 1 ; Kometenproblem u. verwandte kosmische Fragen, 1.

Zürich; *Ecole polytechnique fédérale. section normale*. — Hirsch : Höh. Mathematik, I, 5 ; Répét. 1, Übgn., 2 ; III, 3 ; Übgn., 1. — Franel : Mathématiques supérieures, I, 5 ; Répét., 1 ; Exerc., 2 ; III, 3 ; Exerc., I. — Geiser : Analyt. Geometrie, 4 ; Üb., I. — Grossmann : Darst. Geometrie, 4 ; Répét., 1 ; Übgn., 4 ; Geometrie der Lage, 4. — Kollros. Géométrie descr., 4 ; Répét., 1 ; Exerc., 4 ; Géométrie de position, 3 ; Mathem.-Übgn., 2. — Meissner : Mechanik, II, 4 ; Répét., 1 ; Übgn., 2. — Hurwitz : Ellipt. Funktionen, 4. — Hurwitz u. Grossmann : Mathem. Seminar. — Baeschlin : Vermessungskunde, II, 4 ; Répét., 1 ; Erdmessung, 2 ; Geod. Praktikum, 2. — Weber : Zylinderfunktionen u. ihre Verwendung in der Physik, 2. — Du Pasquier : Versicherungs-Mathematik. — Wolfer : Einl. in die Astronomie, 3 ; Übgn., 2 ; Bahnbestimmung von Planeten u. Kometen.

Cours libres. — Beyel : Rechenschieber, 1 ; Darst. Geometrie, 2 ; proj. Geometrie, 1 ; Flächen, 2ten Grades, 2. — Dumas : Applications diverses de mathém. sup., 1. Du Pasquier : Methode der kl. Quadrate u. Ausgleichungsrechn., 1 ; Neuere Entwicklung des Zahlenbegriffs, 1 ; La notion du nombre en mathém. modernes, 1 ; Das Kometenproblem u. verwandte kosmische Fragen, 1. — Keller : Ausgew. Kap. aus der darst. Geometrie, 2. — Kienast : Anw. des Arbeitsbegriffes in der Statik, 1 ; Attraktionstheorie, I. — Kraft : Analyt. Mechanik, 3 ; Vektoranalysis, 3 ; Geom. Kalkül, III u. V.

BIBLIOGRAPHIE

F. Amodeo. — **Complementi di Analisi Algebrica Elementare** con appendice sulle sezioni coniche. — Parte seconda del volume secondo degli Elementi di Matematica. — I vol. in-8°, 312 p., 3 L. ; L. Pierro, Naples.

Par ce dernier volume de ses Eléments de Mathématiques, destinés aux élèves des instituts techniques (gymnases industriels), M. Amodeo rompt avec la tradition, en ce sens qu'il accorde une importance inusitée aux théories de l'analyse algébrique et que, conformément aux vœux émis par

de nombreux mathématiciens, il introduit la notion de la dérivée première, donne des exemples de ses multiples applications, sans toutefois établir les règles de dérivation, inutiles pour une première initiation.

Les sept chapitres de ce livre sont autant d'exposés très complets, quoique élémentaires, de l'analyse combinatoire; des fractions continues; de l'analyse indéterminée du premier degré; des inégalités et des systèmes d'inégalités; de la discussion des équations et des problèmes du deuxième degré; des fonctions, de leur discussion et des maxima et minima. Un appendice, consacré à un bref aperçu sur les sections coniques considérées comme les sections d'un cône circulaire droit, termine cet intéressant ouvrage.

W.-M. Baker and A.-A. Bourne. — **Public School Arithmetic.** — 1 vol. in 16, 386 et L p.; relié 3 s. 6 d.; ou avec réponses, 4 s. 6 d.; G. Bell & Sons, Londres.

Ce volume renferme la matière d'un cours complet d'arithmétique et cela presque uniquement sous forme de problèmes et d'exercices, la théorie étant donnée d'une manière claire mais très succinte.

Bien que destiné à des élèves qui possèdent déjà les premières notions d'arithmétique, ce cours débute par un rapide exposé des définitions, notations et méthodes à la base de l'arithmétique. Outre les sujets rentrant d'habitude dans le cadre des cours d'arithmétique, les auteurs n'ont pas craint de faire appel aux notions élémentaires de géométrie, y compris le théorème de Pythagore; ils ont également introduit des éléments d'algèbre toutes les fois que le sujet y gagnait en clarté. L'introduction des logarithmes fait l'objet d'un chapitre. La représentation graphique au moyen de deux axes de coordonnées est expliquée et son utilité mise en lumière par des problèmes de genres très divers.

Le système de poids et mesures en usage en Angleterre occupe naturellement une place prépondérante, cependant le système métrique n'est pas oublié.

Le cours proprement dit est précédé de tableaux des diverses mesures, poids, monnaies, etc., il est suivi de l'énoncé de problèmes proposés aux examens du « civil service ».

Un des principaux mérites de cet ouvrage réside dans un choix judicieux de problèmes, touchant à tous les domaines et conçus de manière à concourir au développement général de l'élève; les maîtres à la recherche de problèmes pratiques et intéressants pourront consulter ce volume avec fruit.

Renée Masson (Genève).

K. Boehm. — **Elliptische Funktionen.** *2ter Teil* : Theorie der ellipt. Integrale. Umkehrproblem. — 1 vol. de 180 p. *(Collection Schubert)*, 5 M.; G. J. Goeschen, Leipzig.

Cette deuxième partie peut être lue indépendamment de la première; elle est consacrée exclusivement à la théorie des intégrales elliptiques et au problème de l'inversion. Les principales propriétés de ces transcendantes sont établies directement par la discussion de l'intégrale elle-même. Suivant la marche historique, l'auteur considère d'abord la valeur de l'intégrale comme fonction de sa limite supérieure; le problème inverse conduit alors aux fonctions doublement périodiques dont les propriétés avaient été démontrées d'une façon toute différente dans le premier volume.

Le théorème d'Abel, présenté avec soin et appliqué à la démonstration des théorèmes d'addition, engagera le lecteur à pénétrer plus profondément dans le vaste domaine des intégrales abéliennes. L. Kollros (Zurich).

O. Bolza. — **Vorlesungen über Variationsrechnung.** Deutsche Ausgabe. — 1 vol. gr. in-8° de X-705 pages ; B. G. Teubner, Leipzig.

Ce traité et celui de M. Hadamard que j'analyse un peu plus loin constituent certainement une grandiose exposition didactique de résultats longtemps épars, puis rassemblés et développés par Kneser pour former maintenant une branche nouvelle de la Science.

M. Bolza entre immédiatement dans le vif d'explications élémentaires destinées à situer le Calcul des Variations. Il en ramène les problèmes à cinq types différents :

1. Courbe passant par deux points donnés d'un plan et qui, tournant autour d'une droite de ce plan, engendre une surface de révolution d'aire minimum.

2. Même question si la courbe doit avoir une longueur donnée entre les points donnés.

Les problèmes de ce second type sont dits *isopérimétriques*.

3. Problème des lignes géodésiques.

4. Problème de la brachistochrone en milieu résistant.

5. Problème général des surfaces minima passant par un contour donné.

L'ouvrage insiste longtemps sur les problèmes du premier type. Le langage mathématique comporte beaucoup de mots nouveaux. Les maxima ou minima, généralement appelés *extrema* quand la distinction est impossible ou inutile, peuvent se présenter sous des aspects variés suivant l'allure des fonctions ou des intégrales en litige dans le voisinage de ces extrema. Aussi reprend-on avec beaucoup de précision l'ordinaire théorie de la variation des fonctions avant d'aborder la variation première des intégrales, mais ce qui frappe beaucoup, c'est que l'auteur a réussi à mettre ce cachet moderne sur le tableau esquissé par les créateurs sans effacer celui-ci. L'élégante méthode d'Euler et l'équation différentielle qui donne les courbes *extrémales* dans les problèmes du premier type apparaissent de la manière la plus élégante, le tout étant complété par les recherches de M. Darboux nous conduisant à un beau théorème d'après lequel toute équation du second ordre peut être considérée comme définissant les extrémales d'un problème du premier type.

C'est aussi avec la plus grande élégance qu'est étudiée la variation seconde d'où dépend la nature de l'extremum. L'équation différentielle de Legendre est immédiatement mise sous la forme linéaire donnée par Jacobi ; elle possède alors des intégrales particulières en relation très simple avec l'intégrale de l'équation d'Euler. L'enveloppe des extrémales définit géométriquement leurs points conjugués ; les champs d'extrémales avec les fonctions associées de Weierstrass qui satisfont à de certaines équations aux dérivées partielles nous permettent d'arriver aux équations d'Hamilton.

Tout cela ne fait que trois chapitres, terminés d'ailleurs par d'excellents exercices, mais ils constituent déjà un ensemble montrant complètement la prodigieuse portée du Calcul. Le chapitre suivant sur les fonctions de variables réelles, destiné à établir en toute rigueur les théorèmes d'existence, est d'une étude plus laborieuse mais, justement, l'indéniable intérêt des résultats déjà acquis encouragera à son étude.

Ensuite, au lieu de supposer que les extrémales sont des courbes à équation explicite $y = f(x)$, nous nous demanderons ce qu'il advient des résultats acquis si on leur suppose des équations paramétriques. Alors les équations d'Euler, Legendre, Jacobi.... prennent des formes plus symétriques encore et des applications très générales, telles les lignes géodésiques, commenceront à apparaître. Et ces applications pourront être poursuivies, toujours dans le meilleur esprit géométrique, celui d'ailleurs de M. Darboux, dès qu'on pourra passer des extrémales issues de points fixes aux extrémales issues de points mobiles. Là encore la considération des enveloppes de ces extrémales est d'une élégance de tout premier ordre. Demandons-nous maintenant si la continuité analytique des extrémales ne pourrait pas être rompue ? Voilà une question qui, pour certains esprits, pourrait paraître bien peu pratique et comme une recherche oiseuse de la difficulté. La critique cependant serait bien injuste car M. Bolza, après avoir examiné sobrement la question, en applique les résultats à la recherche du projectile de moindre résistance, problème éminemment pratique déjà envisagé par Newton.

A signaler aussi la notion de l'extremum absolu, longtemps admise pour les intégrales qui ne pouvaient franchir une certaine limite, et sur laquelle on fondait à tort des théorèmes d'existence pour les solutions d'équations aux dérivées partielles. Si je signale que le volume étudie enfin le cas des extrémales assujetties à des conditions auxiliaires, cas qui conduit à l'usage du multiplicateur de Lagrange et fait retrouver nombre de résultats de Clebsch, Mayer, etc... concernant les équations aux dérivées partielles, puis que l'auteur tente d'étendre aux intégrales doubles les principaux résultats acquis, j'aurai donné une idée très brève mais encourageante pour l'étude de cet ouvrage écrit d'un bout à l'autre avec harmonie et clarté.

A. Buhl (Toulouse).

H. Bouasse. — **Cours de mécanique rationnelle et expérimentale,** spécialement écrit pour les physiciens et les ingénieurs. — 1 vol. gr. in-8°, 692 p. ; 20 fr. ; Ch. Delagrave, Paris.

M. Bouasse qui, en écrivant le vaste Cours de Physique dont il a été souvent question ici, se plaignait de la mauvaise forme donnée aux enseignements préliminaires de Mécanique et de Mathématiques, a pris à tâche maintenant de compléter sa grande œuvre en montrant comment les élèves physiciens devraient s'habituer à considérer la Mécanique.

Ce livre, tout d'abord, étonnera les mathématiciens par la facilité avec laquelle l'auteur se sert des méthodes élémentaires pour traiter et réunir des questions qui sont généralement placées dans des chapitres fort éloignés. Ainsi, dans la Géométrie des vecteurs, il n'apparaît pas comme plus difficile de définir le flux d'un vecteur au travers d'une surface que de définir son travail. Et même le fameux théorème de Green (sur l'égalité entre le flux traversant une surface fermée et l'intégrale de la divergence étendue au volume y contenu) s'impose de lui-même dès que l'on voit que ce qui sort de la surface est la somme de ce qui sort de tous les éléments de volume y enfermés. Car les intégrales multiples n'embarrassent pas M. Bouasse ; il n'a même pas craint, en commençant par parler des centres et des moments d'inertie, d'en remplir la *troisième* page de son livre au risque d'épouvanter l'étudiant qui a souvent une terreur aussi fantastique qu'injustifiée de ces expressions. Sans doute, il faut s'habituer à n'y voir que des symboles

dont le calcul, dans les cas les plus généraux, pourrait être compliqué mais n'est cependant guère à redouter en pratique. A ce dernier point de vue il est bien rare que la symétrie ne réduise pas une intégrale double ou triple à une seule quadrature. Et c'est d'ailleurs ce que nous observons immédiatement dans les différents cas où sont calculés des centres ou des moments d'inertie.

Tout au début de ce livre, nous sommes familiarisés non pas seulement avec le vecteur ou avec leurs combinaisons en petit nombre, mais avec les champs de vecteurs et, pour illustrer l'idée de flux, M. Bouasse parle brièvement de la dilatation. A l'idée de travail se rattache l'idée particulière de fonction potentielle, puis de fonction harmonique, ce qui nous conduit à bref délai aux fonctions de Bessel et aux polynômes de Legendre qui seront, dans la suite, des instruments précieux. J'insiste peut-être trop sur ces débuts, qui ne forment pas la dixième partie du volume, mais je tiens à marquer que, comme dans les volumes du Cours de Physique, ils représentent, réduit au minimum, tout l'effort analytique à donner. Je ne vois rien plus loin qui soit d'une difficulté plus grande.

En Cinématique, les principes sont immédiatement illustrés par les exemples les plus variés, par la description de nombreux mécanismes ; il en est de même en Statique où nous trouvons la balance, la suspension bifilaire, les polygones et courbes funiculaires, etc. Conformément aux besoins de la pratique, il s'agit surtout de systèmes pesants où nous voyons nettement que les positions d'équilibre correspondent aux positions les plus hautes ou les plus basses du centre d'inertie. Signalons aussi les cas intéressants d'équilibre indifférent où le centre d'inertie se meut horizontalement. Dans l'équilibre dû au frottement, nous étudions l'échelle, le valet de menuisier, les tableaux suspendus au mur, le coin, le traîneau, la vis, les tourillons, les freins, les cordes frottant sur des barres autour desquelles on les enroule. Enfin, après quelques généralités sur l'attraction, nous passons à la figure de la Terre ; je signalerai à ce sujet un paragraphe fort intéressant sur la variation de g avec la hauteur, variation décelée à l'aide d'une balance assez sensible pour indiquer la présence de quelques tonnes de plomb amenées sous le dispositif.

Mais l'intérêt devient à peu près impossible à dépasser quand M. Bouasse aborde la Dynamique. Il s'occupe tout de suite des difficultés qui, dans les théorèmes fondamentaux, n'ont pas toujours été discutées de manière à dissiper toute obscurité. Voici le théorème des aires avec le fameux problème du chat, illustré d'ailleurs par beaucoup de mécanismes qui tournent effectivement dans l'espace par le seul jeu de forces intérieures et voici le théorème des forces vives pour des points assujettis à des liaisons dépendant du temps, cas où toutes difficultés sont écartées par application judicieuse du principe de d'Alembert.

A propos du mouvement d'un point sur une courbe, voici le raccordement des voies : il est facile de voir que le problème comporte un certain degré d'arbitraire qu'on peut lever au moyen de trois hypothèses principales en admettant que la courbure est proportionnelle à l'abscisse, à la corde, ou à l'arc de la courbe à tracer. Dans le premier cas, la courbe dépend d'une intégrale elliptique ; dans le second cas, on trouve une lemniscate de Bernoulli; dans le troisième cas, une clothoïde, courbe dépendant des fameuses intégrales de Fresnel qui se rencontrent en optique et sont aussi bien connues des mathématiciens. A propos des attractions proportionnelles à la

distance, le mouvement harmonique et ses combinaisons donnent immédiatement les mouvements vibratoires ; pour deux de ces mouvements combinés orthogonalement, nous avons les courbes de Lissajoux : les attractions, en raison inverse du carré de la distance conduisent aux mouvements planétaires poussés jusqu'à une idée sommaire du calcul des perturbations.

Les corps tournant autour d'un axe fixe nous font faire connaissance avec les volants et les régulateurs ; le pendule circulaire (ou composé) compensé ou non, le métronome, le pendule réversible de Kater, qui illustre une symétrie remarquable du pendule circulaire, nous conduisent à la mesure des moments d'inertie ; le parallélisme avec l'aimant oscillant dans un champ uniforme entraîne des manipulations de même nature pour les corps pesants et les aimants.

Voici enfin des mouvements oscillatoires un peu plus quelconques, le pendule dont le point de suspension se déplace ou dont le fil varie en longueur, ce dernier nous offrant une application remarquablement simple des fonctions de Bessel. Au sujet des corps à axe fixe qui subissent des percussions, M. Bouasse montre soigneusement l'influence de la nature de ces corps et trouve d'excellentes réflexions dans le maniement d'un simple marteau. Le pendule conique le conduit à la théorie des sismographes.

Les questions de résonance, peu développées dans les traités de Mécanique, sont d'abord prises dans les cas simples où l'équation du mouvement est linéaire avec second membre périodique ordinaire ou périodique amorti. Elle sont illustrées par de nombreux appareils. Viennent ensuite les équations générales des petits mouvements d'après Lagrange appliquées aux pendules superposés et aux pendules sympathiques d'Huyghens. Les calculs dans la recherche des oscillations principales sont poussés jusqu'au bout avec le désir évident de percevoir nettement ce qui peut être perçu dans ces phénomènes complexes quand les amplitudes des oscillations sont suffisamment petites.

M. Bouasse termine par le mouvement d'un solide autour d'un point fixe puis par celui d'un solide plus libre, toupie ou gyroscope par exemple, en mettant encore très soigneusement en évidence les circonstances paradoxales qui se présentent dans les questions de stabilisation. Il nous montre les nombreux appareils qui se renversent quand de nouvelles liaisons viennent empêcher les moindres mouvements de nutation.

J'ai toujours le regret de me trouver bien bref en parlant de choses si intéressantes.

D'ailleurs de nombreuses manipulations forment un chapitre terminal qui est comme une revision pratique du cours. On ne saurait trop dire, les services que celui-ci peut rendre aux mathématiciens et aux mécaniciens trop théoriques ; mais il est utile aussi au plus haut point vis-à-vis de l'étude de tous les cours de physique en désencombrant ceux-ci des raisonnements, des méthodes et des appareils qui ne relèvent que de la simple mécanique. Telle est d'ailleurs l'attitude que prend M. Bouasse vis-à-vis de son propre cours, auquel le volume qui vient de paraître forme une introduction des plus heureuses.

A. Buhl (Toulouse).

G. Combebiac. — **Les actions à distance.** *(Collection Scientia).* — 1 vol. in-8° ; 2 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

Depuis le moment où Newton découvre les lois de la gravitation, de nombreuses tentatives d'explication en ont été essayées. Les explications électro-

dynamiques semblent présenter actuellement le plus d'avenir. Les explications mécaniques, soit statiques, soit dynamiques ont complètement échoué. Dans les dernières, en particulier, le phénomène de gravitation est toujours accompagné de phénomènes irréversibles très considérables. Il n'en est plus de même pour les explications hydrodynamiques de Bjerkness et de Riemann ; bien que ces explications ne soient que des analogies, elles présentent un intérêt évident au point de vue mathématique. La plupart de ces recherches hydrodynamiques ont été publiées à l'étranger. On ne saurait donc trop remercier M. Combebiac, de s'être distrait un instant des recherches spéciales qu'il poursuit sur ces questions, pour présenter au lecteur français dans ce petit volume « le bilan des résultats obtenus dans l'étude des actions exercées par les fluides en mouvement, en les établissant par les moyens les plus directs ».

Après avoir, au chapitre I, donné quelques notations et formules générales empruntées à la théorie des quaternions, l'auteur établit rapidement au chapitre II l'expression de l'action exercée sur un corps immergé dans un fluide en mouvement irrotationnel, telle qu'elle résulte des équations générales de l'hydrodynamique. Le chapitre III rappelle quelques propriétés des sphériques harmoniques, qui seront utilisées dans les divers problèmes aux limites traités plus loin. Le chapitre IV étudie les actions dues aux sphères pulsantes et oscillantes de Bjerkness. L'auteur y établit que des sphères ou des corpuscules qui pulsent en accord dans un fluide incompressible s'attirent en première approximation en raison inverse du carré de la distance et que des sphères oscillantes en accord exercent entre elles des actions analogues à celles qu'on observe entre aimants élémentaires. Le chapitre V est consacré à l'étude des actions des sphères faiblement compressibles et à la théorie de la gravitation donnée par Korn. Les chapitres VI et VII sont relatifs à l'action d'un fluide en mouvement sur des anneaux infiniment déliés et aux remarquables analogies hydro-électriques suggérées par les formules obtenues. Le chapitre VIII : Propos sur l'électricité, indique quelques analogies nouvelles se présentant lorsqu'on considère des fluides légèrement déformables et des mouvements rotationnels. Le chapitre IX et dernier : Les explications mécaniques en physique, bien que présentant quelques vues personnelles intéressantes de l'auteur, me semble sortir un peu du cadre du livre.

L'emploi des symboles de la théorie des quaternions, à laquelle une courte note est consacrée à la fin du volume, a permis de réduire au minimum l'appareil de formules et de donner à la rédaction une forme très concise et très représentative. Quelques fautes typographiques dans les formules ont échappé à la correction (principalement au commencement du chapitre II). Je regrette l'absence d'une bibliographie complète des questions traitées.

M. Plancherel (Genève).

P. Duhem. — **Thermodynamique et Chimie.** — 1 vol. gr. in-8°, XII, 579 p. avec 173 fig. ; 16 fr. (18 fr. relié) ; A. Hermann & fils, Paris.

Il y a huit ans, la librairie A. Hermann avait publié, de P. Duhem, un ouvrage intitulé : *Thermodynamique et Chimie, leçons élémentaires :* cet ouvrage étant épuisé, une seconde édition vient d'être mise en vente par la même librairie.

En cette seconde édition, le plan général de l'ouvrage est demeuré le même qu'en la première : l'auteur expose, tout d'abord, les principes géné-

raux de la Thermodynamique et montre comment on tire de ces principes les fondements d'une Mécanique chimique ; puis il présente chacun des principaux chapitres de cette Mécanique chimique. Il a soin de faire un appel aussi rare que possible aux formules mathématiques, même les plus simples, et de donner, en revanche, un très grand nombre d'exemples fournis par l'expérience.

Mais si le plan de l'ouvrage n'a pas changé, les matières que ce plan sert à ordonner ont été grandement accrues ; plus de 70 articles nouveaux sont venus s'adjoindre à ceux que contenait la première édition.

Ces additions nombreuses ont eu pour objet de tenir compte des plus récentes acquisitions de la Chimie physique ; à cet égard, l'auteur n'a rien négligé pour tenir son livre au courant même des recherches qui ont paru au cours de l'impression ; telle note, publiée en janvier 1910, s'y trouve analysée.

Mais plusieurs développements nouveaux ont eu surtout pour but de présenter d'une manière plus complète certaines questions que les nouveaux programmes ont introduites dans l'enseignement secondaire ; tels sont, par exemple, les articles consacrés à la dégradation de l'énergie.

Nous tenons à rappeler pour terminer que c'est M. Duhem qui a publié en France le premier ouvrage sur la Mécanique chimique. C'est en 1886 lorsqu'il était encore élève à l'Ecole normale qu'il fit paraître : *Le Potentiel thermodynamique et ses applications à la Mécanique chimique et à l'étude des phénomènes électriques.* Dans cet Ouvrage aujourd'hui fort rare malgré ses deux éditions, il faisait connaître les travaux si remarquables de Gibbs, alors complètement inconnu en France. Depuis il a publié sur la Mécanique chimique un grand nombre d'ouvrages et de mémoires C'est donc le fruit de 25 ans de travaux ininterrompus qu'il expose aujourd'hui dans cette nouvelle édition.

J. Hadamard. — **Leçons sur le Calcul des Variations.** *Tome premier :* La variation première et les conditions du premier ordre ; les conditions de l'extremum libre. — 1 vol. gr. in-8°, 520 p., 18 fr. ; Hermann & fils, Paris.

Comme je l'ai dit un peu plus haut, en analysant le livre de M. Bolza dont la traduction allemande n'a précédé la publication de celui-ci que de fort peu, nous sommes maintenant en présence de grands ouvrages sur une branche des Mathématiques qu'illustra Weierstrass en des mémoires malheureusement difficiles à lire et que Kneser bâtit provisoirement de manière didactique en un livre qui peut être considéré comme le germe des puissantes publications de l'heure présente. A proprement parler, M. Hadamard ne cherche ni à refaire l'œuvre de Kneser, ni à se superposer à celle de Bolza. Les élégants et innombrables problèmes rattachés à l'Analyse classique le tentent moins que ceux qui peuvent naître d'un examen attentif et prévoyant des bases du sujet en litige. A cet égard, il ouvre devant nous des horizons indéfinis. Que l'on pense, par exemple, aux développements déjà prodigieux nés de certains problèmes tels que celui des lignes géodésiques ou celui des surfaces minima ; il n'en est pas moins vrai que ce sont des problèmes particuliers pour le Calcul des Variations. Or, si ce calcul lui-même a pour objet de rechercher les extrema *d'intégrales* dépendant de fonctions arbitraires, pourquoi parler seulement d'intégrales ? N'y a-t-il pas d'autres expressions fonctionnelles que les intégrales dont on peut étudier les modifications dans le *champ fonctionnel ?* Ainsi le Calcul des Variations ne sera que la première marche pour entrer dans le temple, à architecture

encore indécise, du Calcul fonctionnel. Que ne faut-il pas conclure de l'avenir et de la puissance de celui-ci si des problèmes célèbres y disparaissent en prenant des dimensions minuscules.

M. Hadamard, dans ce beau livre, arrive à rassembler rapidement des résultats illustres souvent considérés de manières disparates. Dans l'un de ses premiers chapitres il rattache immédiatement la variation de l'action hamiltonienne aux équations de la Dynamique et observe que cette transformation bien connue peut être répétée pour des variations premières beaucoup plus générales. Il met alors les équations du Calcul des Variations sous la forme canonique et, comme cette dernière est la source de tous les admirables résultats de la Dynamique moderne et particulièrement de la Mécanique Céleste, il nous montre que le Calcul des Variations peut profiter de ceux-ci.

Au sujet des problèmes isopérimétriques (exemples immédiats d'extrema liés), M. Hadamard semble ne pas autant tenir que M. Bolza à placer dans le Calcul des cloisons qui ne sauraient être étanches, mais serviraient cependant à la classification des problèmes. Il a pris les choses d'une manière tellement générale qu'il domine tout ; il s'efforce ici de préciser les conditions où justement on pourra raisonner sur l'extremum lié comme sur l'extremum libre ; il prendra pour s'expliquer les élégantes propriétés des géodésiques, puis des fils pesants glissants sur des surfaces. Sous le titre de *problème de Mayer,* il généralise le problème de Lagrange, se heurte à des cas d'extrema liés où l'on croit ne plus pouvoir mettre les équations des extrémales sous forme canonique mais y arrive tout de même par l'usage de certaines transformations de contact.

Nous pouvons maintenant passer dans le Calcul fonctionnel général. Il n'y a pas, encore une fois, que les intégrales dont on cherche les extrema qui dépendent de fonctions arbitraires. Ainsi les problèmes de la Physique mathématique conduisent à chercher des fonctions qui, de par les conditions aux limites, dépendent de fonctions arbitraires : ce sont des *fonctionnelles* de celles-ci. Les fonctionnelles *continues* sont celles qui ne se modifient qu'infiniment peu quand on ne modifie qu'infiniment peu les fonctions dont elles dépendent ; on pressent alors, avec M. Volterra, les notions de *dérivée* ou de *différentielle fonctionnelles.* Seulement, pour que subsiste le parallélisme avec le Calcul infinitésimal ordinaire, il faut que la variation fonctionnelle dépende *linéairement* de variation de fonctions, tout comme une différentielle totale dépend linéairement des différentielles des variables. De là l'importante notion de *fonctionnelle linéaire*. M. Hadamard illustre ces définitions en revenant sur les fonctions de Green, de Neumann, etc..... ainsi que sur les problèmes déjà étudiés dans ses *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique*.

Quant aux conditions qui permettent de choisir parmi les extrémales pour assurer définitivement les extrema, conditions dont l'obtention exige l'examen de la variation seconde, nous retrouvons un ordre à peu près analogue à celui décrit plus haut à propos de l'ouvrage de M. Bolza ; les noms et les théories de Legendre, Jacobi, Weierstrass, Darboux, etc. ne pouvaient pas ne pas revenir. Weierstrass surtout semble apporter l'extrême rigueur et M. Darboux, par des voies différentes et en étudiant surtout les géodésiques, apporte parallèlement l'élégance. D'ailleurs l'esprit analytique de M. Hadamard ne s'est pas refusé aux schèmes géométriques qui montrent intuitivement de curieuses difficultés et d'intéressants paradoxes. Si j'ajoute

que les notions d'équations aux variations et d'invariants intégraux qui jouent un rôle si considérable dans les travaux de M. Poincaré sont aussi rattachées au Calcul ici présenté, j'aurai donné de l'œuvre une idée qui, quoique fort incomplète, montre assez le rôle capital qu'elle est appelée à jouer dans la Science. A. Buhl (Toulouse).

K. Hensel. — **Theorie der algebraischen Zahlen,** Band I. — 1 vol. in-8° de XI-349 pages, 14 M ; B. G. Teubner, Leipzig.

L'attention des plus grands géomètres de toutes les époques a toujours été retenue par les belles propriétés des nombres, mais ce n'est qu'avec Gauss qu'a commencé l'exploration pour ainsi dire systématique des lois auxquelles ils sont assujettis. Les recherches de Gauss lui-même sur les résidus biquadratiques furent la suite naturelle des mémorables *Disquisitiones arithmeticae,* comme plus tard aussi celles de Kummer relatives aux équations de la division du cercle. La théorie des résidus biquadratiques ne prit une forme satisfaisante que lorsque Gauss eut fait entrer dans le champ de ses considérations les quantités rationnelles complexes de la forme $a + bi$, tandis que Kummer ne put étendre aux corps de nombres dont il s'occupait la proposition fondamentale de l'arithmétique élémentaire qui dit que tout nombre entier n'est décomposable que d'une seule façon en un produit de facteurs premiers, que par l'introduction de ses nombres idéaux.

Dedekind, Kronecker puis Hensel ont ensuite donné des méthodes permettant d'étendre à un corps algébrique quelconque toutes les merveilleuses lois mises en évidence par Gauss dans ses *Disquisitiones.* Leurs recherches, tout à fait indépendantes, ont conduit, ainsi que cela devait être, aux mêmes résultats. Considérées les unes à côté des autres, elles s'expliquent mutuellement et à cause de la différence de leur point de départ jettent un jour fort net sur la nature du nombre en général. Ceci s'applique entre autres aux conceptions fondamentales de Dedekind et de Hensel. Les idéaux du premier ont leur raison d'être dans les diviseurs du second, diviseurs dont ils sont cependant, et en une certaine mesure, la réalisation concrète.

Le livre dont nous donnons ici l'analyse est le fruit de dix-huit années de travail. Les méthodes qu'on y rencontre s'appuient sur une généralisation hardie du concept de nombre. A côté des nombres rationnels ordinaires et des nombres algébriques proprement dits, M. Hensel introduit de nouveaux éléments, constitués par des suites *indéfinies,* le plus souvent divergentes :

$$(1) \qquad A = \sum_{\nu=\rho}^{\nu=\infty} e_\nu p^\nu \qquad \text{et} \quad (2) \qquad B = \sum_{\nu=\rho}^{\nu=\infty} \varepsilon_\nu \pi^\nu .$$

Le terme « *Nombre-à-base*-p » les caractérisent entièrement[1].

Dans les A, qui seront appelés « Nombres-à-base-p rationnels » les coefficients e_ν sont des nombres rationnels quelconques. Ces e_ν sont astreints à la seule condition d'être entiers par rapport à p, c'est-à-dire d'être des nombres dont le dénominateur, dans l'expression réduite, n'est pas divisible

[1] Voir la note bibliographique consacrée par M. Hadamard au livre dont il s'agit ici. *Revue générale des Sciences,* Année 1909, p. 961. Le terme « *Nombre-à-base*-p » (Nombre écrit avec une majuscule) est la traduction par M. Hadamard de celui de « p-*adische Zahl* » adopté par M. Hensel.

par le nombre p qui, par hypothèse, est un nombre premier. Les exposants ν sont des entiers, dont le premier ρ peut d'ailleurs être négatif.

Les quantités

$$A_k = e_\rho p^\rho + e_{\rho+1} p^{\rho+1} + \dots + e_{k-1} p^{k-1}, \qquad (k = \rho, \rho + 1, \dots)$$

seront, par définition, les *valeurs approchées* de A, dans le domaine de p.

Deux Nombres-à-base-p, A et A′, sont *égaux dans le domaine de* p, lorsque leurs valeurs approchées A_k et A'_k, pour des k suffisamment grands sont toujours congrues entre elles pour des modules égaux à des puissances de p aussi élevées qu'on veut.

Ajoutant à ces définitions celles qui correspondent aux opérations fondamentales de l'arithmétique (addition, soustraction, multiplication et division), on en conclut ensuite que les Nombres-à-base-p rationnels constituent dans leur totalité un corps $K(p)$[1].

Un Nombre-à-base-p rationnel est d'*ordre k*, si ses valeurs approchées sont toutes exactement divisibles, par rapport à p, par p^k; autrement dit, si ces valeurs sont successivement égales à p^k multiplié par une fraction, qui, sous forme réduite, n'a ni son numérateur ni son dénominateur divisible par p. Cet ordre sera, en général, égal à l'exposant de la première puissance de p entrant dans l'expression du Nombre-à-base-p, car, de tous les développements qui peuvent correspondre à un même Nombre-à-base-p, celui qu'on rencontre le plus souvent se présente sous forme *réduite*, c'est-à-dire avec coefficients égaux à 0, 1, 2... ou p — 1.

Les éléments B peuvent s'appeler « Nombres-à-base-p algébriques ». Ils se rattachent par leur définition à une équation déterminée

$$(3) \qquad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

à coefficients rationnels entiers, irréductible dans le domaine de p, c'est-à-dire avec premier membre indécomposable en un produit de polynômes dont les coefficients appartiendraient au corps $K(p)$.

Soit α l'une des racines de (3) et π l'un des nombres d'ordre minimum par rapport à p, du corps algébrique (au sens classique) se rattachant à α. On a $\pi^e = p\beta$, où β représente un nombre algébrique entier par rapport à p, non divisible algébriquement par p, et e un nombre entier. π est, dans le corps considéré, diviseur premier de p. Les ε_ν désignent en outre toute quantité de ce même corps, entière par rapport à p.

Si l'on considère alors la totalité des éléments B de (2) où les ε_ν et π ont la signification qui vient de leur être donnée, on voit que ces éléments constituent à leur tour un nouveau corps que M. Hensel désigne par $K(p, \alpha)$.

π est en général égal à p. Il n'en diffère que lorsque p est un diviseur du discriminant de l'équation (3).

Les définitions de l'égalité de deux Nombres-à-base-p algébriques, et celle de l'ordre par rapport à π, sont en tous points semblables à celles qui ont été rappelées touchant les Nombres-à-base-p rationnels.

---

[1] Voir à ce propos : HENSEL, *Ueber die zu einer algebraischen Gleichung gehörigen Auflösungskörper* (*Journal de Crelle*, t. 137, p. 183 à 210). — STEINITZ, *Algebraische Theorie der Körper* (*Ibid.*, t. 138, p. 167 à 310). — Ces deux récents travaux mettent en lumière un grand nombre de points importants. Beaucoup de détails de la présente analyse sont empruntés au premier d'entre eux.

$K(p)$ et $K(p, \alpha)$ jouissent des propriétés communes à tous les corps. Il en résulte que la plupart des propositions de l'arithmétique et de l'algèbre élémentaires s'y transportent simplement. On verrait, en particulier, qu'un produit de Nombres-à-base-p appartenant à $K(p)$ ou à $K(p, \alpha)$ ne peut être nul que s'il en est de même de l'un de ses facteurs[1]; que tout polynôme, dont les coefficients sont des Nombres-à-base-p, n'est décomposable que d'une seule façon en un produit de polynômes de même nature; etc.

Ces préliminaires établis, passons à ce qui sert de base à toute la théorie.

Soit $K(\omega)$ le corps algébrique (au sens classique) qu'on se propose d'étudier et

$$F(x) = 0 \tag{4}$$

l'équation de degré n, à coefficients rationnels, irréductible (au sens classique), par lequel il est défini.

p représentant alors un nombre premier, il existe toujours, en correspondance avec (4) et défini par une équation de même nature que (3), un corps $K(p, \delta)$ de Nombres-à-base-p algébriques tel que le premier membre de (4) soit, dans ce corps, décomposable d'une manière unique en un produit

$$F(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \ldots (x - \xi_n) \qquad (p) \tag{5}$$

de facteurs du premier degré[2].

Cette dernière égalité n'a d'ailleurs, au point de vue analytique ordinaire, qu'un sens tout à fait formel et signifie, qu'effectuant les opérations symbolisées par son second membre où les ξ_i sont des Nombres-à-base-p algébriques du corps $K(p, \delta)$, on tomberait sur un polynôme en x dont les coefficients seraient, au sens donné plus haut pour l'égalité de deux Nombres-à-base-p, égaux à ceux de $F(x)$.

La relation (5) établit, en outre, entre les racines de (4) et les ξ_i, une correspondance uniforme dont on fera usage dans toutes les questions où peut intervenir la divisibilité par p des éléments du corps $K(\omega)$.

La puissance exacte de p, entrant comme diviseur dans le discriminant du nombre ω s'obtiendrait, par exemple, en remplaçant, dans le déterminant qui le représente, ω et toutes ses valeurs conjuguées par leurs expressions en fonction des ξ_i. Ce déterminant, tous calculs faits, deviendrait égal à un Nombre-à-base-p rationnel d'où l'on déduirait de suite la puissance cherchée.

Les systèmes fondamentaux dans $K(\omega)$ s'obtiennent rapidement aussi par des procédés analogues.

Ces opérations sont légitimes par le fait que toute relation rationnelle à coefficients rationnels reliant entre eux un nombre quelconque d'éléments

---

[1] Cette proposition n'est vraie pour les éléments de $K(p)$ que parce que p est un nombre premier. Elle n'est vraie aussi pour ceux de $K(p, \alpha)$ que parce que l'équation à laquelle se rattache ce corps est, par hypothèse, irréductible dans le domaine de p. Un élément de $K(p)$ ou de $K(p, \alpha)$ est nul lorsque tous ses coefficients c_ν ou ε_ν sont tous divisibles par p.

[2] Toute équation admet une infinité de pareils « *corps de réduction* » $K(p, \delta)$; mais les résultats auxquels on est conduit par l'adoption de l'un ou de l'autre restent identiques. Voir le mémoire cité de M. Hensel.

du corps K(ω) se trouve encore vérifiée, dans le domaine de p, lorsqu'on y remplace ces éléments par les suites qui leur correspondent et qui se déduisent des ξ_i.

Tout se passe d'ailleurs de la même façon que s'il s'agissait de fonctions algébriques se rattachant à une équation $F(y, x) = 0$. Ces différentes fonctions sont développables dans le voisinage d'un point quelconque, $x = a$, en séries ordonnées suivant les puissances croissantes, entières ou fractionnaires, de $x - a$.

Mais l'analogie se poursuit plus loin encore. Le premier membre de (4) peut être irréductible, ou décomposable, d'une seule façon, en un produit de facteurs irréductibles dans le domaine de p.

On aura, par exemple, les $f_i(x)$ représentant des polynômes dont les coefficients seront des Nombres-à-base-p rationnels,

$$(6) \qquad F(x) = f_1(x) f_2(x) \ldots f_\lambda(x) \qquad (p)$$

de sorte qu'on voit que les ξ_i, ou ce qui revient au même, que les racines (au sens classique) de $F(x)$ se répartissent en *cycles* dans le domaine de p. Ce résultat fondamental s'obtient par comparaison des seconds membres de (5) et (6), qui, formellement et tous calculs faits, sont évidemment identiques.

A chaque cycle d'une fonction algébrique y correspond, comme on sait, un point P de la surface de Riemann relative à y. On peut dire aussi que ce point P, qui se rapporte d'ailleurs à une valeur déterminée, $x = a$ de x, symbolise l'un des facteurs, irréductible dans le voisinage de $x = a$, du polynôme $F(y, x)$ qui donne naissance à la fonction y.

Si la fonction algébrique $z = \varphi(x, y)$ est au point P d'ordre déterminé k, cela peut s'exprimer en disant que z est en ce point divisible exactement par P^k. Cette notion, dont M. Hensel a tiré le plus grand parti dans ses nombreux mémoires et dans son grand traité sur les fonctions algébriques, intervient de nouveau ici dans la définition des *diviseurs premiers algébriques*. Ceux-ci sont des symboles $\mathfrak{p}$ que M. Hensel fait correspondre à tous les diviseurs irréductibles de $F(x)$ dans les domaines respectifs de tous les nombres rationnels p.

Ces diviseurs premiers se rattachent ainsi respectivement à chaque cycle de racines de $F(x) = 0$. Ils sont indépendants de la quantité primitive du corps considéré. Les premiers membres des équations que vérifient ces quantités sont, en effet, décomposables de la même façon que $F(x)$ en facteurs irréductibles dans le domaine de chaque nombre premier p.

Une quantité β du corps K(ω) sera, d'autre part, divisible par $\mathfrak{p}^k$, si, dans le cycle qui correspond à $\mathfrak{p}$, β se trouve, par rapport à la puissance fractionnaire de p dont ce dernier dépend d'un ordre égal à k. Ceci se justifie, en remarquant qu'à chaque diviseur $f_i(x)$ de $F(x)$ correspond par l'intermédiaire d'une équation analogue à l'équation (3), un corps bien déterminé de Nombres-à-base-p algébriques. L'exposant k, toujours entier, de $\mathfrak{p}$ est l'ordre par rapport à π du Nombre-à-base-p algébrique qui correspond dans ce corps à β.

De la notion de diviseur premier, on passe à celle de *diviseur* en général. On nomme ainsi un produit de puissances de diviseurs premiers. A cette définition vient s'ajouter celle du nombre algébrique multiple d'un diviseur

donné, notion immédiate, d'après ce qui précède, et qui conduit à celle d'*idéal*.

Les multiples d'un diviseur donné constituent dans le corps considéré un idéal et à chaque idéal se rattache ainsi un diviseur de Hensel, plus grand commun diviseur en quelque sorte de tous les éléments de l'idéal. Le théorème fondamental de l'arithmétique élémentaire prend, enfin, chez M. Hensel, la forme suivante : « *Tout nombre algébrique entier est égal (ou équivalent) au produit, d'ailleurs unique et bien déterminé, de ses diviseurs premiers.* »

Telle sont, sans qu'il soit possible d'entrer dans le moindre détail, dans leurs grandes lignes et en traits généraux, les notions essentielles qu'on rencontre dans l'important volume de M. Hensel. Les principes de ce dernier seront peut-être un jour applicables à toutes les catégories de nombres. Ce but cependant ne semble pas encore atteint. Dans certaines pages consacrées à l'examen de développement convergents et qui sont aussi ordonnés suivant les puissances croissantes de p, on se rend compte des difficultés qu'il y a à faire correspondre à un nombre défini autrement que par une relation algébrique, un Nombre-à-base-p unique et bien déterminé.

M. Hensel, heureusement, poursuit ses profondes recherches. Un second volume, dont on ne peut que se réjouir d'avance, doit paraître bientôt.

Gustave Dumas (Zurich).

A. Höfler. — **Didaktik des mathematischen Unterrichts** (Band I der *Didaktischen Lehrbücher für den realistischen Unterricht an höheren Schulen*, herausgegeben von A. Höfler u. E. Poske). — 1 vol. gr. in-8°, 509 p., avec 2 planches et 147 figures ; B. G. Teubner, Leipzig.

Les efforts qui se font depuis quelques années pour perfectionner les méthodes de l'enseignement scientifique devaient nécessairement donner lieu à des monographies spéciales, conformes aux tendances actuelles. C'est cet ensemble d'études didactiques que viennent d'entreprendre MM. Höfler et Poske sous le titre indiqué ci-dessus ; elles embrasseront toutes les branches scientifiques de l'enseignement secondaire supérieur et comprendront dix volumes, en vente séparément.

Le premier volume est consacré aux mathématiques. Entièrement nouveau par la forme et le fond de l'exposé, l'Ouvrage de M. Höfler ne fait pas double emploi avec les exposés systématiques de Reidt et de Simon. Il se propose d'insister tout particulièrement sur les idées fondamentales qui forment la base de la réforme actuelle de l'enseignement mathématique. Il s'agit souvent de transformations qui ont reçu une solution favorable dans bon nombre d'écoles, sur l'initiative des maîtres, ou qui sont déjà introduites dans certains programmes officiels, mais que l'on voudrait cependant voir adoptées d'une façon générale dans tout l'enseignement secondaire supérieur. Telle est par exemple la question de l'introduction de la notation de fonction et du calcul infinitésimal, dont on parle tant ces dernières années.

M. Höfler a été bien inspiré en ne traitant pas séparément l'Arithmétique et la Géométrie. Il examine le but, les plans d'études et les méthodes, adaptés à l'âge de l'élève, successivement pour chaque degré de l'enseignement.

Nous ne saurions trop recommander aux jeunes maîtres l'étude de cet Ouvrage, sur lequel nous aurons sans doute souvent à revenir dans cette Revue.

H. F.

F.-W. Lanchester. — **Aerodynamik.** Ein Gesamtwerk über das Fliegen. Aus dem Englischen übersetzt von C. u. A. Runge. Band I. — I vol. relié in-8°, 360 p.; 12 Mk.; B.-G. Teubner, Leipzig.

Les questions d'aérodynamique sont d'une grande actualité aujourd'hui. Des recherches théoriques et pratiques se poursuivent de tous les côtés. Le présent livre offre donc un intérêt tout particulier et vient répondre à un réel besoin. L'auteur a réuni dans ce premier volume les notions fondamentales concernant les bases hydrodynamiques du problème du vol. Par ses recherches à la fois théoriques et expérimentales, il était bien qualifié pour faire un exposé destiné non seulement aux physiciens et aux ingénieurs, mais aussi à tous ceux qui, s'intéressant à ce problème, ne possèdent qu'une faible préparation en mathématiques et en physique.

La rédaction allemande a été faite avec beaucoup de soin par M. Runge, professeur à l'Université de Gœttingue.

Max Mandl. — **Lehrbuch der Geometrie für die oberen Klassen der Realschulen** (IV.—VII. Klasse). — I vol. in-8°, 382 p., 305 fig.; broché 4 Kr., relié, Kr. 4,50; Manzsche k. u. k. Buchhandlung, Vienne.

On sait que de nouveaux plans d'étude ont été adoptés dernièrement en Autriche pour l'enseignement secondaire supérieur. Ce manuel, qui s'adresse aux élèves des classes supérieures des écoles réales, a été conçu conformément aux idées nouvelles; il ne traite pas seulement la géométrie proprement dite, mais également la trigonométrie plane et sphérique et la géométrie analytique.

L'ouvrage comprend six parties : 1. Planimétrie. — 2. Stéréométrie. — 3. Trigonométrie plane. — 4. Trigonométrie sphérique. — 5. Géométrie analytique (On y trouvera également un complément comprenant entre autres les sections coniques). — 6. Introduction des éléments du calcul infinitésimal.

L'auteur s'est inspiré des tendances modernes, il laisse de côté toute matière inutile; en stéréométrie, par exemple, il aborde immédiatement les corps proprement dits sans passer par tous les théorèmes concernant le plan et la droite. Il cherche avant tout à développer l'intuition géométrique et s'attache également au côté pratique. On notera à cet égard l'application de la trigonométrie sphérique à la cosmographie.

La notion de fonction est introduite dès le début et se développe peu à peu, à chaque occasion, dans tout le cours de l'ouvrage jusqu'à l'étude de la variation d'une fonction à l'aide du coefficient différentiel.

Signalons encore les nombreuses remarques historiques dont l'ouvrage est parsemé (sur π, la quadrature du cercle, la division de la circonférence en n parties égales, etc.). Elles contribueront certainement à éveiller l'intérêt des élèves.

Cet ouvrage se recommande également par la clarté des figures et la disposition favorable du texte. J.-P. Dumur (Genève).

E. Pendlebury. — **Exercises and examination papers in arithmetic, logarithms and mensuration.** 7me édition, revue et augmentée. — I vol. in-16, 212 p., relié 2 s. 6 d.; G. Bell and Sons, Londres.

M. Pendlebury a réuni dans ce recueil des problèmes et exercices dont la plupart ont été proposés dans différents examens : examens d'entrée pour

l'armée et examens organisés par les universités d'Oxford, de Cambridge et de Londres.

Un chapitre est consacré à des exercices et problèmes sur les mesures de surface et de volume et à des calculs logarithmiques. Le volume se termine par les réponses aux problèmes proposés.

L'ouvrage de M. Pendlebury en est à la 7me édition qui a subi des modifications considérables soit dans l'ordre suivi, soit en ce qui concerne les problèmes eux-mêmes et constitue ainsi presque un nouveau recueil. Cet ouvrage sera utile pour la préparation des examens.

H. Poincaré. — **Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik.** — 1 brochure gr. in-8° de 60 p. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Ces conférences, faites à l'Université de Göttingen par M. Poincaré, ont été rédigées par des étudiants qui ont ainsi trouvé le moyen de rendre hommage à un grand maître et d'être utile à ceux qui ne pouvaient l'écouter.

Elles ont trait à des travaux qui ont déjà eu des échos dans différents périodiques y compris d'ailleurs l'*Enseignement mathématique*.

La première conférence *Ueber die Fredholmschen Gleichungen* a trait à des travaux brièvement traités par M. Poincaré dans les *Comptes Rendus*. Il y est question des noyaux réitérés et des méthodes qui rattachent à l'équation de Fredholm les développements dont la série de Fourier est le type le plus simple. Dans son *Anwendung der Theorie der Integralgleichungen auf die Flutbewegung des Meeres*, il revient sur l'application des méthodes de Fredholm à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du problème des marées. D'ailleurs à la page 293 de son récent ouvrage sur la Théorie des Marées (*Ens. math.* T. XII, 1910, p. 256), M. Poincaré renvoie à la conférence en question. De même, dans son *Anwendung der Integralgleichungen auf Hertzsche Wellen*, nous sommes en relation avec un très important Mémoire *Sur la diffraction des ondes hertziennes* (*Rendiconti di Palermo*. T. 29, p. 169).

La conférence *Ueber die Reduktion der Abelschen Integrale und die Theorie der Fuchsschen Funktionen* nous reporte dans un sujet où M. Poincaré est revenu à diverses reprises durant toute sa carrière ; on sait qu'il jeta les bases de la théorie des fonctions fuchsiennes dans un Mémoire inséré au tome I des *Acta Mathematica*.

Ueber transfinite Zahlen nous rappelle les discussions logiques auxquelles furent mêlées récemment les noms de Russell, Zermelo, etc...

Enfin dans *La Mécanique nouvelle*, conférence faite en français, l'auteur examine la mécanique des grandes vitesses, la non invariabilité de la masse et l'origine électromagnétique de celle-ci. Le tout sous la forme philosophique analogue d'ailleurs à celle employée par M. Poincaré le 3 août 1909 au Congrès de Lille. On trouvera un résumé à ce sujet dans l'*Enseignement mathématique* de cette époque. Il est probable que M. Poincaré ne songeait pas à rédiger ces conférences : l'offre qui lui en a été faite par ses auditeurs allemands prouve assez la valeur qu'ils y ont attribué.

A. Buhl (Toulouse).

K. Schwarzschild. — **Ueber das System der Fixsterne.** Aus populären Vorträgen. — 1 fasc. in-8°, 44 p. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Dans cet opuscule le directeur de l'observatoire de Potsdam donne un

aperçu rapide des récents progrès réalisés dans les recherches astronomiques. Les conférences de M. Schwarzschild ont beaucoup contribué au développement de l'astronomie populaire et cela dans un sens très heureux, contrairement à l'influence de tant d'autres astronomes populaires du temps présent. Il domine complètement le sujet et par cela même il peut, mieux que de simples imitateurs, rendre populaires, tout en les exposant scientifiquement, des sujets souvent très difficiles. Des aperçus de ce genre sont un excellent contrepoids à d'autres écrits, qui semblent pousser comme de la mauvaise herbe, et qui contiennent souvent une profusion d'illustrations sans être réellement instructifs. S. Mauderli (Soleure).

R. Suppantschitsch. — **Leitfaden der darstellenden Geometrie** für die V. und VI. Klasse der Realgymnasien. — 1 vol. in-8°, 196 pages, 212 fig., 204 problèmes, cart., 3 kr.; F. Tempsky, Vienne, 1910.

Ces *Eléments de géométrie descriptive* font partie du Cours de mathématiques que M. Suppantschitsch destine aux lycées autrichiens. On retrouve dans ce manuel, il est presque superflu de le dire, toutes les remarquables qualités d'exposition que nous avons signalées en donnant un aperçu des premiers volumes.

L'étude des projections et développements du parallèlipipède rectangle et de la pyramide quadrangulaire forme l'objet de l'introduction et du premier chapitre; les projections normales du point et du segment rectiligne sur une ligne droite précèdent également l'étude des diverses positions d'un point par rapport aux plans de projections; c'est là un fait intéressant conforme aux idées pédagogiques nouvelles.

Le deuxième chapitre (p. 16 à 52) est consacré aux droites, aux projections sur un plan de profil, aux rotations des droites. Dans le troisième (pages 52 à 62), intitulé *Projections obliques*, l'auteur introduit les coordonnées dans l'espace et en donne quelques applications simples à la représentation des cristaux.

Ce n'est que dans le chapitre suivant : *Solution de problèmes de stéréométrie au moyen du dessin*, que nous trouvons l'étude du plan donné par ses traces; la théorie des ombres d'une pyramide, d'un triangle sur un plan quelconque, d'une droite sur une autre droite, — et un « tableau-résumé » des problèmes fondamentaux de la stéréométrie terminent la première partie.

Le deuxième livre est aussi divisé en quatre chapitres.

Le chapitre V (p. 98 à 129) a pour titre : *Polygones, prismes et pyramides*; il se remarque par l'application continuelle de l'affinité.

Dans le chapitre VI (p. 129 à 179) *Cylindres et cônes de révolution, sphère, projections d'un cercle*, l'auteur s'étend assez longuement sur les sections coniques; il détermine, entre autres, les points d'intersection d'une droite et d'une section conique; comme application figure la recherche des ombres du cylindre et du cône.

Le chapitre VII (p. 179 à 186) traite de *la Sphère*, sections planes et ombres; enfin les principales notions relatives aux *Surfaces de révolution* sont exposées sommairement dans le VIIIme et dernier chapitre.

La lecture de cet intéressant manuel doit être recommandée à toutes les personnes qui enseignent la géométrie descriptive.

Aug. Lalive (La Chaux-de-Fonds).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Publications périodiques :

Acta Mathematica, dirigé par Mittag-Leffler, T. XXXIII, Stockholm.

Fasc. 2 et 3. — P. Cousin : Sur les fonctions triplement périodiques de deux variables (128 p.). — Stridsberg : Sur quelques propriétés arithmétiques de certaines fonctions transcendantes. — H. von Koch : Contribution à la théorie des nombres premiers.

Fasc. 4. — F. Enriques et F. Severi : Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques. — C. Posse : Deux erreurs dans la table des racines primitives de Wertheim.

American Journal of Mathematics, edited by Fr. Morley, Baltimore.

Vol. XXXII, N° 2. — H. E. Hawkes : The reduction of families of bilinear forms. — J. R. Conner : Basic systems of rational Normcurves. — Virgil Snyder : Surfaces invariant under infinite discontinuous birational groups defined by line congruences. — Arthur C. Lunn : The apparent size of a closed curve. — J. I. Hutchinson : On linear transformations which leave an Hermitian form invariant.

Annaes scientificos da Academia polytechnica do Porto, dirigées par Gomes Teixeira. — Vol. V.

Nos 1 et 2. — G. Pirondini : Essai d'une théorie analytique des lignes non-euclidiennes. — P. Appell : Les polynômes d'Hermite rattachés aux polynômes de Legendre. — F. Gomes Teixeira : Sobre os integraes de Fresnel. — J. Rose : Sur la courbe aréolaire d'une courbe donnée. — G. Pirondini : (suite).

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. — 3me série. Gauthier-Villars, Paris.

Tome I, fasc. 1. — E. Goursat : Sur un problème relatif à la déformation des surfaces. — H. Lebesgue : Sur les intégrales singulières. — H. Lebesgue : Remarques sur un énoncé dû à Stieltjes et concernant les intégrales singulières.

Annales de la Société scientifique de Bruxelles.

33e année, fasc. 3 et 4. — J. Neuberg : Sur la géométrie du Tétraèdre.

34e année, fasc. 1. — P.-H. Bosmans : Un émule de Viète, Ludolphe van Ceulen ; analyse de son « Traité du cercle ».

Annales de l'Université de Grenoble. Tome XXII.

N° 1. — Cotton : Recherche d'un trièdre invariable.

Annali di Matematica. Directeurs : L. Bianchi, U. Dini, G. Jung, C. Segre. Série III, t. XVII. — Rebeschini di Turati e C., Milan.

Fasc. 1. — Fr. Iseli : Lösung bestimmter Integrale durch Veränderung des Integrationsweges. — A. Tonolo : Sull'integrazione delle equazioni fondamentali dell'elettrodinamica. — Eug.-Elie Levi : Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse.

Fasc. 2. — Signorini : Sulla permuttabilità della transformazione H colla transformazione B nella teoria delle superficie applicabili sulle quadriche. — Russyan : Dimostrazione d'un teorema sopra i massimi e minimi delle funzioni di più variabili indipendenti. — Fubini : Equazioni integrali e velori eccezionali. — Tedone : Saggio di una teoria generale delle equazioni dell'equilibrio elastico per un corpo isotropo.

Annals of Mathematics, published under the Auspices of Harvard University. Second Series, vol XI, 1909-1910. — Cambridge, Mass. E. U.

N° 1. — F. Gilman : Theory of Floating Tubes. — O Dunkel : Generalized Geometric Means and Algebraic Equations. — Prof. J.-W. Young : The Geometry of Chains on a Complex Line.

N° 2. — L.-J. Hewes : Necessary and Sufficient Conditions that an Ordinary Differential Equation Shall Admit a Conformal group. — C.-M. Conwel : The 3-Space PG (3,2) and ist Group. — S.-E. Rasor : The Geodesic Lines on the Helicoïd. — E.-B. Escott : Cubic Congruences with Three Real Roots.

N° 3. — E.-H. Moore : A Generalization of the Game Called Nim. — R.-E. Gleason : A Simple Method for Graphically Obtaining the Complex Roots of a Cubic Equation — F.-R. Sharpe : The Topography of Certain Curves Defined by a Differential Equation. — H. Barnum : Abel's Theorem and the Addition Formulæ for Elliptic Integrals. — W.-B. Ford : On the Determination of the Asymptotic Developpements of a Given Function. — W.-H. Jackson : The Integral Roots of Certain Inequalities.

Archiv der Mathematik und Physik, herausgegeben von E. Lampe, W. Meyer, E. Jahnke, 16. Band. — B. G. Teubner, Leipzig und Berlin.

Heft 1. — S. Jolles : Der Zusammenhang der Doppelsechs mit der Grassmannschen Erzeugung kubischer Flächen. — M. Krause : Zur Theorie der ebenen unveränderlichen Systeme. — J. Neuberg : Zur Tetraedergeometrie. — Philip.-E.-B. Jourdain : The Development of the Theory of Transfinite Numbers. (Part. III. From 1870 to 1882.) — E. Stübler : Eine Bemerkung über die Deformation von Rotations- und Schraubenflächen.

Bibliotheca mathematica. Zeitsch. f. Geschichte der mathem. Wissenschaften herausgegeben von G. Eneström. — 3. Folge, Teubner, Leipzig.

Band 10. Hefte 1-3. — G. Eneström : Zur Frage der verschiedenen Arten mathematischer Geschichtsschreibung. — H. Suter : Die Abhandlung des Abu Kamil Shoga' b. Aslam « über das Fünfeck und Zehneck ». — G. Eneström : Ueber das angebliche Vorkommen krummliniger Koordinaten bei Leibniz. — H.-W. Tyler : On the course in the history of mathematics in the Massachusetts institute of technology. — Heinrich Vogt : Die Ent-

deckungsgeschichte des Irrationalen nach Plato und anderen Quellen des vierten Jahrhunderts. — Heinrich SUTER : Zur Trigonometrie der Araber. — Florian CAJORI : A note on the history of the slide rule. — Yoshio MIKAMI : The circle-squaring of the Chinese. — J.-L. HEIBERG u. E. WIEDEMANN : Ibn al Haitams Schrift über parabolische Hohlspiegel. — G. ENESTRÖM : Ueber das angebliche Dezimalbruchzeichen einiger der ältesten gedruckten Rechenbücher. — G. VIVANTI : Un tentativo di Eulero di evitare le quantità complesse nella integrazione delle equazioni differenziali lineari. — A. KRAZER : Die Erklärung der Vieldeutigkeit der elliptischen Integrale bei Jacobi und Puiseux. — G. ENESTRÖM, A. FAVARO, etc. : Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage von Cantors « Vorlesungen über Geschichte der Mathematik ».

Bulletin de la Société française de Philosophie. Armand Colin, Paris.

9e année, nº 8. — Vocabulaire philosophique, fasc. nº 12 : Individu à Kinesthésique.

10e année, nº 1. — Le mouvement brownien; thèse de M. PERRIN et discussion.

Bulletin de la Société Mathématique de France. T. XXXVIII. Paris.

Fasc. 1 et 2. — P. BOHL : Sur certaines équations différentielles d'un type général, utilisables en Mécanique. — E. GOURSAT : Sur la définition de l'aire d'une surface courbe. — Em. COTTON : Equations différentielles et équations intégrales. — L. RAFFY ; Généralisation d'une propriété de la sphère. — Ch. BIOCHE : Sur l'intégration de certaines équations différentielles.

Bollettino di Matematica. Giornale scientifico didattico per l'incremento degli Studi matematici nelle Scuole medie. Diretto dal Dott. Alb. CONTI. Anno IX. Roma, 1910.

Bulletin des Sciences mathématiques, rédigé par G. DARBOUX, E. PICARD, J. TANNERY. — Tome XXXIV, 1910, Paris, Gauthier-Villars.

Janvier-mars 1910. — D. GRAVÉ : Sur les équations du 5e degré résolubles algébriquement, quand le produit des racines reste arbitraire. — HUMBERT : Démonstration analytique d'une formule de Liouville. — Kirstine MEYER, née BJERNUM : De quelques manuscrits d'Ole Rœmer.

Comptes rendus et analyses. — Revues des publications académiques et périodiques.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris.

1er semestre. 1910 (suite). — 7 mars. — A. DENJOY : Sur la mesure des ensembles. — DE SEGUIER : Sur le groupe symétrique et le groupe alterné. — W. STEKLOFF : Sur le développement d'une fonction arbitraire en séries procédant suivant certaines fonctions fondamentales. — J. MARTY : Développements suivant certaines solutions singulières. — S. JANISZWESKI : Contribution à la géométrie des courbes planes générales. — J. BOUSSINESQ : Intégration des équations des ondes d'émersion, par la formule de Mac-Laurin, en séries toujours convergentes, pour un canal profond sans extrémités et pour un bassin indéfini en tous sens. — HADAMARD : Sur les ondes liquides. — M. BRILLOUIN : Questions de Physique mathématique comportant des conditions différentes sur diverses parties d'une même frontière. — H. ANDOYER : Nouvelles Tables trigonométriques fondamentales.

14 mars. — F. Riesz : Sur certains systèmes d'équations fonctionnelles et l'approximation des fractions continues. — L. Remy : Sur les surfaces algébriques représentables sur celle de Kummer. — H. Larose : Sur l'équation des télégraphistes.

21 mars. — J. Haag : Sur quelques familles de Lamé. — A. Chatelet : Sur une transformation des fractions continues arithmétiques. — Hadamard : Sur les ondes liquides.

4 avril. — J. Haag : Sur la représentation sphérique de certaines familles de Lamé. — René Arnoux : L'équilibre longitudinal et la courbure des surfaces portantes des aéroplanes.

11 avril. — G. Bratu : Sur certaines équations intégrales non linéaires. — Paul Levy : Sur les équations intégrales non linéaires.

18 avril. — M. Tzitzeica : Sur une nouvelle classe de surfaces. — A. Blondel : Sur l'équation fonctionnelle linéaire. — A. Petot : Sur le mode d'action des roues motrices.

25 avril. — C. Russyan : La méthode de Jacobi généralisée d'intégration du système d'équations différentielles du premier ordre. — Joseph Marty : Existence de solutions singulières pour certaines équations de Fredholm. — Michel Fekete : Sur les séries de Dirichlet. — Ouivet : Sur une application des transformations birationnelles. — H. Vergne : Sur les changements canoniques des variables.

2 mai. — A. Guichard : Sur un mode de génération des systèmes triple-orthogonaux à lignes de courbure sphérique dans un seul système. — J. Haag : Sur certains systèmes triple-orthogonaux. — P.-E. Gau : Sur l'intégration, par la méthode de M. Darboux, des équations aux dérivées partielles du second ordre de la forme $s = a(x, y, z)p + b(x, y, z)q + c(x, y, z)$. — Jean Chazy : Sur les équations différentielles déduites de certains invariants des formes linéaires. — S. Lattès : Sur la convergence des relations de récurrence. — Léon Lichtenstein : Sur la définition générale des fonctions analytiques. — A. Chatelet : Sur la sommation des fractions continues arithmétiques.

9 mai. — Gaston Darboux : Sur une classe particulière de systèmes triple-orthogonaux.

17 mai. — Gaston Darboux : Sur l'emploi de nouvelles méthodes de récurrence dans la théorie des systèmes orthogonaux. — Tzitzéica : Sur une nouvelle classe de surfaces. — E. Ouivet : Sur l'équation différentielle du mouvement d'un projectile sphérique pesant dans l'air. — M. Frechet : Sur les fonctionnelles continues.

23 mai. — L. Féjer : Sur les sommes partielles de la série de Fourier.

30 mai. — P.-E. Gau : Sur la recherche des intégrales intermédiaires de l'équation $s = f(x, y, z, p, q)$. — S. Lattès : Sur les séries de Taylor à coefficients récurrents. — J. Le Roux : Sur la distribution des torsions dans la déformation infinitésimale d'un milieu continu. — H. Larose : Sur deux suites de solutions de l'équation des télégraphistes.

6 juin 1910. — J. Marty : Valeurs singulières d'une équation de Fredholm. — L. Zoretti : Sur les propriétés des lignes cantoriennes. — Saltykow : Sur la généralisation du théorème de S. Lie. — E. Barre : Sur une série de solutions des équations de l'élasticité de Lamé dans un milieu homogène et isotrope. — A. Chatelet : Sur le classement d'un système de tableaux équivalents entre eux.

13 juin. — Léon Autonne : Sur les groupes commutatifs de quantités

hypercomplexes. — A. Buhl : Sur la transformation des séries asymptotiques en séries de polynomes tayloriens convergentes. — N. Saltykow : Sur les applications du théorème de S. Lie généralisé. — René de Saussure : Sur les corps solides opposés. — J. Le Roux : Sur la flexion. — J. Arnoult : Sur le mouvement d'un fil dans l'espace.

20 juin 1910. — E. Vessiot : Sur l'intégration des systèmes complets. — Nicolau : Sur la variation dans le mouvement de la lune. — J. Boussinesq : Sur les principes de la mécanique et sur leur sensibilité à certains phénomènes qui semblent mettre en défaut certains d'entre eux. — Hadamard : Quelques propriétés des fonctions de Green.

2me *semestre*, 1910. — Séance du 4 juillet. — S. Bernstein : Sur les équations de la Mécanique et du Calcul des variations. — A. Korn : Sur les mouvements stationnaires d'un liquide doué de frottement.

11 juillet. — E. Study : Sur la Géométrie des feuillets de MM. R. de Saussure et Bricard. — A. Denjoy : Continu et discontinu.

18 juillet. — J. Drach : Sur le problème logique de l'intégration des équations différentielles. — Serge Bernstein : Sur les équations du Calcul des variations. — S. Janieszewski : Sur la Géométrie des lignes cantoriennes. — L. Zoretti : Sur la notion de ligne. — J. Chazy : Sur une équation différentielle du troisième ordre dont les intégrales ont leurs points critiques fixes. — R. Garnier : Sur une classe d'équations différentielles dont les intégrales ont leurs points critiques fixes. — Schulhof : Remarques sur les inégalités de la longitude de la lune. — W. Jarkowski : Quelques théorèmes sur les sustentateurs.

25 juillet. — R. Bricard : Au sujet d'une réclamation de priorité de M. E. Study. — P. Dienes : Sur un problème d'Abel. — E. Mazurkiewiez : Sur la théorie des ensembles. — A. Korn : Sur le problème biharmonique et le problème fondamental dans la théorie de l'élasticité.

1er août. — Th. de Donder : Sur le théorème de Poisson et sur les invariants différentiels de Lie. — P. Levy : Sur quelques équations définissant des fonctions de ligne. — H. Bohr : Sur la convergence des séries de Dirichlet. — A. Sainte-Laguë : La représentation proportionnelle et la méthode des moindres carrés.

8 août. — G. Darmois : Sur les correspondances à normales concourantes. — R. de Saussure : Au sujet d'une réclamation de priorité de M. E. Study. — H. Larose : Sur le problème du câble avec transmetteur.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von K. Hensel. Band CXXXVIII. — Georg Reimer, Berlin.

Heft 1. — G. Faber : Ueber die Newtonsche Näherungsformel. — L. Fejer : Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen. — G. Hettner : Die Gleichung der Schwartschen Minimalfläche in ihrem Zusammenhange mit den hyperelliptischen Thetafunktionen.

Heft 2. — H. Jung : Zur Theorie der Kurvenscharen auf einer algebraischen Fläche. — A. Thue : Ein Fundamentaltheorem zur Bestimmung von Annäherungswerten aller Wurzeln gewisser ganzer Funktionen. — K. Knopp : Grenzwerte von Dirichletschen Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze. — A. Fraenkel : Die Berechnung des Osterfestes. — L. Thome : Ueber eine Anwendung der Theorie der simultanen linearen Differentialgleichungen auf partielle Differentialgleichungen.

Intermédiaire des mathématiciens, dirigé par C.-A. Laisant, Em. Lemoine, Ed. Maillet, A. Maluski. — Tome XV, 1910. — Gauthier-Villars, Paris.

Mathematical Gazette (The), edited by W.-J. Greenstreet. — Vol. VI. George Bell & Sons, Londres.

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Blätter. Organ des Verbandes mathematischer und naturwissenschaftlicher Vereine an deutschen Hochschulen. 7. Jahrgang, 1910. — Kommissionsverlag, B. G. Teubner, Leipzig.

Mathésis. Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. Mansion et J. Neuberg. 3e série, Tome X, 1910. — Hoste, Gand; Gauthier-Villars, Paris.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Direttore G.-B. Guccia.

Tomo XXIX (1o semestre 1910). — P. Boutroux : Equations différentielles et fonctions multiformes. — P. Burgatti : Dimostrazione della non esistenza d'integrali algebrici (oltre i noti) nel problema del moto d'un corpo pesante intorno a un punto fisso. — G. Chillemi : Sulle superficie iperellittiche. — L.-S. Da Rios : Sul moto dei filetti vorticosi di forma qualunque. — G. Fano : Superficie algebriche di genere zero e bigenere uno, e loro casi particolari. — R. Fueter : Die Verallgemeinerte Kronecker'sche Grenzformel und ihre Anwendung auf die Berechnung der Klassenzahl. — L. Godeaux : Sur les déterminants récurrents du prof. E. Pascal. — H. Hahn : Über den Zusammenhang zwischen den Theorien der zweiten Variation und der Weierstrass'schen Theorie der Variationsrechnung. — Rev. F.-H. Jackson : A q-Generalization of Abel's Series. — G. Lauricella : Sopra gli sviluppi in serie di funzioni ortogonali. — H. Liebmann : Aequitangential- und Isogonaltransformation der partiellen Differentialgleichungen D_{12}. — J. Mollerup : Une remarque sur les équations intégrales de première espèce. — O. Perron : Über eine spezielle Klasse von Kettenbrüchen. — É. Picard : Sur un théorème général relatif aux équations intégrales de première espèce et sur quelques problèmes de Physique mathématique. — H. Poincaré : Sur la diffraction des ondes hertziennes. — D Pompeiu : Sur les singularités des fonctions analytiques uniformes. — A. Rosenblatt : Über das allgemeine thermoelastische Problem. — G.-B. Santangelo : Sulle curve di Mannheim, sulle radiali e sopra una generalizzazione di esse. — A. Schoenflies : Einfache Ableitung der Parameterformeln für Bewegungen und Umlegungen. — L. Tonelli : Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di più variabili reali. — Ch. Tweedie : The Collinearities of the Points of Inflexion of a Non-Singular Plane cubic and their Pretangentials. — H. Weber : Über den Satz von Malus für krummlinige Lichtstrahlen. — H. Weyl : Die Gibbs'sche Erscheinung in der Theorie der Kugelfunktionen. — Errata-Corrige. — Indici del Tomo XXIX (1o semestre 1910) ; Indice delle Materie ; Indice alfabetico dei Nomi.

Revue scientifique. Paris.

23 avril 1910. — J. Sageret : Le gnomon ; son rôle dans l'ancienne astronomie. — 14 mai. — B. Baillaud : Les Comètes.

Revue semestrielle des publications mathématiques, dirigée par H. de Vries, P.-H. Schoute, J. Cardinaal, J.-C. Kluyver, W. Kapteyn. — Tome XVIII, 1re partie, avril-octobre 1909. — Delsman en Nolthenius, Amsterdam, 1910.

School Science and Mathematics, A Journal for Science and Mathematics Teachers in secondary Schools, vol. X, 1910. Smith and Turton, Chicago.

Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften, Wien. — Math.-Naturw. Klasse. CXVIII. Band. 1909. — Gerold's Sohn, Vienne.

R. Daublesky v. Sterneck : Ueber die Kombinationen der zu einer Primzahlpotenz teilerfremden Restklassen zu bestimmten Summen. — E. Dintzl : Ueber die Zahlen im Körper $k(\sqrt{-2})$, welche den Bernoullischen Zahlen analog sind. — E. Dolezal : Das Stampfer'sche Schreiben-Polarplanimeter. — F. M. Exner : Zur Theorie der Tageshelle. — K. Federhofer : Zur Festigkeit radial belasteter Kreisbogen. — Ph. Frank : Die Stellung des Relativitätsprinzips im System der Mechanik und der Elektrodynamik. — R. Hackel : Zur elementaren Summierung gewisser zahlentheoretischer Funktionen. — H. Hahn : Ueber Extremalenbogen, deren Endpunkt zum Anfangspunkt konjugiert ist. — E. Hellbrand : Die günstigste Gewichtsverteilung bei Dreieckswickelmessungen mit Rücksicht auf den mittleren Punktfehler. — F. Jung : Der Verzerrungstensor in vektoranalytischer Darstellung. — E. Kruppa : Ueber Affinität und Parallelprojektion im vierdimensionalen Raume. — F. Mertens : Ueber Abel'sche Gleichungen und den Satz von Kronecker über die Teilungsgleichungen der Lemniskate. — E. Müller : Ueber Schiebflächen, deren Erzeugendenschar aus gewöhnlichen Schraublinien besteht. — Beiträge zur Grassmann'schen Ausdehnungslehre. I. Mitteilung: Einige allgemeine Sätze. — Th. Pöschl : Beitrag zur graphischen Dynamik zweier gelenkig verbundener ebener Systeme. — A. Prey : Ueber den Fall der Kommensurabilität vom Typus $\frac{1}{3}$ im System der kleinen Planeten. — W. Schnee : Ueber Mittelwertsformeln in der Theorie der Dirichlet'schen Reihen. — H. Tietze : Ueber die Konstruierbarkeit mit Lineal und Zirkel. — O. Tumlirz ; Die Zustandsgleichung der Flüssigkeiten bei hohem Drucke. — E. Wælsch : Ueber die Entwicklung des Produktes zweier Kugelfunktionen nach Kugelfunktionen. — V. Weis : Ueber das Flächengebüsch zweiter Ordnung mit vier Basispunkten. — W. Wirtinger : Bemerkungen zur Theorie der vollständigen Differentiale.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, herausgegeben von A. Thaer. — XVI. Jahrgang, 1910. — Otto Salle, Berlin.

Wiskundige Opgaven met de Oplossingen. Tome X, fasc. 1 à 4. — H. C. Delsman, Amsterdam.

Wiskundig Tijdschrift onder Redactie van F.-J. Vaes, Chr. Krediet, N. Quint. — VI. Jaargang, 1910. — P. Visser, Haarlem.

Zeitschrift für das Realschulwesen, herausgegeben von Em. Czuber, Ad. Bechtel un Mor. Glöser. — XXXV. Jahrg., 1910; Alfr. Hölder, Wien.

Nos 1 à 6. — K. Emmerling : Zur Lehre des Feuerbach'schen Kreises. — P.-R. Fischer : Die Auflösung eines Tangentenviereckes aus den vier Win-

kelsymmetralen. — R. Gidaly : Konstruktion der Zylinder in besonderen Flächenbündeln zweiter Ordnung. — Anton Neumann : Ueber die Wurzeln der Gleichung $\frac{(x-a)(x-b)}{x-a} = 0$. — K. Carda : Ueber eine Beziehung zwischen Wahrscheinlichkeitsrechnung und Analysis. — J. Pollak : Studie über rationale Auflösungen einiger quadratischer Gleichungen. — R. Hein : Die drei Achsen eines allgemeinen Kegelschnittes. — J. Pollak : Studie über rationale Auflösungen einiger quadratischer Gleichungen. Schluss. — Supplément au N° 5 — Berichte über den mathematischen Unterricht in Œsterreich. Heft 1.

Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben von R. Mehmke u. C. Runge. — 58. Band. — B.-G. Teubner, Leipzig.

Fasc. 1 et 2. — Paul Hertz : Zur Theorie des Saitengalvanometers. — C. Herbst : Die ästhetische Kreisbogenkurve. — H. Blasius : Funktionentheoretische Methoden in der Hydrodynamik. — H. v. Sanden : Photogrammetrie von Küstenaufnahmen. — M. Milankovitch : Zur Statik der massiven Widerlager. — Herbert Burmester : Untersuchung der wahren Hellegleichen auf der Kugel nach dem Lommel-Seeligerschen Gesetz. — Theodor Pöschl : Beitrag zur graphischen Dynamik des starren ebenen Systems. — Leopold Feigl : Die Ermittlung der Bewegungsverhältnisse von Kurbelgetrieben in einfacher zeichnerischer Behandlungsweise. — F. Klein : Zu Painlevés Kritik der Coulombschen Reibungsgesetze. — R. v. Mises : Zur Kritik der Reibungsgesetze. — Georg Hamel : Bemerkungen zu den vorstehenden Aufsätzen der Herren F. Klein und R. v. Mises. — L. Prandtl : Bemerkungen zu den Aufsätzen der Herren F. Klein, R. v. Mises und G. Hamel. — F. Ludwig : Neue Literatur über das Grenzgebiet der Biometrie. V. u. VI.

2. Livres nouveaux :

(Anonyme). — **Ist Mathematik Hexerei?** Von einem preussischen Schulmeister. — 1 broch. in-8°, IV et 68 p.; 1 Mk. 20; Herder, Fribourg en Br.

E. Barbette. — **Les sommes de p^{mes} puissances distinctes égales à une p^{me} puissance.** — 1 vol gr. in-4° de 154 p. avec une table des 5000 premiers nombres triangulaires; 12 fr. 50; E. Gnusé, Liège.

K. Boehm. — **Elliptische Funktionen.** *2ter Teil* : Theorie der ellipt. Integrale. Umkehrproblem. — 1 vol. de 180 p. *(Collection Schubert)*, 5 M., G. J. Goeschen, Leipzig.

C. Burali-Forti et R. Marcolongo. — **Eléments de Calcul Vectoriel** avec de nombreuses applications à la Géométrie, à la Mécanique et à la Physique mathématique, traduit de l'italien par S. Lattès. — 1 vol. in-8°, 229 p.; 8 fr.; A. Hermann & Fils, Paris.

O. D. Chwolson. — **Traité de Physique.** Tome III, 2me fascicule : Thermodynamique générale. Fusion. Vaporisation. — Edition française, Traduction de E. Duvaux. — 1 vol. in-8°, 744 p., 11 fr.; A. Hermann & Fils, Paris.

G. Combebiac. — **Les actions à distance.** — 1 vol. in-8°, 90 p. *(Collection Scientia)*, 2 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

L. Defossez. — **Les Cartes géographiques** et leurs projections usuelles. — 1 vol. in-16, 118 p. et 2 planches, 2 fr. 75; Gauthier-Villars, Paris.

P. Dziwinski. — **Arithmétique et Algèbre** (en polonais); manuel destiné à l'enseignement secondaire supérieur. — 1 vol. in-8°, 480 p., 4 K. 50 h.; Lemberg.

W. Gallatly. — **The Modern Geometry of the triangle.** — 1 vol. in-8°, 70 p., 2 s. 6 d.; F. Hodgson, Londres.

R. Geigel. — **Licht u. Farbe.** — 1 vol., 220 p. (*Bücher der Naturwissenschaft* herausgegeben von Sigm. Günther); br., 60 pf.: relié, 1 M.; Ph. Reclam jun., Leipzig.

C. S. Jackson et W. M. Roberts: **A first Dynamics.** — 1 vol. in-16 cart., 412 p.; (*Collection Dent.* dirigée par W. J. Greenstreet), J. M. Dent & C°, Londres.

C. A. Laisant. — **L'Enseignement du Calcul.** Conseils aux instituteurs. — 1 vol. in-16, 55 p., 0 fr. 60: Hachette & Cie, Paris.

Ern. Lebon. — **Emile Picard.** Biographie, bibliographie analytique des écrits. — 1 vol. gr. in-8°, VIII-80 p. (Collection des *Savants du jour*), 7 fr; Gauthier-Villars, Paris.

M. d'Ocagne. — **Instruction sur l'usage de la règle à Calcul.** — 1 fasc. in-8° de 8 p.; Gauthier-Villars, Paris.

V. Mrotchek. — **Pédagogie des mathématiques.** — 1 vol. in-8° de 378 p. (en russe).

E. Pascal. — **Repertorium der höheren Mathematik.** 2te völlig umgearbeitete Auflage der deutschen Ausgabe, unter Mitwirkung zahlreicher Mathematiker herausgegeben von P. Epstein u. H. E. Timerding. — I. *Analysis*, erste Hälfte: Algebra, Diff.- u. Integralrechnung. — 1 vol., 527 p.; 10 M. — II. *Geometrie*, erste Hälfte: Grundlagen u. ebene Geometrie. — 1 vol., 534 p.; 10 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

J. R. Pastor. — **Correspondencia de Figuras elementales.** — 1 fasc. in-8°, 96 p.; (Thèse); G. Hernandez, Madrid.

R. Suppantschitsch. — **Lehrbuch der Arithmetik** für die IV. u. V. Klasse der Gymnasien u. Realgymnasien (*Mathem. Unterrichtswerk*). — 1 vol. in-8°, cart., 4 M. 20; Tempsky, Wien u. Freytag, Leipzig.

J. Tannery. — **Introduction de la théorie des Fonctions d'une variable.** Tome II. Intégrales définies, développements en série, langage géométrique. fonctions de variables imaginaires. Avec une Note de M. Hadamard. — 1 vol. in-8°, 484 p.; 15 fr.; A. Hermann & Fils, Paris.

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Edition française dirigée par J. Molk. — Tome I, volume 3, fasc. 3: Théorie arithmétique des formes par Vahlen et Cahen. Propositions transcendantes de la théorie des nombres, par P. Bachmann, Hadamard et Maillet. — Teubner, Leipzig et Gauthier-Villars, Paris.

EXPOSITION ÉLÉMENTAIRE DE LA LOI DE RÉCIPROCITÉ DANS LA THÉORIE DES NOMBRES

1. Soit à déterminer le reste de la division de a^m par le nombre premier p, m étant égal à $\frac{p-1}{2}$. Pour les cas de $a = 1, 2, 3, \ldots p-1, p-2, p-3, \ldots$ on peut y arriver directement[1]; la théorie qui va être exposée permet d'y arriver généralement et de la manière la plus simple.

2. *Si* r, r′, r″, ... *désignent les restes de la division par* b *des nombres* a, a′, a″, ... *les deux produits* rr′r″ ... *et* aa′a″ ... *divisés par* b *donnent le même reste.*

3. *On a :*

$$(1) \qquad (a+c)^k \equiv a^k \pmod{c}$$

car $(a+c)^k - a^k$ est divisible par $(a+c) - a = c$.

De même

$$(2) \qquad (c-a)^k \equiv \pm a^k \pmod{c}$$

selon que k est pair ou impair.

4. b *désignant un nombre impair premier avec* a, *et* $E\omega$ *désignant la partie entière du nombre non entier* ω; *posons*

$$f(a, b) = E\frac{a}{b} + E\frac{2a}{b} + E\frac{3a}{b} + \ldots + E\frac{\beta a}{b}, \quad \left(\beta = \frac{b-1}{2}\right)$$

on aura :

$$(3) \qquad f(1, b) = 0$$

$$(4) \qquad f(a+b, b) = \left(1 + E\frac{a}{b}\right) + \left(2 + E\frac{2a}{b}\right) + \ldots + \left(\beta + E\frac{\beta a}{b}\right)$$

$$= \frac{b^2-1}{8} + f(a, b). \qquad \text{(Tchébichef)}$$

[1] Voir *Ens. math.*, 1907, p. 28. On a encore un cas de ce genre, quand p est de la forme $a^k \pm 1$, comme 3, 5, 17, 31, 37, 101, 127, 197, 257, ... ce cas est du reste aisé à traiter.

5. *Soit* a < b ; *les* $E\frac{b}{a}$ *premiers termes de* f(a, b) *sont tous nuls; les suivants, jusqu'au* $\left(E\frac{2b}{a}\right)^{\text{ème}}$, *sont tous égaux à* 1 ; *les suivants, jusqu'au* $\left(E\frac{3b}{a}\right)^{\text{ème}}$, *tous égaux à* 2 ; *etc.* (Gauss.)
En effet, on a :

$$0 < \frac{kb}{a} - \mathrm{E}\frac{kb}{a} < 1 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{a}{b}\mathrm{E}\frac{kb}{a} < k < \frac{a}{b}\left(1 + \mathrm{E}\frac{kb}{a}\right);$$

donc les nombres 1, 2, 3, ... se trouvent respectivement entre les $\left(\mathrm{E}\frac{b}{a}\right)^{\text{ème}}$, $\left(\mathrm{E}\frac{2b}{a}\right)^{\text{ème}}$, $\left(\mathrm{E}\frac{3b}{a}\right)^{\text{ème}}$, ... termes de la série $\frac{a}{b}, \frac{2a}{b}, \frac{3a}{b}$, ... et ceux qui les suivent immédiatement.

Les $\left(\mathrm{E}\frac{b}{a}\right)$ premiers multiples de $\frac{a}{b}$ sont ainsi < 1, et leur partie entière est 0. Les $\left(\mathrm{E}\frac{2b}{a} - \mathrm{E}\frac{b}{a}\right)$ suivants ont des valeurs comprises entre 1 et 2; leur partie entière est donc 1. Les $\left(\mathrm{E}\frac{3b}{a} - \mathrm{E}\frac{2b}{a}\right)$ suivants ont une valeur comprise entre 2 et 3; leur partie entière est donc 2. Et ainsi de suite.

6. *On a, en posant* $\alpha = \frac{a-1}{2}$, $\beta = \frac{b-1}{2}$,

$$f(a\,,\,b) + f(b\,,\,a) = \alpha\beta\,. \tag{5}$$ (Gauss)

D'après 5, $f(a\,,\,b)$ a pour valeur

$$(\alpha)\quad \begin{cases} 0\left(\mathrm{E}\frac{b}{a}\right) + 1\left(\mathrm{E}\frac{2b}{a} - \mathrm{E}\frac{b}{a}\right) + 2\left(\mathrm{E}\frac{3b}{a} - \mathrm{E}\frac{2b}{a}\right) + 3\left(\mathrm{E}\frac{4b}{a} - \mathrm{E}\frac{3b}{a}\right) + \dots \\ \qquad + \frac{a-3}{2}\left(\mathrm{E}\frac{a-1}{2}\frac{b}{a} - \mathrm{E}\frac{a-3}{2}\frac{b}{a}\right) + \alpha\left(\beta - \mathrm{E}\frac{\alpha b}{a}\right). \end{cases}$$

Le dernier groupe, au lieu d'aller du $\left(\mathrm{E}\frac{\alpha b}{a}\right)^{\text{ème}}$ terme de $f(a\,,\,b)$ au $\left(\mathrm{E}\frac{a+1}{2}\frac{b}{a}\right)^{\text{ème}}$, s'arrête au $\beta^{\text{ème}}$, d'après l'expression même de $f(a\,,\,b)$: or ce dernier terme fait partie du groupe en question, car

$$\mathrm{E}\frac{a-1}{2}\frac{b}{a} < \frac{b-1}{2} \leq \mathrm{E}\frac{a+1}{2}\frac{b}{a}\,,$$

et, en effet,

$$\mathrm{E}\frac{a-1}{2}\frac{b}{a} < \frac{a-1}{2}\frac{b}{a} < \frac{b-1}{2} < \frac{b+1}{2} + \mathrm{E}\frac{b-a}{2a} = \mathrm{E}\frac{a+1}{2}\frac{b}{a}$$

(α) se réduit donc bien à (5).

7. Théorème. p *désignant un nombre premier égal à* 2m + 1, *et* a, *un nombre non divisible par* p, *on aura :*

(6) $$a^m \equiv (-1)^{f(a,\,p)}\ [1] \qquad \text{(Gauss)}$$

Démonstration de Tchébichef. Posons

$$4r_n = p + \left(4n - p - 2p\mathrm{E}\frac{2n}{p}\right)\left(-1\right)^{\mathrm{E}\frac{2n}{p}}.$$

Selon que $\mathrm{E}\frac{2n}{p}$ est pair ou impair, r_n prend l'une ou l'autre des valeurs

$$n - \frac{p}{2}\mathrm{E}\frac{2n}{p}\ , \quad -n + \frac{p}{2}\left(1 + \mathrm{E}\frac{2n}{p}\right).$$

toutes deux entières et comprises entre 0 et $\frac{p}{2}$ [2]. De plus, on peut écrire

$$r_n \equiv n(-1)^{\mathrm{E}\frac{2n}{p}}.$$

On tire de là

(7) $$r_a r_{2a} r_{3a} \cdots r_{ma} \equiv a^m\, m\,!\,(-1)^{f(2a,\,p)}.$$

On ne peut supposer $r_{ka} \equiv r_{la}$, car il s'ensuivrait $a(k \pm l) \equiv 0$, ce qui est impossible, puisque k et l sont $< \frac{p}{2}$ et que a est premier avec p. Par conséquent, les facteurs du premier membre de (7), qui sont d'ailleurs compris entre 0 et $\frac{p}{2}$, ne

---

[1] Pour abréger, on sous-entend l'indication (mod p), quand le module est le nombre premier indéterminé p.

[2] En effet, on a

$$0 < \frac{2n}{p} - \mathrm{E}\frac{2n}{p} < 1\ , \qquad \text{d'où} \qquad 0 < n - \frac{p}{2}\mathrm{E}\frac{2n}{p} < \frac{p}{2}\ .$$

et

$$0 < 1 - \frac{2n}{p} + \mathrm{E}\frac{2n}{p} < 1\ , \qquad \text{d'où} \qquad 0 < \frac{p}{2}\left(1 + \mathrm{E}\frac{2n}{p}\right) - n < \frac{p}{2}\ .$$

sont autres que les nombres 1, 2, 3, ... m, dans un certain ordre, et (7) peut se simplifier ainsi :

$$(8) \qquad 1 \equiv a^m(-1)^{f(2a,\, p)} \quad \text{ou} \quad a^m \equiv (-1)^{f(2a,\, p)} ,$$

ou encore, d'après (1), (8) et (4),

$$(9) \quad a^m \equiv 2^m\left(\frac{a+p}{2}\right)^m \equiv 2^m(-1)^{f(a+p,\, p)} = 2^m(-1)^{\frac{p^2-1}{8}+f(a,\, p)} .$$

Pour $a = 1$, on a, à cause de (3)

$$(10) \qquad 1 \equiv 2^m(-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \quad \text{d'où} \quad 2^m \equiv (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} ,$$

et de là, la relation (6).

A titre d'application, soit à trouver le reste de la division de 5^8 par 17 ; on a

$$E\frac{5}{17} + E\frac{10}{17} + \dots + E\frac{40}{17} = 7 , \quad \text{nombre impair;}$$

on a donc $5^8 \equiv -1 \pmod{17}$.

Cor. I. On a donc toujours cette remarquable relation

$$(11) \qquad a^m \equiv \pm 1 .$$

Désignons par le *symbole de Legendre*, $\left(\frac{a}{p}\right)$, qui s'énonce *caractère quadratique* de a relativement à p, le reste de la division de a^m par p ; (11) s'écrira ainsi

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \pm 1 ,$$

selon que le nombre $f(a, p)$ est pair ou impair. Dans le premier cas, a est un *résidu* de p, et dans le second, c'en est un *non-résidu*.

II. Théorème de Fermat. De (11) on tire, en élevant au

carré, la relation suivante

$$(12) \qquad a^{p-1} \equiv 1\ .\ ^{1}$$

III. La formule (10) montre que $\left(\frac{2}{p}\right)$ *a pour valeur* 1 *quand* p *est de l'une des formes* 8 ± 1, *et* -1, *quand il est de l'une des formes* 8 ± 3.

IV. D'après (1), si $a \equiv b$, on a :

$$(13) \qquad \left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)\ .$$

V. D'après (11), si $\left(\frac{ab}{p}\right) = 1$, on a $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$.

VI. D'après 2, on a :

$$(14) \qquad \left(\frac{abc\ \ldots}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)\left(\frac{c}{p}\right)\ldots$$

---

[1] Les deux démonstrations suivantes figurent-elles parmi celles assez nombreuses qu'on a données de ce célèbre théorème. A vrai dire, elles ne sont que des variantes de démonstrations connues ?

1° a et b désignant deux entiers $< p$, formons le cycle de congruences $ab \equiv c$, $ac \equiv d$, $ad \equiv e$. ... $ak \equiv l$, $al \equiv b$, qui se trouve en contenir un nombre $n \leq p-1$. Soit b' un nombre non compris dans la suite $b, c, d, \ldots k, l$; on aura ces n' congruences $ab' \equiv c'$, $ac' \equiv d'$, ... $af' \equiv g'$, $ag' \equiv b'$, et les n' nombres $b', c', \ldots g'$ seront différents des n premiers, autrement ils reproduiraient le premier cycle.

Soit b'' un nombre non compris dans les $n + n'$ premiers, on aura ces n'' nouvelles congruences $ab'' \equiv c''$, ... $ad'' \equiv e''$, $ae'' \equiv b''$.

Continuant ainsi, on épuisera toute la série des $p-1$ premiers entiers; et multipliant ces congruences, on aura

$$a^{n+n'+\cdots} \equiv a^{p-1} \equiv 1\ .$$

2° Aucun des p produits a^{p-1}, $a^{p-2}b$, $a^{p-3}b^2$, ... a^2b^{p-3}, ab^{p-2}, b^{p-1} n'est $\equiv 0$; il y en a donc au moins deux congrus entre eux. Soit

$$a^{k-1}b^{p-k} \equiv a^{k-1+h}b^{p-k-h}, \qquad \text{d'où} \qquad a^h \equiv b^h\ ;$$

on voit qu'on peut toujours écrire

$$a^x \equiv b^x\ , \quad b^y \equiv 1\ , \qquad \text{et de là} \qquad az \equiv b \qquad (x, y \ \text{ et } \ z < p)$$

en posant $a^{x-1}b^{y+1-x} \equiv z$. Il est donc permis de poser

$$az_1 \equiv 1\ , \quad az_2 \equiv 2\ , \quad az_3 \equiv 3\ , \ldots az_{p-1} \equiv p-1\ .$$

les nombres z_1, z_2, ... étant tous différents, ce qui donne, en multipliant,

$$a^{p-1}(p-1)\,! \equiv (p-1)\,!$$

VII. Puisque $\left(\frac{a}{p}\right) = \pm 1$, on peut écrire :

$$\left(\frac{a^2}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{a}{p}\right) = 1 .$$

Donc

$$(15) \qquad \left(\frac{a^2 bc \ldots}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)\left(\frac{c}{p}\right) \ldots$$

VIII. On a :

$$(16) \qquad (p-1)^m \equiv \pm 1 , \quad \text{ou} \quad \left(\frac{p-1}{p}\right) = \pm 1 ,$$

selon que m est pair ou impair (2), c'est-à-dire selon que $p = 4 \pm 1$.

IX. On a :

$$(17) \qquad \left(\frac{p-a}{p}\right) = \left(\frac{p-1}{p}\right)\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)(-1)^m .$$

Ainsi

$$(18) \quad \left(\frac{p-2}{p}\right) = \left(\frac{p-1}{p}\right)\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^m (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = (-1)^{\frac{(p-1)(p-3)}{8}} .$$

8. Théorème. *Désignant par* p *et* q *deux nombres premiers impairs, et par* m *et* n, *les entiers* $\frac{p-1}{2}$ *et* $\frac{q-1}{2}$, *on a :*

$$(19) \qquad \left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{mn} \qquad \text{(Legendre)}$$

C'est la conséquence de (5) et de (6), puisqu'on a :

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{f(q,\,p)} \quad \text{et} \quad \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{f(p,\,q)} . \qquad \text{(Gauss)}$$

Ainsi *le caractère de* p *par rapport à* q *est le même que celui de* p *par rapport à* q, *à moins que* p *et* q *ne soient tous deux de la forme* 4 — 1.

La formule (19) peut aussi s'écrire

$$(20) \qquad \left(\frac{q}{p}\right) = \pm \left(\frac{p}{q}\right)(-1)^m \qquad (p = 4 \pm 1) .$$

Cor. I. On sait (voir *Ens. math.*, 1907, p. 444, 7 et 228, VI) que si $a^m \equiv 1$, p divise $x^2 - ay^2$. Donc *si* p *et* q *sont de la forme* 4 + 1 *et que* p *divise* $x^2 + qy^2$, q *divisera* $x^2 + py^2$. En effet, on a

$$\left(\frac{-q}{p}\right) = 1 , \quad \text{d'où} \quad \left(\frac{-p}{q}\right) = 1 . \qquad \text{(Legendre)}$$

II. *Si* p *est de la forme* 4 — 1 *et* q, *de la forme* 4 + 1 ; *si en outre* p *ne divise pas* $x^2 + qy^2$, q *divisera* $x^2 + py^2$. En effet, on a :

$$\left(\frac{-p}{q}\right) = -1 , \quad \text{d'où} \quad \left(\frac{-q}{p}\right) = 1 . \qquad \text{(Legendre)}$$

III. 1° Soit $q = 3$; on aura, suivant que $p = 4 \pm 1$, ce qui donne $(-1)^m = \pm 1$,

$$\left(\frac{3}{p}\right) = \pm \left(\frac{p}{3}\right) .$$

En outre, selon que $p = 3 \pm 1$, il viendra

$$\left(\frac{p}{3}\right) = (-1)^m \left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^m \left(\frac{\pm 1}{3}\right) = \pm 1 .$$

On a ainsi à examiner les quatre combinaisons 12 ± 1 et 12 ± 5. On trouve immédiatement

$$p = 12 + 1 , \left(\frac{3}{p}\right) = \left(\frac{p}{3}\right) = 1 , \qquad p = 12 - 1 , \left(\frac{3}{p}\right) = -\left(\frac{p}{3}\right) = 1$$

$$p = 12 + 5 , \left(\frac{3}{p}\right) = \left(\frac{p}{3}\right) = -1 , \quad p = 12 - 5 , \left(\frac{3}{p}\right) = -\left(\frac{p}{3}\right) = -1 .$$

Ainsi $p = 12 \pm 1$ est diviseur, et $p = 12 \pm 5$ non diviseur de $x^2 - 3y^2$. On peut ajouter que $p = 12 + 1$ et $12 - 5$ sont diviseurs et $p = 12 + 5$ et $12 - 1$, non diviseurs de $x^2 + 3y^2$.

2° Soit $q = 5$; on aura $\left(\frac{5}{p}\right) = \left(\frac{p}{5}\right) = \pm 1$, selon que p sera de l'une des formes 20 ± 1 ou 20 ± 9 ; ou de l'une des suivantes 20 ± 3, 20 ± 7. De là ce théorème : les nombres premiers 20 ± 1 ou 20 ± 9 sont diviseurs, et les nombres premiers 20 ± 3 ou 20 ± 7, non diviseurs de $x^2 - 5y^2$; les

nombres premiers $20 + 1, 3, 7, 9$ sont diviseurs et les nombres $20 - 9, -7, -3, -1$, non diviseurs de $x^2 + 5y^2$.

3° Soit encore le nombre composé 15, on aura $\left(\frac{15}{p}\right) = \left(\frac{5}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right)$. Combinant les deux formes 12 ± 1 et 20 ± 1, on trouve les formes $60 + 1, 7, 11, 17, 43, 49, 53, 59$, pour les diviseurs de $x^2 - 15y^2$.

4° Soit enfin $q = 20$. On a : $\left(\frac{20}{p}\right) = \left(\frac{5}{p}\right)\left(\frac{2^2}{p}\right)$; on est ramené au cas de 5, et en effet les diviseurs de $x^2 \pm 20y^2$ doivent être cherchés dans ceux de $x^2 \pm 5(2y)^2$.

IV. 1° p *étant* $4 + 1$, *tout diviseur impair* a *de* $u^2 + pv^2$ *ou de* $x^2 + p$ *fournit la relation* $\left(\frac{a}{p}\right) = \pm 1$, *selon que* $a = 4 \pm 1$. En effet a est le produit d'une certaine quantité de facteurs premiers α de forme $4 + 1$ par un nombre pair ou impair de facteurs β de forme $4 - 1$. On a donc

$$\left(\frac{-p}{\alpha}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{-p}{\beta}\right) = 1 , \qquad \text{d'où} \qquad \left(\frac{p}{\alpha}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{p}{\beta}\right) = -1$$

et de là

$$\left(\frac{\alpha}{p}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\beta}{p}\right) = -1 , \qquad \text{d'où} \qquad \left(\frac{a}{p}\right) = \pm 1 . \qquad \text{(Legendre)}$$

Ainsi r étant un résidu et ρ un non résidu de p, on prendra comme diviseurs de $x^2 + p$, les nombres $4 + 1$ qui sont en même temps $\equiv r$, et les nombres $4 - 1$ qui sont en même temps $\equiv \rho$,

Soit $p = 13$; les résidus étant 1, 3, 4, 9, 10, 12, et les non résidus, 2, 5, 6, 7, 8, 11 ; on prendra d'une part 1, 9, 17, 25, 29, 49, et d'autre part 7, 11, 15, 17, 19, 31, 47, ainsi que les mêmes nombres augmentés de $4 . 13$, puisque si n est de la forme 4 ± 1, il en sera de même de $4 + n$. Par conséquent, les diviseurs de $u^2 + 13v^2$ sont de l'une des formes suivantes

$$52 + 1, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 25, 29, 31, 47, 49 .$$

2° p *étant un nombre premier* $4 - 1$, *tout diviseur impair*

de $u^2 + pv^2$ *donne* $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$. Démonstration et usages analogues (Legendre).

V. *Tout nombre premier* q *compris dans les formes linéaires des diviseurs de* $x^2 + py^2$ *est nécessairement diviseur de cette forme*, p *étant* $4 + 1$. En effet on a :

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \pm 1 \,, \quad \text{selon que} \quad q = 4 \pm 1$$

d'où

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \pm 1 \,. \qquad \text{(Legendre)}$$

Si $p = 4 - 1$, on a une conclusion analogue, mais il y a deux cas à examiner[1].

VI. L'exemple suivant, de Legendre, fera comprendre la marche à suivre pour déterminer le caractère d'un nombre quelconque, si grand soit-il.

On a successivement :

$$\left(\frac{601}{1013}\right) = \left(\frac{1013}{601}\right) = \left(\frac{103}{601}\right) = \left(\frac{601}{103}\right) = \left(\frac{86}{103}\right) = \left(\frac{2}{103}\right)\left(\frac{43}{103}\right) = \left(\frac{43}{103}\right)$$
$$= -\left(\frac{103}{43}\right) = -\left(\frac{17}{43}\right) = -\left(\frac{43}{17}\right) = -\left(\frac{9}{17}\right) = -\left(\frac{1}{17}\right) = -1 \,.$$

Ainsi 1013 ne divise aucun nombre de la forme $x^2 + 601y^2$.

VII. *Le nombre* 3 *est non résidu de* $p = 2^{2^n} + 1$. En effet, $p + 1 = 2(2^{2^n - 1} + 1)$ est multiple de 3, d'où $p = 3 - 1$ et par suite

$$\left(\frac{3}{p}\right) = \left(\frac{p}{3}\right) = \left(\frac{-1}{3}\right) = -1 \,. \qquad \text{(Tchébichef)}$$

VIII. $p = 2^{4n+1} - 1 = 2(4^n - 1) + 1$ est de la forme $3 + 1$; par suite

$$\left(\frac{3}{p}\right) = -\left(\frac{p}{3}\right) = -\left(\frac{1}{3}\right) = -1 \,;$$

donc 3 *est non résidu* de p (Ed. Lucas).

[1] Voir Lejeune-Dirichlet, *Werke*, I, p. 202 et 226, plusieurs extensions de ces théorèmes.

IX. 3 *est non résidu de* $p = 2^n + 1$ (Ed. Lucas). En effet on a :

$$\left(\frac{3}{p}\right) = \left(\frac{p}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = 1 .$$

(Voir *C. R.*, t. 87. un théorème analogue du P. Pépin.)

9. *Soit* $p = a^2 + b^2$ *un nombre premier* $4\mu + 1 = 2m + 1$, a *impair et* b *pair;* a *est résidu de* p, *et chacun des deux nombres* $a \pm b$ *l'est ou ne l'est pas selon qu'il est* 8 ± 1 *ou* 8 ± 3.

1° Soit α un facteur premier de a ; p est résidu de α ; on a donc :

$$\left(\frac{p}{\alpha}\right) = 1 , \quad \text{d'où} \quad \left(\frac{\alpha}{p}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\Pi\alpha}{p}\right) = 1 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{a}{p}\right) = 1 .$$

2° On a : $2p = (a + b)^2 + (a - b)^2$. Soit g un facteur premier du nombre impair $a \pm b$. On peut écrire :

$$\left(\frac{2p}{g}\right) = 1 , \quad \text{donc} \quad \left(\frac{p}{g}\right) = \left(\frac{2}{g}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{g}{p}\right) = \left(\frac{p}{g}\right) = \left(\frac{2}{g}\right) = \pm 1$$

selon que g est 8 ± 1 ou 8 ± 3. De là aisément

$$\left(\frac{a \pm b}{p}\right) = (-1)^{\frac{(a \pm b)^2 - 1}{8}} .$$

Cor. On a : $(a + b)^2 \equiv 2ab$, d'où, en élevant à la puissance μ et posant $f \equiv -1$[1], $b \equiv af$,

$$2^{\mu} f^{\mu} \equiv (a + b)^m \equiv (f^2)^{\frac{(a+b)^2 - 1}{8}} = f^{\mu + \frac{ab}{2}}$$

et par suite

$$2^{\mu} \equiv f^{\frac{ab}{2}} ,$$

comme Gauss l'avait autrement démontré. Ainsi 2 est résidu biquadratique si $b = 8b'$: alors $p = a^2 + 64b'^2$, car dans ce cas, $\frac{ab}{2} = 4ab'$ et $f^4 \equiv 1$ (Lejeune-Dirichlet). Reuschle a donné de même le *caractère octique* de 2 ; et le lieut.-col.

[1] Ce qui est toujours possible si $p = 4 + 1$. (Voir *Ens. math.*, 1907, p. 29.)

Cunningham, son *caractère sextodécimique* (voir le t. XXVII des *Proceed. of the London math. Soc.*, p. 85).

10. *Soit* $p = a^2 + 2b^2$, *un nombre premier* $8 + 1$, b *est résidu de* p. Soient 2, β, β', ... les facteurs premiers de b. On a :

$$\left(\frac{p}{\beta}\right) = 1\,, \quad \text{d'où} \quad \left(\frac{\beta}{p}\right) = 1\,, \quad \text{et comme} \quad \left(\frac{2}{p}\right) = 1\,, \quad \left(\frac{b}{p}\right) = 1\,.$$

Cor. Soient g les facteurs premiers 8 ± 1 du nombre impair a, et h ses facteurs premiers 8 ± 3. De la relation $2p = 2a^2 + (2b)^2$, on tire

$$\left(\frac{2p}{g}\right) = \left(\frac{2p}{h}\right) = 1\;;$$

et, comme $\left(\frac{2}{g}\right) = 1$, $\left(\frac{2}{h}\right) = -1$, il vient

$$\left(\frac{p}{g}\right) = 1, \quad \left(\frac{p}{h}\right) = -1\,, \quad \left(\frac{g}{p}\right) = 1\,, \quad \left(\frac{h}{p}\right) = -1\,.$$

Donc $\left(\frac{a}{p}\right) = \pm 1$, et par suite a *est ou n'est pas résidu selon que les facteurs* h *sont en nombre pair ou impair, c'est-à-dire selon que* $a = 8 \pm 1$ *ou* 8 ± 3.

Elevons à la puissance paire μ les deux membres de la congruence $a^2 \equiv 2b^2$ et remarquons que $b^m \equiv 1$, on trouve $2^{\mu} \equiv a^m$. Ainsi 2 *et* — 2 *sont ou ne sont pas résidus biquadratiques selon que* $a^m \equiv \pm 1$, *c'est-à-dire selon que* $a = 8 \pm 1$ *ou* 8 ± 3 (Gauss).

Lejeune-Dirichlet, l'auteur de cette démonstration, en donne plusieurs variantes et extensions, entre autres ce théorème : q *désignant un nombre premier* $4 - 1$, *et* p, *un nombre premier* $4 + 1$, *si* $p = a^2 + qb^2$, q *est résidu biquadratique ou ne l'est pas selon que* a *est résidu ou non résidu de* q.

11. Gauss, qui a introduit les imaginaires dans la théorie des nombres, leur a appliqué plusieurs des théorèmes connus relatifs aux nombres réels. On donnera seulement ici

l'extension de la loi de réciprocité, avec la démonstration de Lejeune-Dirichlet.

On dit qu'un nombre *complexe* $a + bi$ est premier quand il n'a d'autres diviseurs que lui-même et l'une des quatre *unités* ± 1, $\pm i$. De là les remarques suivantes dues à Gauss.

1° *Tout nombre premier réel* $p = 4 - 1$ *est premier complexe*, car si l'on avait $p = (a + bi)(c + di)$, on pourrait aussi écrire $p = (a - bi)(c - di)$, d'où on tirerait, en multipliant, $p^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$, ce qui est impossible, p ne pouvant diviser une somme de deux carrés.

2° *Le nombre réel* 2 *et les nombres premiers réels* $p = 4 + 1$ *sont composés au point de vue complexe*, car on a : $2 = (1 + i)(1 - i)$, et d'autre part, on peut écrire :

$$p = a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi) .$$

3° *Pour que* $a + bi$ *soit premier, il faut et il suffit que sa* norme $a^2 + b^2$ *le soit, au point de vue réel.* Supposons que $a + bi = (c + di)(e + fi)$; on aura de même $a - bi = (c - di)(e - fi)$, d'où

$$a^2 + b^2 = (c^2 + d^2)(e^2 + f^2) .$$

Réciproquement, si $a^2 + b^2$ est un nombre composé, il en est de même de $a + bi$. Soit $p = g^2 + h^2$ un des diviseurs premiers de $a^2 + b^2$, on aura :

$$a^2 \equiv - b^2 \quad \text{et} \quad g^2 \equiv - h^2 \ , \quad \text{d'où en multipliant,} \quad (ag + bh)(ag - bh) \equiv 0 .$$

Or

$$p(a^2 + b^2) = (ag \pm bh)^2 + (ah \mp bg)^2 .$$

De ces deux congruences, on conclut que l'un des deux nombres $ag \pm bh$ est de la forme kp ; et par suite, l'un des deux autres $ah \mp bg$, de la forme lp. De là, en éliminant a et b, la relation

$$a + bi = (k + li)(g + hi) .$$

12. 1° *Disons par extension que* $a + bi$ *est résidu ou non résidu de* $p = 4 - 1$ *selon qu'on peut ou qu'on ne peut écrire :* $(x + yi)^2 \equiv a + bi$; $a + bi$ *est résidu ou non en même temps*

que $a^2 + b^2$. Soit $(x + yi)^2 \equiv a + bi$; on aura de même $(x - yi)^2 \equiv a - bi$, et par suite,

$$(x^2 + y^2)^2 \equiv a^2 + b^2 .$$

D'un autre côté, on peut toujours écrire[1] : $g^2 + h^2 + 1 \equiv 0$; $g^2 + h^2$ est donc un non résidu puisque -1 est non résidu de $p = 4 - 1$; et il en est de même de $g + hi$, car autrement, d'après le premier cas, $g^2 + h^2$ serait résidu.

Si $a + bi$ est également un non résidu, le produit

$$(a + bi)(g + hi) = (ag - bh) + (ah + bg)i$$

est résidu, ainsi que

$$(ag - bh)^2 + (ah + bg)^2 = (a^2 + b^2)(h^2 + g^2) ;$$

par conséquent, $a^2 + b^2$ est non résidu.

Ainsi $1 + i$ et $1 - i$ sont résidus ou non résidus en même temps que 2, c'est-à-dire selon que $p = 8 - 1$ ou $8 + 3$.

2° *On peut toujours écrire* $x \equiv (a + bi)$ (mod $A + Bi$), *les nombres* A *et* B *étant premiers entre eux*; car cette relation revient à

$$x - a - bi = (y + zi)(A + Bi) .$$

Or on peut poser $By + Az = -b$; y et z étant ainsi déterminés, on aura, pour la valeur de x, l'entier $a + Ay - Bz$.

3° On démontrera, de la même manière que pour les nombres réels, que *le produit de deux résidus est un résidu, etc.*

4° Soit $p = A^2 + 4B^2$ un nombre premier $4 + 1$; on dira que $a + bi$ est ou n'est pas résidu de $A + 2Bi$ selon qu'on peut ou qu'on ne peut trouver deux nombres y et z tels que $(y + zi)^2 \equiv (a + bi)$ (mod $A + 2Bi$).

Posons d'après 2° $x \equiv y + zi$ (mod $A + 2Bi$). La question revient à découvrir les conditions de possibilité de la relation

$$(\alpha) \qquad x^2 - a - bi = (A + 2Bi)(t + ui)$$

[1] Voir *Ens. math.*, 1907, p. 31 et 454.

ou celle des suivantes

$$(\beta) \qquad x^2 = a + \mathrm{A}t - 2\mathrm{B}u \ , \qquad -b = \mathrm{A}u + 2\mathrm{B}t \ ,$$

d'où

$$(\gamma) \qquad \mathrm{A}x^2 - \mathrm{A}a - 2\mathrm{B}b = pt \ ,$$

ce qui montre que $\mathrm{A}a + 2\mathrm{B}b$ est résidu de p, car A l'est lui-même (9).

Réciproquement si cette condition a lieu, $a + bi$ est résidu de $\mathrm{A} + 2\mathrm{B}i$. En effet il y a un résidu $r \equiv x^2$ qui, multiplié par le résidu $\mathrm{A}a + 2\mathrm{B}b$, donne le résidu A ; de là la relation (γ) qu'on peut écrire

$$\mathrm{A}(a + \mathrm{A}t - x^2) + 2\mathrm{B}(2\mathrm{B}t + b) \equiv 0 \ ;$$

$2\mathrm{B}t + b$ est donc de la forme $-\mathrm{A}u$, ce qui donne (β) et de là (α).

Ainsi, p *désignant un nombre premier* $\mathrm{A}^2 + 4\mathrm{B}^2$ *de forme* $4 + 1$, $a + bi$ *est résidu ou non résidu de* $\mathrm{A} + 2\mathrm{B}i$ *selon que* $\mathrm{A}a + 2\mathrm{B}b$ *l'est ou ne l'est pas de* p. Autrement dit, on a :

$$(\delta) \qquad \left(\frac{a + bi}{\mathrm{A} + 2\mathrm{B}i}\right) = \left(\frac{\mathrm{A}a + 2\mathrm{B}b}{p}\right) . \qquad \text{(Lejeune-Dirichlet)}$$

Ainsi on a :

$$\left(\frac{1 + i}{\mathrm{A} + 2\mathrm{B}i}\right) = \left(\frac{\mathrm{A} + 2\mathrm{B}}{p}\right) ;$$

donc, à cause de 9, on peut dire que $1 + i$ *est résidu ou non résidu de* $\mathrm{A} + 2\mathrm{B}i$ *selon que* $\mathrm{A} + 2\mathrm{B}$ *est* 8 ± 1 *ou* 8 ± 3.

5° Soit q un nombre premier $4 - 1$ et $p = \mathrm{A}^2 + 4\mathrm{B}^2$ un nombre premier $4 + 1$; on a, d'après 1° et 4°,

$$\left(\frac{\mathrm{A} + 2\mathrm{B}i}{q}\right) = \left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) ,$$

$$\left(\frac{q}{\mathrm{A} + 2\mathrm{B}i}\right) = \left(\frac{q\mathrm{A}}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{\mathrm{A}}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$$

d'où

$$\left(\frac{\mathrm{A} + 2\mathrm{B}i}{q}\right) = \left(\frac{q}{\mathrm{A} + 2\mathrm{B}i}\right) .$$

6° Soient $p = A^2 + 4B^2$, $p = A'^2 + 4B'^2$, deux nombres premiers $4 + 1$; on a :

$$\left(\frac{A + 2Bi}{A' + 2B'i}\right) = \left(\frac{AA' + 4BB'}{p'}\right), \quad \left(\frac{A' + 2B'i}{A + 2Bi}\right) = \left(\frac{AA' + 4BB'}{p}\right)$$

$$(AA' + 4BB')^2 + (2AB' - 2BA')^2 = pp' .$$

Si g est un des facteurs premiers du nombre impair $AA' + 4BB'$, on a, d'après ce qui précède :

$$\left(\frac{p}{g}\right) = \left(\frac{p'}{g}\right), \quad \text{d'où} \quad \left(\frac{g}{p}\right) = \left(\frac{g}{p'}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{AA' + 4BB'}{p}\right) = \left(\frac{AA' + 4BB'}{p'}\right),$$

d'où cette généralisation, due à Gauss,

$$\left(\frac{A + 2Bi}{A' + 2B'i}\right) = \left(\frac{A' + 2B'i}{A + 2Bi}\right).$$

13. Il ne paraît pas nécessaire de reproduire ici les renseignements historiques donnés précédemment (*E. M.*, 1909, pp. 347, 432, 434, 440, 446) sur la loi de réciprocité. Il suffira, pour la présente note, — qui n'a d'autre ambition que celle de fournir l'idée et la matière d'un chapitre à un traité élémentaire des nombres, — de la compléter par l'exposé de trois des plus simples démonstrations qu'on a données de ce si remarquable théorème : elles s'appuient toutes les trois sur ce lemme de Gauss, démontré, *E. M.*, 1907, p. 37 :

p *désignant un nombre premier, et* a *un entier inférieur à* p, *appelons* φ(a, p) *le nombre des restes supérieurs à* $\frac{p}{2}$ *obtenus en divisant par* p *les* m *premiers multiples de* a : *on a :*

$$a^m \equiv (-1)^{\varphi(a,p)} \quad \text{ou bien} \quad \left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\varphi(a,p)}.$$

1° *Démonstration d'Eisenstein.* Soient a et b deux entiers impairs premiers entre eux ; construisons un parallélogramme sur ces deux nombres, menons la diagonale et traçons le réseau correspondant aux divisions des côtés. Le nombre des intersections de la $k^{\text{ème}}$ ordonnée entre la base et la diagonale est $E\frac{ka}{b}$. Il ne se trouve aucune intersection

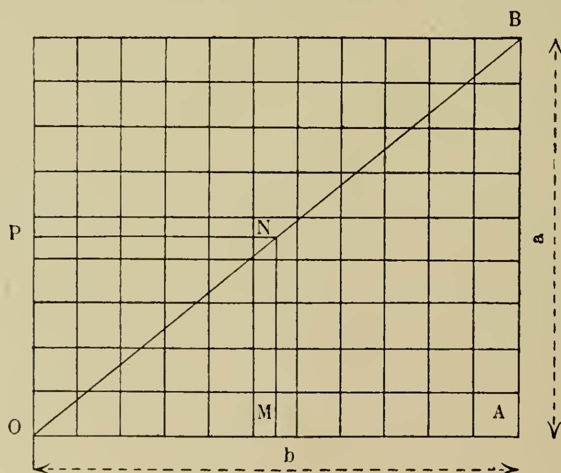
sur la diagonale; on a donc:

$$E\frac{ka}{b} + E\frac{(b-k)a}{b} = a - 1 \text{ , nombre pair,}$$

et par suite

$$\begin{array}{lll}
E\frac{a}{b} & \text{est de même parité que} & E\frac{(b-1)a}{b} \\
E\frac{2a}{b} & \dots\dots\dots\dots & E\frac{2a}{b} \\
E\frac{3a}{b} & \dots\dots\dots\dots & E\frac{(b-2)a}{b} \\
E\frac{4a}{b} & \dots\dots\dots\dots & E\frac{4a}{b} \\
\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots \\
E\frac{(b-1)a}{2b} & \dots\dots\dots\dots & E\frac{(b\pm 1)a}{2b} \quad (b = 4 \mp 1)
\end{array}$$

d'où on déduit, en se rappelant la notation du n° 4, que $f(a, b)$ est de même parité que $f(2a, b)$. Or si on construit



le parallélogramme $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, on voit que $f(a, b)$ et $f(b, a)$ représentent respectivement les nombres des intersections comprises dans les triangles ONM, ONP. On conclut de là que

$$f(a, b) + f(b, a) = \alpha\beta \text{ ,}$$

et que par suite $f(2a, b) + f(2b, a)$ est de même parité que $\alpha\beta$, ce qui, rapproché de (8), fournit la démonstration de (20).

2° *Démonstration de Voigt.* Divisons par b les β premiers multiples de a, et posons

$$ga < kb < (g + 1)a \,, \quad ha < (k + 1)b < (h + 1)a \;;$$

celles de ces divisions donnant le quotient k correspondent aux multiples $(g + 1)a$, $(g + 2)a$, ... $(h - 1)a$, ha; et parmi ces $h - g$ divisions, celles qui fournissent des restes plus grands que $\frac{b}{2}$ sont déterminés par la relation

$$(g + x)a - kb > \frac{b}{2} \,,$$

d'où

(α) $$h \geqq g + x > \frac{2k + 1}{2a} b \;;$$

elles sont donc au nombre de

$$\mathrm{E}\frac{k + 1}{a} b - \mathrm{E}\frac{2k + 1}{2a} b = \mathrm{E}\frac{k + 1}{a} b - \beta - \mathrm{E}\left(\frac{1}{2} - \frac{a - 2k - 1}{2a} b\right) .$$

Mais le plus petit multiple de a qui, divisé par b, donne un quotient $k = \alpha$, et un reste $> \frac{b}{2}$, est supérieur, d'après (α), à

(β) $$\frac{2k + 1}{2} b = \frac{ab}{2} > \frac{b - 1}{2} a = \beta a \;;$$

et le plus grand multiple de a qui, divisé par b, donne un quotient $k = \alpha - 1$ avec un reste $> \frac{b}{2}$, est, également d'après (α), au plus égal à

$$ha = \left(\mathrm{E}\frac{k + 1}{a} b\right) a < \left(\frac{k + 1}{a} b\right) a = (k + 1) b = \frac{a - 1}{2} b < \frac{b - 1}{2} a = \beta a \,,$$

si on suppose $b > a$.

D'après le lemme fondamental (*E. M.*, 1907, p. 287), les restes sont tous différents, et par suite on aura le nombre $\varphi(a, b)$ des restes supérieurs à $\frac{b}{2}$ en faisant successivement $k = 0, 1, 2, 3, \ldots \alpha - 1$ dans (β) et additionnant.

Il vient ainsi, en groupant convenablement les résultats :

$$(\gamma)\left\{\begin{aligned}&\varphi(a,\,b)+\alpha\beta\\&=\left[\mathrm{E}\frac{b}{a}-\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}-\frac{b}{a}\right)\right]+\left[\mathrm{E}\frac{2b}{a}-\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}-\frac{2b}{a}\right)\right]\\&\qquad+\ldots+\left[\mathrm{E}\frac{a-1}{2a}b-\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}-\frac{a-1}{2a}b\right)\right]\\&\equiv\mathrm{E}\frac{b}{a}+\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}-\frac{b}{a}\right)+\mathrm{E}\frac{2b}{a}+\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}-\frac{2b}{a}\right)\\&\qquad+\ldots+\mathrm{E}\frac{a-1}{2a}b+\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}-\frac{a-1}{2a}b\right).\qquad(\mathrm{mod}\ 2)\end{aligned}\right.$$

Or la valeur de $\mathrm{E}\,\frac{c}{a}+\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}-\frac{c}{a}\right)$ est 0 ou -1 selon que le reste de la division de c par a est $\gtrless\frac{a}{2}$. En effet, soit $c=a\alpha+r$, on aura $\mathrm{E}\,\frac{c}{a}=\alpha$, d'où

$$\mathrm{E}\frac{c}{a}+\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}-\frac{c}{a}\right)=\mathrm{E}\left(\alpha+\frac{1}{2}-\alpha-\frac{r}{a}\right)=\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}-\frac{r}{a}\right),$$

de sorte que, selon que $r=\frac{a}{2}\pm\omega$, il vient

$$\mathrm{E}\frac{c}{a}+\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}-\frac{c}{a}\right)=\mathrm{E}(\mp\omega)\,.$$

Le dernier membre de (γ) représente donc, au signe près, le nombre $\varphi(b.\,a)$ des restes $>\frac{a}{2}$ provenant de la division par a des α premiers multiples de b ; d'où

$$(\delta)\qquad \varphi(a,\,b)+\varphi(b,\,a)\equiv\alpha\beta\,.\qquad(\mathrm{mod}\ 2)$$

3° *Démonstration de Kronecker.* Le reste de la division de ha par b est $>\frac{b}{2}$ si on peut trouver un entier k tel qu'on ait :

$$(\alpha)\qquad ha<bk<ha+\frac{b}{2},$$

d'où

$$(\beta)\left\{\begin{aligned}&(ha-bk)\left(ha-bk+\frac{b}{2}\right)<0\\&\text{ou}\quad(ha-bk)\left(ha+\frac{a+1-2k}{2}b-\frac{ab}{2}\right)<0\,.\end{aligned}\right.$$

Tout autre entier mis à la place de k changerait le sens de l'une des inégalités (α) et rendrait ainsi positif le premier membre de (β). D'autre part, comme $h \leq \beta$, on a :

$$bk < \frac{b-1}{2}a + \frac{b}{2} < \frac{ba}{2} + \frac{b}{2} \quad \text{d'où} \quad k < \frac{a+1}{2} \quad \text{et} \quad k \leq \frac{a-1}{2} = \alpha .$$

Par conséquent, selon que ha fournit un reste $\lesseqgtr \frac{b}{2}$, on a, à cause de (β), en y remplaçant successivement k par 1, 2, 3, ... α, et multipliant,

$$(\gamma) \quad \left\{ \begin{aligned} &(ha - b)(ha - 2b) \ldots (ha - \alpha b)\left(ha + \alpha b - \frac{ab}{2}\right) \\ &\quad \ldots \left(ha + 2b - \frac{ab}{2}\right)\left(ha + b - \frac{ab}{2}\right) \gtrless 0 . \end{aligned} \right.$$

De la sorte, en changeant dans (γ), h en 1, 2, 3, ... β, et multipliant, on pourra dire que le produit

$$(\delta) \quad \left\{ \begin{aligned} &(a - b) \ldots (a - \alpha b)\left(a + \alpha b - \frac{ab}{2}\right) \ldots \left(a + b - \frac{ab}{2}\right) \\ &\times (2a - b) \ldots (2a - \alpha b)\left(2a + \alpha b - \frac{ab}{2}\right) \ldots \left(2a + b - \frac{ab}{2}\right) \\ &\times \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\times (\beta a - b) \ldots (\beta a - \alpha b)\left(\beta a + \alpha b - \frac{ab}{2}\right) \ldots \left(\beta a + b - \frac{ab}{2}\right) \end{aligned} \right.$$

est $\gtrless 0$ selon que le nombre $\varphi(a, b)$ des restes $> \frac{b}{2}$ est pair ou impair.

Changeons a en b et b en a ; le nouveau produit sera $\gtrless 0$ selon que le nombre $\varphi(b, a)$ des restes $> \frac{a}{2}$, obtenus en divisant par a les α premiers multiples de b, sera pair ou impair. Or la substitution indiquée ne modifie pas les facteurs trinômes ; les $\alpha\beta$ facteurs binômes seuls changent simplement de signes : on a donc :

$$\varphi(a, b) = \varphi(b, a)(-1)^{\alpha\beta} .$$

A. Aubry (Dijon).

SUR L'ÉQUILIBRE, LA STATIQUE ET LA DYNAMIQUE

Les mots « équilibre », « statique », « dynamique », qui sont couramment employés en mécanique, n'ont pas toujours une signification bien définie ; nous croyons utile d'indiquer le sens qu'il convient, d'après nous, de leur attribuer.

De l'équilibre d'un point matériel [1]. — *Un point matériel est en équilibre sous l'action de certaines forces quand, le point étant au repos (ou supposé tel), ces forces ne lui impriment (ou ne lui imprimeraient) aucun mouvement.*

Dans le même cas, on dit encore que *les forces* visées *se font équilibre.*

Les forces dont il est question font partie du groupe des forces dites *données*, ou *directement appliquées*, ou *indépendantes des liaisons*, mais elles peuvent n'être qu'une partie de ces forces. Le point est d'ailleurs, en fait, en repos ou en mouvement relativement aux axes auxquels se rapportent les forces elles-mêmes et qui, pour les points appartenant à notre système solaire, sont presque toujours des axes invariablement liés aux étoiles ou à la terre.

Quand on emploie le mot « équilibre » d'une façon absolue, c'est-à-dire sans l'accompagner de la désignation des forces particulières sous l'action desquelles l'équilibre a lieu, c'est qu'on a en vue l'équilibre sous l'action de *toutes* les forces données, telles qu'elles interviennent à l'époque considérée.

---

[1] La définition est celle d'Appell : *Traité de mécanique rationnelle*, t. I, 3e édition, 1909, n° 70, p. 93. Le membre de phrase « le point étant au repos » n'exprimant pas, par lui-même, d'une façon suffisamment précise, qu'un point en équilibre peut être en mouvement tout aussi bien qu'au repos, il a paru bon d'ajouter ici « ou supposé tel ». Comme il est facile de le voir et comme nous le montrons dans cette note (cf. rem. 3 ci-dessous), cette définition est équivalente à celle de Gilbert : *Cours de mécanique analytique*, 3e édition, 1891, p. 72 et à celle de Pasquier : *Cours de mécanique analytique*, 1901, t. I, n° 227, p. 191. — Cf. *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1re partie, année 1909 (session d'octobre, à Louvain).

Remarques. — 1. Dans le cas d'un point libre, de masse m et d'accélération j et sur lequel s'exercent des forces ayant R pour résultante, l'équation générale du mouvement est $mj = R$. Si P désigne la résultante des forces qui se font équilibre, il faut et il suffit, par définition, que $P = 0$, ou, ce qui est la même chose, que le polygone des forces se faisant équilibre se ferme de lui-même ; en d'autres termes, pour exprimer, dans le cas d'un point libre, que des forces dont la résultante est P se font équilibre, il est nécessaire et suffisant de poser, dans l'équation du mouvement $mj = R$ et quelle que soit la vitesse du point, $j = 0$ et de réduire R à P.

2. Pour trouver les conditions (entre les forces données), nécessaires et suffisantes pour l'équilibre d'un point astreint à une ou plusieurs liaisons, on commence généralement par regarder le point comme libre grâce à l'introduction des forces de liaison, puis on écrit, comme à la remarque 1, que la somme géométrique P des forces qui se font équilibre est égale à zéro.

Cette relation géométrique de l'équilibre du point regardé comme libre (de même que les trois relations analytiques qui lui sont équivalentes) renferme nécessairement les forces de liaison, tout aussi bien que l'équation du mouvement $mj = R$ du même point (ou que les relations analytiques qui lui sont équivalentes). Les forces de liaison sont d'ailleurs, en général, supposées de direction et souvent aussi de sens déterminés.

Ultérieurement, par des procédés spéciaux que cette note n'a pas pour objet d'exposer (par exemple, par l'application du principe des travaux virtuels), on déduit de là et en ayant égard aux liaisons, les conditions d'équilibre entre les forces données seulement. Ces conditions, qui ne renferment plus les forces de liaison (considérées ordinairement comme n'étant pas données à priori), tiennent éventuellement compte des directions et sens, souvent supposés connus, de ces mêmes forces de liaison.

3. En vertu du principe de l'indépendance des effets des forces, les variations que subit la vitesse d'un point à une certaine époque sous l'action de forces données sont inde-

pendantes de la vitesse dont est animé le point à cette époque. Ces variations sont donc les mêmes, quelle que soit cette vitesse, que si ce point était au repos et soumis aux mêmes forces. Par suite, les conditions auxquelles il est nécessaire et suffisant que des forces données satisfassent pour se faire équilibre, c'est-à-dire pour ne pas modifier l'état de repos du point, sont aussi celles grâce auxquelles les mêmes forces ne modifient pas l'état de mouvement du point, quelle que soit d'ailleurs la vitesse dont il est animé à l'époque considérée.

C'est ce que l'on peut exprimer en disant que *pendant le mouvement, ces forces se font aussi équilibre.*

4. Quand, à une époque considérée, un point est en mouvement et qu'on le suppose au repos pour faciliter la recherche des conditions d'équilibre entre des forces données, on doit évidemment conserver aux diverses forces la grandeur, la direction et le sens qu'elles ont effectivement à l'époque en question. Ce serait, par suite, une erreur que de donner alors aux forces, fonctions de vitesse, non plus les valeurs qu'elles ont à l'époque dont il s'agit, mais les valeurs que ces forces auraient dans le cas du repos réel, donc dans le cas d'une vitesse effective nulle. Ce que nous venons de dire des forces fonctions de vitesse s'applique, en particulier, aux *forces de liaison* quand les liaisons sont des surfaces physiques capables de frottement : on sait en effet que le frottement est souvent fonction de la vitesse [1].

De l'équilibre d'un système de points [2]. — Par définition, nous disons qu'*un système de points matériels est en équilibre sous l'action de certaines forces quand les points du système étant au repos (ou supposés tels), ces forces ne lui impriment (ou ne lui imprimeraient) aucun mouvement.*

Dans le même cas, on dit aussi que *les forces* visées *se font équilibre.*

[1] Comme travail récent, consulter Charron, *Rôle lubrifiant de l'air dans le frottement des solides. Frottement dans le vide*, dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 11 avril 1910, t. 150, p. 706.

[2] Cette définition, équivalente — on va le voir — à celle de Gilbert, ouv. cité, p. 72, est la définition d'Appell, ouv. cité, n° 70; il convient cependant d'avoir égard à la première note de cet article.

Comme pour le cas d'un point, les forces qui se font ainsi équilibre peuvent n'être qu'une partie des forces données. Quand on emploie le mot « équilibre » d'une façon absolue, c'est-à-dire sans l'accompagner de la désignation des forces particulières sous l'action desquelles l'équilibre a lieu, c'est qu'on a en vue l'équilibre sous l'action de *toutes* les forces données, telles qu'elles interviennent à l'époque considérée.

En se reportant au principe de l'indépendance des effets des forces et appliquant au système de points ce qui est vrai de chacun d'eux, on constate aisément que, quand certaines forces se font équilibre sur un système, c'est-à-dire ne modifient pas l'état de repos (réel ou supposé) du système, les mêmes forces ne modifient pas non plus l'état de mouvement dans lequel le système peut se trouver à l'époque considérée. C'est ce qu'on peut encore exprimer en disant que *pendant le mouvement, ces forces se font aussi équilibre.*

Remarques. — 1. Quand, à une époque considérée, un système est en mouvement et qu'on le suppose au repos pour faciliter la recherche des conditions d'équilibre entre des forces données, on doit évidemment conserver aux forces en présence les valeurs qu'elles ont effectivement à l'époque en question. Ce serait, par suite, une erreur que de donner alors aux forces, fonctions de vitesse, non pas les valeurs qu'elles ont à l'époque dont il s'agit, mais les valeurs que ces forces auraient dans le cas du repos réel, donc dans le cas d'une vitesse effective nulle.

2. Pour trouver les conditions d'équilibre dans le cas d'un système, on opère comme pour le cas d'un point.

A cette fin, on commence ordinairement par noter que chaque point peut être regardé comme libre grâce à l'introduction de certaines forces de liaison, puis on écrit souvent que la somme géométrique des forces données se faisant équilibre et auxquelles on a joint des forces de liaison est égale à zéro, ainsi que la somme des moments des mêmes forces par rapport à l'origine des coordonnées. Il est d'usage de remplacer ensuite ces deux relations géométriques relatives à chacun des points du système par trois relations analytiques équivalentes, exprimant simplement que les sommes

des projections, sur les trois axes, des forces considérées, ainsi que les sommes de leurs moments par rapport aux mêmes axes, sont séparément nulles.

Les équations connues sous le nom d'*équations universelles de l'équilibre* se déduisent — on le sait — des relations géométriques ou analytiques relatives à chacun des points du système et dont il vient d'être question.

Par addition de ces relations et appelant P la résultante des forces se faisant équilibre sur l'un quelconque des points et X, Y, Z les projections de P sur les axes, on trouve :

$$(1) \qquad \Sigma P = 0 ,$$

ou, ce qui est la même chose :

$$(1^{bis}) \qquad \Sigma X = 0 , \quad \Sigma Y = 0 , \quad \Sigma Z = 0 .$$

Le moment de P par rapport à l'origine des coordonnées étant nul comme P et appelant M_0P ce moment, on trouve de même, par addition :

$$(2) \qquad \Sigma M_0 P = 0 ,$$

ou, ce qui est la même chose :

$$(2^{bis}) \qquad \Sigma(yZ - zY) = 0 , \quad \Sigma(zX - xZ) = 0 , \quad \Sigma(xY - yX) = 0 .$$

Les équations (1) et (2), ou, ce qui est la même chose, (1bis) et (2bis) constituent les équations universelles de l'équilibre. Elles peuvent être considérées, dans la mécanique classique, comme ne renfermant plus aucune force intérieure, mais elles contiennent encore, règle générale, toutes les forces extérieures, que celles-ci rentrent, ou non, dans la catégorie des forces dites données ou directement appliquées.

C'est par des procédés spéciaux, que cette note n'a pas pour objet, que l'on déduit les relations *suffisantes* d'équilibre, entre les forces données seulement. On démontre, par exemple, comme tout le monde le sait, que les relations (1) et (2), ou, ce qui est la même chose, (1bis) et (2bis), *nécessaires* pour tout système en équilibre, sont *suffisantes* quand ce système est un *solide libre*.

De la statique. — Par définition, *la statique est la science de l'équilibre.*

Pour un grand nombre, la statique paraît ne s'appliquer qu'aux corps réellement au repos et restant dans cet état malgré l'intervention des forces.

Toutefois si, en statique, on est autorisé à considérer les corps au repos, ce serait faire perdre leur généralité aux résultats qui y sont acquis que de ne pas se rappeler qu'ils conviennent aussi aux corps en mouvement.

Comme il est facile de le voir, la statique a une portée plus grande encore.

Systèmes de forces équivalents. — On dit que *deux systèmes de forces* S *et* S′ *sont équivalents, lorsqu'on peut remplacer les forces du système* S *par les forces du système* S′ *sans modifier leur effet sur le point (ou le système de points) sur lequel on considère qu'elles agissent.*

Puisque deux forces égales et directement opposées, agissant sur un même point, se font nécessairement équilibre, on peut dire que deux systèmes de forces équivalents sont tels que si l'on considère le système total composé de l'ensemble des forces du système S et des forces du système S′, ces dernières prises en sens contraire, ce système de forces est lui-même en équilibre.

En d'autres termes, si l'on désigne par — S′ le système composé de forces égales et directement opposées aux forces du système S′ et si S′ est équivalent a S, le système S — S′ est un système de forces en équilibre.

La réciproque est évidente. On en conclut que pour déterminer les conditions dans lesquelles les deux systèmes de forces S et S′ peuvent se remplacer sur un point (ou un corps), quel que soit d'ailleurs l'état de repos ou de mouvement de ce point (ou de ce corps), il est nécessaire et suffisant de déterminer les conditions dans lesquelles le système S — S′ est lui-même en équilibre.

En conséquence, le problème de l'équivalence de deux systèmes de forces revient à un problème de statique. C'est ainsi que la réduction classique des forces appliquées à un solide libre se ramène à un problème de la statique des so-

lides et que cette réduction est valable, quel que soit l'état de repos ou de mouvement du corps considéré.

De la dynamique. — Tandis que la statique est la science de l'équilibre des forces, *la dynamique est la science des effets des forces dans le cas le plus général qui puisse se présenter.*

La dynamique est donc plus générale que la statique et comprend cette dernière comme cas particulier.

En dynamique, ou bien on se donne les forces et l'on cherche les effets qu'elles produisent, ou bien l'on se donne le mouvement et l'on cherche les forces capables d'engendrer ce mouvement.

On trouve *les équations universelles du mouvement* en employant un procédé analogue à celui qui a conduit aux équations universelles de l'équilibre.

On part de l'équation générale du mouvement d'un point libre, ou rendu tel : on la met, par exemple, sous la forme :

$$mj = \mathrm{R}\ , \tag{3}$$

en désignant par m la masse du point, j son accélération à l'instant considéré, R la résultante des forces à cet instant (forces données et éventuellement forces de liaison).

En prenant les moments, par rapport à l'origine des coordonnées, des deux membres de (3), on a de même :

$$\mathrm{M}_0 mj = \mathrm{M}_0 \mathrm{R}\ . \tag{4}$$

On se représente les relations (3) et (4) écrites pour chaque point du système, on ajoute entre elles toutes les relations (3), et aussi entre elles toutes les relations (4). On a ainsi :

$$\Sigma mj = \Sigma \mathrm{R}\ , \tag{5}$$

$$\Sigma \mathrm{M}_0 mj = \Sigma \mathrm{M}_0 \mathrm{R}\ . \tag{6}$$

Ces équations (5) et (6) constituent, par définition, les *équations universelles du mouvement :* elles existent nécessairement, quel que soit le système et quel que soit le mouvement.

Les relations (5) et (6) peuvent d'ailleurs être remplacées

respectivement par les relations analytiques :

$$(5^{\text{bis}}) \qquad \Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X \,, \quad \Sigma m \frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y \,, \quad \Sigma m \frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z$$

$$(6^{\text{bis}}) \quad \begin{cases} \Sigma m\left(y\dfrac{d^2z}{dt^2} - z\dfrac{d^2y}{dt^2}\right) = \Sigma(yZ - zY) \\ \Sigma m\left(z\dfrac{d^2x}{dt^2} - x\dfrac{d^2z}{dt^2}\right) = \Sigma(zX - xZ) \\ \Sigma m\left(x\dfrac{d^2y}{dt^2} - y\dfrac{d^2x}{dt^2}\right) = \Sigma(xY - yX) \,, \end{cases}$$

où les lettres ont une signification évidente.

Les relations (5) et (6), donc aussi (5bis) et (6bis) peuvent, en mécanique classique, être regardées comme ne renfermant pas de forces intérieures, mais, règle générale, elles renferment toutes les forces extérieures, donc les forces données et éventuellement les forces de liaison correspondantes aux liaisons qui ne sont pas intérieures.

Par des moyens spéciaux qu'il n'y a pas lieu de développer ici [1], on détermine, en ayant égard aux liaisons du système, les relations entre le mouvement et les forces données seulement.

Les relations (5) et (6), ou, ce qui est la même chose, (5bis) et (6bis), *nécessaires* pour un système quelconque, quel que soit son mouvement, sont *suffisantes* quand ce système est un *solide libre*.

Remarques. — Les mots « équilibre », « statique » et « dynamique » n'ont pas toujours la signification précise que nous leur avons donnée.

1. Ceux qui adoptent les définitions qui précèdent, opposent parfois aussi le mot « équilibre » au mot « mouvement » [2].

Dans ce cas, l'équilibre en vue est souvent « l'équilibre au

---

[1] On peut, par exemple, utiliser à cette fin le principe de d'Alembert, qui n'est que l'extension, à un mouvement quelconque, du principe des travaux virtuels.

[2] Cette opposition entre les mots « équilibre » et « mouvement » se rencontre en plusieurs endroits de la Mécanique d'Appell : le t. III (2e édit., 1909) est même intitulé « Equilibre et mouvement des milieux continus ». C'est comme si l'auteur avait écrit « Statique et dynamique des milieux continus ».

repos » par opposition au « mouvement le plus général » qui puisse se présenter.

2. Il y a des auteurs qui, par définition, ne considèrent un point (ou un système) comme en équilibre que si ce point (ou ce système) étant effectivement au repos, les forces ne lui impriment aucun mouvement.

En attribuant ainsi au mot « équilibre » une signification restreinte, ces auteurs se privent volontairement de la liberté d'employer ce mot dans le cas du mouvement. Ils ne peuvent, par exemple, parler de l'équilibre du cerf-volant ou de l'aéroplane, qui sont nécessairement en mouvement quand ils fonctionnent, et cependant, un pareil langage, très commode, est courant en aéronautique.

Les mêmes auteurs n'ont pas toujours, dans leurs déductions, respecté suffisamment les règles de la rigueur, par exemple, lors du passage de la statique à la dynamique.

3. D'autres considèrent que pour l'équilibre, il ne doit y avoir aucun changement local, non seulement de position, mais encore de configuration.

Ceux-là ont égard aux déformations dont les corps sont susceptibles sous l'action des forces qui les sollicitent.

4. Dans certains cas, l'équilibre est *relatif :* il est alors considéré, non par rapport aux axes fixes, mais par rapport à des axes mobiles déterminés.

Par exemple, lors de la vitesse angulaire normale (ou de régime), les boules du régulateur d'une machine à vapeur peuvent être considérées comme étant en équilibre relatif par rapport à un système d'axes possédant une rotation autour de l'axe sur lequel est monté le régulateur et dont la vitesse angulaire est égale à la vitesse angulaire de régime du régulateur lui-même.

Dans les transmissions à l'aide de courroies sans fin, pour la régularité de la transmission, la courroie, supposée inextensible [1], ne doit glisser ni sur la poulie menante, ni sur la poulie menée : en d'autres termes, la courroie doit être en repos relatif par rapport à chacune des deux poulies.

---

[1] Dans le cas pratique de courroies extensibles, il existe un glissement « fonctionnel ». Cf. LECORNU, *Dynamique appliquée*, p. 503, n° 203. Paris, Doin, 1908.

C'est en exprimant cet équilibre relatif qu'on arrive à la formule de Prony, modifiée par M. Léauté pour le cas de grandes vitesses.

Une masse fluide animée d'un mouvemement uniforme de rotation autour d'in axe peut, comme le régulateur, être regardée comme étant en équilibre relatif. C'est en la considérant à ce point de vue qu'on détermine la figure d'équilibre d'une pareille masse fluide.

5. Interprétées d'une certaine manière, les équations de la dynamique deviennent des équations de statique, donc des relations d'équilibre.

L'équation du mouvement d'un poids libre, ou rendu éventuellement tel par l'adjonction des forces de liaison, peut, en effet, se mettre sous la forme :

$$P - mj = 0 \, , \tag{7}$$

où P est la résultante des forces, m la masse et j l'accélération du point.

Or cette relation n'est autre qu'une relation d'équilibre entre P et la réaction d'inertie $- mj$, au cas où celle-ci serait, comme P, appliquée au point mobile. Mais comme cette dernière condition n'est pas réalisée — la réaction d'inertie d'un point émanant de ce point et n'agissant donc pas sur lui — il doit être bien entendu que l'équilibre dont il est ici question est purement *fictif*.

Puisque j se décompose en une accélération tangentielle $\frac{dv}{dt}$ et une accélération normale ou centripète $\frac{v^2}{R}$ (R étant le rayon de courbure de la trajectoire à l'instant considéré), la réaction d'inertie $- mj$ se réduit elle-même à la force centrifuge quand la vitesse est constante en grandeur. Dans ce cas, la relation (7) entre P et $- mj$ se réduit à

$$P - m\frac{v^2}{R} = 0 \, . \tag{8}$$

Cette équation est souvent considérée par les praticiens comme exprimant un équilibre réel entre les forces P et la

force centrifuge : mais encore une fois, il s'agit là d'un équilibre purement fictif.

La remarque actuelle s'applique, entre autres, au cas des aéroplanes lors d'un virage.

6. Parfois on trouve les mots « statique » et « dynamique » employés adjectivement. C'est ainsi qu'avec le sens que nous avons attribué au mot « équilibre », on distingue parfois « l'équilibre statique » (ou lors du repos) et « l'équilibre dynamique » (ou lors du mouvement).

Le frottement pouvant, lors du repos, acquérir toutes les valeurs comprises entre zéro et une certaine limite fournie par l'expérience, on lève généralement l'indétermination que comporte un problème d'équilibre statique, en admettant que le frottement possède sa plus grande valeur ou, ce qui est la même chose, que le mouvement est sur le point d'avoir lieu dans une direction et un sens donnés.

7. Dans d'autres circonstances, les mots « statique » et « dynamique », également employés comme adjectifs, le sont dans un sens qui doit être soigneusement défini.

Par exemple, en aéronautique[1], on parle, à propos des ballons (ou du plus léger que l'air), de « sustentation statique » et de « support statique ». On veut dire par là que le ballon étant formé, dans quelques-unes de ses parties, de corps plus légers que n'est l'air à la surface de la terre, le poids du fluide déplacé par le ballon l'emporte d'abord sur le poids même de celui-ci, de sorte que le ballon commence par s'élever grâce à un excès de poussée de bas en haut ; il cesse de s'élever, quand il a atteint une zone aérienne dans laquelle son propre poids est contrebalancé par le poids de l'air déplacé, moins dense dans cette zone qu'à la surface du sol.

---

[1] En aéronautique, on parle aussi du « pilotage statique », « pilotage dynamique », « couple perturbateur dynamique » ou « couple de renversement dynamique », « couple redresseur statique », « couple redresseur dynamique », « montée ou descente d'un ballon, équilibré statiquement », « compensateur dynamique d'une éventuelle perte d'équilibre statique » ; « stabilisation longitudinale statique », « stabilisation longitudinale dynamique », etc.

Cf. Marchis, *Le navire aérien*, pp. 2 à 14, 483, 489, 510, 512, 544, 737 ; Dunod, Paris 1909. Cet ouvrage important, publié fin sept. 1909, est déjà épuisé, mais la maison Dunod annonce que le *Cours d'aéronautique*, professé à la Faculté des sciences de Paris par le même M. Marchis, paraitra, après chaque leçon, en feuilles autographiées et pour la première fois le 15 mars 1910. Les 260 premières pages du *Cours* en question, plus 16 pages d'annexes, nous sont parvenues jusqu'à présent (juin 1910).

Quand il s'agit de l'aéroplane (ou du plus lourd que l'air), on dit, au contraire, en aéronautique, que la sustentation est « dynamique » ou que l'air est un support « dynamique ». On veut dire par là que, contrairement à ce qui se présente pour le ballon, pour être maintenu dans l'air à une certaine hauteur au-dessus du sol, l'aéroplane doit posséder une vitesse horizontale suffisante grâce à l'intervention d'une force nouvelle, provenant ordinairement d'un moteur.

8. En général, quand les mots « équilibre », « statique », « dynamique » n'ont pas leur sens habituel, ou bien ils doivent être soigneusement définis, ou bien le contexte doit permettre de préciser sans peine le sens qui leur est donné.

9. On sait que la chaleur, l'électricité, les réactions chimiques, etc., donnent naissance au mouvement et réciproquement, de sorte qu'il est parfois nécessaire, quand on étudie le mouvement d'un corps, d'avoir égard aux phénomènes thermique, électrique, chimique, etc., qui se produisent en ce corps ou en ceux avec lesquels il est en relation. De là, une mécanique plus générale [1] que la mécanique classique ordinaire et qui est en même temps une mécanique physique et une mécanique chimique. Dans cette mécanique, l'état d'un corps, à un instant donné, n'est pas seulement défini par les coordonnées de ses divers points à cet instant par rapport à des axes déterminés, mais il est défini aussi par d'autres variables, qui sont respectivement en rapport avec l'état thermique, l'état électrique, etc. des mêmes points.

Dans cette « mécanique généralisée », on considère non seulement l'équilibre local (comme dans la mécanique ordinaire), mais encore l'équilibre thermique, l'équilibre électrique, l'équilibre magnétique, etc., et il existe une « statique généralisée » qui est la science de ces diverses espèces d'équilibre.

10. En se basant sur certains faits de physique moderne [2], quelques auteurs ont cru pouvoir conclure que, *tout en res-*

---

[1] Cf. Duhem, *L'évolution de la mecanique*. Paris, chez Joanin, 1903.

[2] Cf. Poincaré, *La dynamique de l'électron*, dans la *Revue generale des sciences*, n° du 30 mai 1908; *La mécanique nouvelle*, dans la *Revue scientifique*, n° du 7 août 1909.

tant vrais pour les plus grandes vitesses de la pratique courante et même pour des vitesses pouvant atteindre peut-être 100 kilomètres à la seconde (comme c'est le cas pour la planète Mercure), les principes fondamentaux de la mécanique ordinaire, qui sont sensiblement vérifiés par rapport à des axes invariablement liés aux étoiles, ne seraient plus applicables pour des vitesses notablement plus grandes (par exemple 30,000 à 100,000 kilomètres à la seconde), telles que celles que l'on rencontre dans la dynamique de l'électron : dans ces derniers cas, la masse, considérée comme étant le rapport de la force à l'accélération, augmenterait avec la vitesse. Il y aurait d'ailleurs une limite (la vitesse de la lumière) à la vitesse qu'un corps peut atteindre relativement aux axes susvisés ou mieux par rapport à l'éther considéré comme immobile, etc.

En particulier, le principe de l'indépendance des effets des forces n'étant plus vrai pour ces très grandes vitesses, les conditions d'équilibre ne seraient plus elles-mêmes indépendantes de la vitesse.

Il est nécessaire d'ajouter que M. Poincaré lui-même paraît considérer ces conclusions comme hasardées[1].

11. La note actuelle ayant principalement pour objet la mécanique classique ordinaire, il n'y a pas lieu d'insister sur les généralisations dont il vient d'être question aux remarques 9 et 10, mais il n'était pas inutile de les signaler brièvement, surtout la remarque 9.

Ern. PASQUIER (Louvain).

---

[1] Cf. aussi DWELSHAUVERS-DERY, *La masse matérielle des corps est-elle variable?* dans la *Revue générale des sciences*, n° du 15 novembre 1908, ainsi que trois Notes de M. BOUSSINESQ (spécialement la troisième), dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, n^os^ des 20 et 27 juin et 4 juillet 1910.

Au point de vue d'une conception déductive des principes de la mécanique et où la masse est considérée comme variable avec la vitesse, ceux qui ont en mathématiques des connaissances suffisamment élevées peuvent consulter :

Eugene et François COSSERAT, *Sur la dynamique du point et du corps invariable, dans le système énergétique*, dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, séance du 3 avril 1905. — *Note sur la dynamique du point et du corps invariable*, dans le t. I de l'édition française du *Traité de physique* de Chwolson. — *Note sur la théorie des corps déformables*, dans le t. II de la même édition française. — *Note sur l'action euclidienne*, dans APPELL, *Traité de mécanique rationnelle*, t. III, 2e édit., 1909. Dans cette dernière Note, la notion de la masse n'intervient pas explicitement.

SUR L'USAGE DES MATRICES DANS L'ÉTUDE DES CONGRUENCES DE DROITES

Nous voudrions appeler l'attention sur certaines matrices fonctionnelles introduites par M. L. Godeaux dans divers articles dont on trouvera plus loin les titres et dont l'un a paru dans l'*Enseignement mathématique*. Les matrices en question, et d'autres analogues, égalées à zéro, représentent des congruences de droites; nous tâcherons de creuser un peu leur étude. En même temps les réflexions qu'elles suggèrent s'étendent à des sujets plus vastes, ce qui explique le titre du présent travail. Toutefois nous ne pouvons guère que signaler les questions apparentées; ce que nous en dirons ne sera donc ni bien profond, ni même bien neuf. Si, malgré cela, les pages qui vont suivre présentent quelque intérêt, c'est, au moins en partie, un intérêt pédagogique; voilà pourquoi nous avons tenu à soumettre nos observations aux lecteurs de l'*Enseignement mathématique*.

1. — Soient

$$a_x \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0 \;,$$
$$b_x \equiv b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 = 0$$

les équations d'une droite en coordonnées homogènes. Si les coefficients a_i et b_i sont fonctions d'un paramètre, donc liés à ce paramètre par six équations homogènes à la fois en a_i et b_i, ou liés à n paramètres par $n + 5$ relations pareilles, la droite engendre en général une *surface réglée* dont l'équation résulte de l'élimination des coefficients et des paramètres. Si les coefficients sont liés à n paramètres par $n + 4$ équations, la droite engendre une *congruence* dont on peut obtenir une représentation en éliminant les coefficients

et $n-1$ paramètres; la résultante contient encore un paramètre et représente ∞^1 surfaces réglées engendrées par les droites de la congruence. Enfin si les coefficients dépendent de trois paramètres, la droite engendre un *complexe*.

Pour représenter la droite, on peut d'ailleurs choisir deux autres plans tels que $\lambda a_x + \mu b_x = 0$, $\lambda' a_x + \mu' b_x = 0$ et disposer des rapports $\lambda : \mu$, $\lambda' : \mu'$, supposés distincts, de manière que ces plans passent, par exemple, chacun par un point fixe; cette simplification met en évidence le fait que la droite dépend de quatre constantes; elle permet donc de réduire, de deux unités, le nombre des relations dont il est parlé ci-dessus; ce nombre se réduit davantage si quelques-uns des coefficients jouent le rôle de paramètres. Dans le cas général même, ces relations en nombre réduit suffisent quand leur structure est telle que, si elles sont satisfaites par des coefficients a_i et b_i, elles le sont par $\lambda a_i + \mu b_i$ et $\lambda' a_i + \mu' b_i$, quels que soient les rapports distincts $\lambda : \mu$, $\lambda' : \mu'$; nous verrons plus loin des exemples de telles relations.

2. — Revenons au cas général, mais ne considérons que les congruences de droites et limitons-nous encore au cas où les coefficients sont liés aux n paramètres par $4+n$ équations entières et homogènes en a_i et b_i.

L'*ordre* de la congruence s'obtient en regardant les x_i comme donnés et en résolvant le système des équations $a_x = 0$, $b_x = 0$, accompagnées des $4+n$ conditions, par rapport aux six rapports mutuels des coefficients a_i et b_i, et aux n paramètres. Par exemple, si les coefficients sont fonctions linéaires de deux paramètres t, t', les équations de la droite (ab) prennent la forme

$$a'_x + t a''_x + t' a'''_x = 0 , \qquad b'_x + t b''_x + t' b'''_x = 0 ;$$

la congruence, manifestement de premier ordre, est l'ensemble des bisécantes de la cubique gauche,

$$\left\| \begin{matrix} a'_x & a''_x & a'''_x \\ b'_x & b''_x & b'''_x \end{matrix} \right\| = 0 .$$

E. KUMMER[1] a donné la classification des congruences de premier ordre. On pourrait essayer de traiter cette question en analysant la représentation indiquée ci-dessus. Cette méthode serait probablement pénible, bien qu'il y ait moyen peut-être d'utiliser la remarque suivante. Les équations $a_x = 0$, $b_x = 0$ dont les coefficients sont, par exemple, des fonctions entières de deux paramètres, peuvent être remplacées par l'évanouissement de la matrice $\| a_x \; b_x \|$; celle-ci, à son tour, se remplace par

$$\left\| \begin{matrix} a_x & b_x & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|, \quad \text{ou par} \quad \left\| \begin{matrix} a_x & b_x & 0 \\ \alpha & \beta & 1 \end{matrix} \right\|$$

et l'on dispose de α, β, γ de manière à diminuer, par soustraction de lignes ou de colonnes, les exposants affectant les paramètres ; en continuant ainsi, de proche en proche, on peut arriver à une matrice de l lignes et $l + 1$ colonnes dont les éléments d'une ligne ou de deux colonnes contiennent les x au premier degré et dont les autres éléments sont indépendants des x, tandis que tous les coefficients sont fonctions linéaires des deux paramètres ou indépendants de ces paramètres.

La *classe* de la congruence s'obtient en considérant l'équation d'un plan u_x avec les équations de la congruence ; en exprimant les conditions pour que ces relations soient satisfaites par deux points x ; enfin en résolvant, par rapport à t et t', les deux égalités exprimant ces conditions. Par exemple la congruence des bisécantes d'une cubique gauche, signalée ci-dessus, a un rayon dans le plan u_x quand on a

$$\left\| a'_i + ta''_i + t'a'''_i \quad b'_i + tb''_i + t'b'''_i \quad u_i \right\| = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

et cette matrice s'annule en général pour *trois* systèmes de valeurs de t et t'[2].

En se laissant guider par la discussion des congruences

---

[1] *Academ. Berlin*, 1866.

[2] On vérifie que cette classe se réduit à la 2me ou la 1re si la matrice précédente s'annule identiquement pour *un* ou *deux* systemes de valeurs t, t', par exemple pour $t = t' = 0$, ou pour $t = t' = 0$ en même temps que pour $t = 0$, $t' = \infty$; dans ces cas la cubique gauche dégénere en une droite et une conique ou en trois droites.

linéaires de cubiques gauches[1], discussion qui offre des analogies avec celle que nous esquissons ici, on rencontre encore le type suivant

$$\frac{a_x + ta'_x}{\alpha + t'\alpha'} = \frac{b_x + tb'_x}{\beta + t'\beta'} = \frac{c_x + tc'_x}{\gamma + t'\gamma'}$$

qui représente une congruence linéaire de droites s'appuyant, d'une part sur la cubique gauche

$$\left\| \begin{matrix} a_x & b_x & c_x \\ a'_x & b'_x & c'_x \end{matrix} \right\| = 0 ,$$

d'autre part sur une bisécante de cette courbe,

$$\left\| \begin{matrix} a_x & a'_x & \alpha & \beta \\ b_x & b'_x & \alpha' & \beta' \\ c_x & c'_x & \alpha'' & \beta'' \end{matrix} \right\| = 0 .$$

Evidemment cette congruence est de troisième classe, et l'on obtient de même une congruence de premier ordre et de classe n en considérant une courbe gauche de degré n rencontrant $n - 1$ fois une droite et en menant les rayons qui s'appuient sur cette courbe et sur cette droite.

Enfin le système très simple $ta_x = a'_x$, $t'b_x = b'_x$ représente les droites s'appuyant sur les deux directrices rectilignes (aa'), (bb').

3. — Parmi les manières de représenter une droite par une matrice, remarquons la suivante

$$\left\| \begin{matrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{matrix} \right\| = 0 ;$$

cette notation fort usitée exprime que le point variable X est aligné sur les points x et y. Si les coordonnées de ces deux derniers points dépendent d'un, deux ou trois para-

[1] Voir M. Stuyvaert, *Cinq études de Géométrie analytique*, Gand, van Gœthem, 1908, p. 103.

mètres, on a respectivement une surface réglée, une congruence, un complexe. Notamment si les quantités x et y sont fonctions linéaires d'un paramètre, on a une quadrique. Si elles sont fonctions linéaires de deux paramètres t, t', on a une congruence du troisième ordre; cette congruence est de première classe, car les points x et y sont dans un plan défini par trois points a, b, c quand ils annulent la matrice $\| a_i \, b_i \, c_i \, x_i \, y_i \|$ dont deux colonnes contiennent t, t' au premier degré, et cette matrice s'évanouit, en général, pour un seul système de valeurs de t et t'.

En passant signalons le cas où x et y se meuvent chacun dans un plan : prenons ces plans pour faces du tétraèdre de référence et écrivons par exemple

$$\left\| \begin{matrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & y_2 & y_3 & y_4 \end{matrix} \right\| = 0 .$$

Supposons ensuite le système plan $y_2 y_3 y_4$ rapporté au plan $x_1 x_2 x_3$ par une transformation rationnelle,

$$y_2 : y_3 : y_4 = \varphi_2^{(n)} x : \varphi_3^{(n)} x : \varphi_4^{(n)} x \; ;$$

en faisant la substitution, on obtient une matrice où les rapports mutuels de x_1, x_2, x_3 jouent le rôle de paramètres. Elle représente une congruence; par des procédés d'énumération connus, on constate que cette congruence est d'ordre $n^2 + n + 1$ et de classe n. Si la transformation est birationnelle, ses points fondamentaux amènent un abaissement de l'ordre de $n^2 - 1$ unités. On voit donc que la représentation par matrices convient pour les congruences que T.-A. Hirst appelle *crémoniennes* [1].

4. — La représentation du n° précédent suggère l'idée que voici. De même que les coefficients de l'équation d'une surface peuvent être pris pour coordonnées de cette surface,

[1] Voir T.-A. Hirst, *Proceedings of London mathem. society*, t. XIV, XVI, XVII; et *Rendiconti d. circolo mat. Palermo*, t. I; G. Bordiga, *Mém. in-4° de l'Acad. roy. de Belgique*, 1909.

de même la matrice $\| x_i \, y_i \|$ peut jouer le rôle du système des coordonnées de la droite xy. Le développement de cette idée se poursuit de l'une des façons suivantes dont la première n'est qu'un cas particulier de l'autre.

Ou bien l'on prend pour coordonnées de la droite les six déterminants extraits de la matrice $\| x_i \, y_i \|$; c'est alors le système couramment usité des coordonnées pluckériennes homogènes. Mais cette représentation coïncide avec la représentation dualistique, d'où résulte que tout complexe a son ordre égal à sa classe ; donc aussi deux équations en coordonnées pluckériennes représentent en général une congruence dont l'ordre est égal à la classe.

Ou bien l'on considère une droite comme définie par deux groupes de coordonnées cogrédientes et l'on représente les systèmes de droites par des relations contenant ces deux groupes de coordonnées; seulement la structure de ces relations doit être telle que, si elles sont vérifiées par deux points x et y, elles le soient aussi par tout couple de points distincts $\lambda x + \mu y$, $\lambda' x + \mu' y$. Nous allons donner des exemples de relations pareilles[1].

Les plus simples de ces exemples manquent d'intérêt : les notations

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = 0 , \qquad \left\| \begin{matrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \end{matrix} \right\| = 0$$

représentent trop évidemment, la première le complexe spécial des rayons s'appuyant sur la droite (ab), la seconde la congruence des rayons issus du point (abc). Si les formes sont ternaires, la première notation représente, dans le plan, le faisceau de rayons issus du point (ab) ; la seconde ne représente généralement rien que le système illusoire $x \equiv y$, car si elle représentait une droite, celle-ci devrait contenir les trois sommets du triangle (abc).

Voici un autre exemple : le déterminant

$$\left| a_x^{(i)} \;\; b_x^{(i)} \;\; a_y^{(i)} \;\; b_y^{(i)} \right| \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

[1] Voir J. Neuberg, Mathesis, 1902, p. 224. Th. Reye, *Journ. f. die reine u. angew. Math.*, t. 108, ainsi que les auteurs que nous citerons plus bas.

s'annule, dans l'espace, pour un complexe quadratique; car, pour y donné, on obtient une quadrique ayant y pour point double, donc un cône. Dans le domaine ternaire, à tout point y répond un couple de droites se croisant en ce point y; donc l'équation représente, dans le plan, les tangentes à une conique.

Nous avons déjà rencontré, dans des travaux antérieurs [1], des exemples de représentations pareilles. Le n° suivant sera consacré à un exemple général, d'une certaine portée, qui a déjà fait l'objet de plusieurs articles de L. Godeaux [2] et dont nous avons parlé dans le préambule du présent travail.

5. — Utilisons, pour une forme d'ordre n à un nombre quelconque de variables x_1, x_2, ... et pour les formes polaires successives d'un élément y_1, y_2, ... les notations symboliques habituelles a_x^n, $a_x^{n-1} a_y$, $a_x^{n-2} a_y^2$, ... a_y^n, et formons un tableau dont la première ligne comprend ces $n+1$ formes, tandis que les lignes suivantes sont composées de la même manière, chacune au moyen d'une forme b_x^n, c_x^n, ... analogue à a_x^n. Nous obtenons, suivant le nombre des lignes, une matrice carrée ou rectangulaire qui reste inaltérée quand on remplace x ou y par $\lambda x + \mu y$, comme on le vérifie par soustraction de colonnes; cette matrice s'annule donc pour un système de droites, quel que soit le nombre de dimensions de l'espace.

Soit d'abord le nombre m de lignes égal ou inférieur au nombre $n+1$ de colonnes: cherchons l'intersection d'une droite xy avec les hypersurfaces a_x^n, b_x^n, ... ; nous aurons évidemment

$$\lambda^n a_x^n + \frac{n}{1} \lambda^{n-1} \mu a_x^{n-1} a_y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \lambda^{n-2} \mu^2 a_x^{n-2} a_y^2 + \dots + \mu^n a_y^n = 0$$

et $m - 1$ relations semblables; chacune de ces équations en $\lambda : \mu$ représente un groupe de n points sur la droite xy et,

[1] *Bulletin Acad. roy. Belgique*, mai 1907, pp. 475. 485, 532.

[2] *Bulletin Acad. roy. Belgique*, janvier 1907, *Nouvelles Annales de mathem.*, 1907; *Mém. de la Soc. des Sciences du Hainaut*, 1908; *Enseignement mathématique*, mars 1909.

pour que ces m groupes fassent partie d'une même involution I_n^{m-2}, il faut qu'il existe une même relation linéaire entre les coefficients de ces m équations ou que la matrice définie ci-dessus,

$$\left\| \begin{matrix} a_x^n & a_x^{n-1} a_y & a_x^{n-2} a_y^2 & \dots & a_y^n \\ b_x^n & b_x^{n-1} b_y & b_x^{n-2} b_y^2 & \dots & b_y^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\|$$

s'annule. Ainsi l'évanouissement de cette matrice représente l'ensemble des droites qui coupent les m hypersurfaces suivant des groupes d'une involution I_n^{m-2}. Mais, lorsque cette matrice est nulle, une des hypersurfaces du système linéaire $\varphi a_x^n + \varphi' b_x^n + \dots$ est coupée en $n+1$ points par la droite xy; donc on a aussi l'ensemble des droites qui se trouvent tout entières sur une des hypersurfaces de ce système linéaire.

Ces interprétations ne sont pas applicables sans modification quand le nombre m de lignes dépasse le nombre $n+1$ de colonnes, car alors les éléments des diverses colonnes de la matrice nulle ont $\infty^{m-(n+1)}$ relations linéaires, donc les droites xy sont alors celles qui se trouvent tout entières sur $\infty^{m-(n+1)}$ hypersurfaces du système $\Sigma\nu\alpha_x^n$. De plus, chaque déterminant à $n+1$ lignes extrait de la matrice montre que les groupes de n points de rencontre d'une droite xy avec $n+1$ quelconques des m hypersurfaces sont des groupes d'une involution I_n^{n-1}, donc tous ces m groupes font partie d'une telle involution.

6. — Eclaircissons ce qui précède par quelques exemples. Dans le plan, les formules

$$\left\| \begin{matrix} a_x^2 & a_x a_y & a_y^2 \\ b_x^2 & b_x b_y & b_y^2 \end{matrix} \right\| = 0$$

représentent (abstraction faite de la solution $x \equiv y$) les

droites qui rencontrent deux coniques aux mêmes points (deux couples d'une involution I_2^0), c'est-à-dire les six droites faisant partie de coniques dégénérées du faisceau $a_x^2 + \lambda b_x^2$.

Lorsque les formes sont quaternaires, la matrice s'annule pour la congruence des droites qui coupent deux quadriques aux mêmes points, donc des bisécantes de leur courbe d'intersection. On connaît l'ordre et la classe de cette congruence, mais voici, pour le calcul de ces nombres, une méthode qui se prête à la généralisation [1].

Si y est donné, la matrice, à une seule série de variables x_1, x_2, x_3, x_4, s'annule pour une courbe du second degré; mais comme, d'après sa structure, elle s'annule pour un système de droites, elle représente deux droites par y et la congruence est du second ordre. Si x et y décrivent deux droites sans point commun, les x sont fonctions linéaires d'un paramètre μ et les y d'un paramètre ν, et, pour aucun système de valeurs de μ, ν, les points x et y ne coïncident; on peut supposer aussi que les points répondant à des valeurs infinies de μ et ν ne sont pas sur un rayon de la congruence étudiée; alors, abolissant la première ou la dernière colonne de la matrice, on a, en coordonnées cartésiennes μ, ν dans un plan, deux quartiques ayant chacune un point simple à l'infini sur un axe et un point triple à l'infini sur l'autre axe; ces points absorbent six intersections étrangères à la question, et l'on doit encore défalquer les points (μ, ν) qui annulent à la fois $a_x a_y$ et $b_x b_y$, c'est-à-dire, dans le plan des (μ, ν), les deux intersections à distance finie de deux hyperboles à asymptotes parallèles. La congruence a donc *huit* rayons qui s'appuient à la fois sur les deux supports considérés; lorsque ceux-ci tendent vers deux droites d'un même plan, deux de ces rayons passent par les points communs aux deux droites et les six autres sont dans le plan de ces droites. La congruence est donc de sixième classe.

Si l'on suppose $x_4 = 0$, on voit que la matrice de formes ternaires représente six droites dans un plan.

---

[1] Cette méthode a été employée par L. GODEAUX pour n quelconque (*Enseign. math.*, mars 1909), mais l'application est déparée par une faute d'impression.

7. — Ici se présente une circonstance curieuse.

Lorsque l'on a une matrice rectangulaire de formes à une seule série de variables, on peut la compléter par une ou plusieurs lignes ou colonnes d'éléments nuls ou constants ou de formes de degré quelconque; pourvu que les déterminants extraits de la nouvelle matrice soient des fonctions homogènes, celle-ci s'annule pour une figure inscrite ou circonscrite à la figure primitive. Mais, si nous reprenons le tableau de formes quaternaires

$$\left\| \begin{matrix} a_x^2 & a_x a_y & a_y^2 \\ b_x^2 & b_x b_y & b_y^2 \end{matrix} \right\|$$

en le faisant précéder d'une ligne de formes, on n'obtient un complexe circonscrit à la congruence représentée que si le déterminant ainsi formé a la structure exigée pour la représentation d'un système de droite, c'est-à-dire s'il s'annule pour tout couple de points distincts $\lambda x + \mu y$, $\lambda' x + \mu' y$ chaque fois qu'il s'annule pour x et y. Or cela n'a lieu que dans des cas particuliers, notamment quand la ligne ajoutée est analogue aux lignes existantes, par exemple

$$c_x^2 \quad c_x c_y \quad c_y^2$$ [1]

Mais alors ce déterminant représente un complexe cubique, lieu des droites coupant les quadriques d'un réseau en des couples de points en involution et aussi lieu des générations rectilignes de ces quadriques[2]. Dans le plan, ce déterminant s'annule pour les tangentes à une courbe de troisième classe[3].

---

[1] Avec cette simplification, si c'en est une, que les notations c_x^2, ... peuvent être effectives et non symboliques.

[2] Voir J.-C. Kluyver, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 1892; D. Montesano, *Mem. d. R. Acc. Bologna*, 1892. Si la base du réseau est une cubique gauche, on a les droites qui s'appuient, au moins en un point, sur cette courbe.

[3] Voir Salmon-Vaucheret, *Sections coniques*, 1884, p. 160. Comme a_x^2, b_x^2, c_x^2 sont, en général, les premières polaires de trois points relatives à une même cubique, on retrouve la steinérienne de cette cubique.

Dans l'espace à trois dimensions, la matrice

$$\begin{Vmatrix} a_x^2 & b_x^2 & c_x^2 & d_x^2 \\ a_x a_y & b_x b_y & c_x c_y & d_x d_y \\ a_y^2 & b_y^2 & c_y^2 & d_y^2 \end{Vmatrix}$$

s'annule pour la congruence commune à deux complexes cubiques obtenus en supprimant par exemple la troisième ou la quatrième colonne, d'où il faut défalquer la congruence, d'ordre 2 et classe 6, annulant la matrice des deux premières colonnes; reste donc une congruence C_7^3, d'ordre 7 et classe 3, lieu des droites coupant quatre quadriques indépendantes, ou les quadriques d'un système linéaire triplement infini en des couples de points en involution; ou lieu des droites par où passent des faisceaux[1] de quadriques de ce système. Si les quadriques considérées sont les premières polaires d'une surface cubique, on a une congruence C_7^3 de droites liées à cette surface et jouissant encore de cette propriété que les plans polaires des points de chacune de ces droites forment faisceau; les 27 droites de la surface cubique font partie de cette congruence.

Dans l'espace, une matrice analogue à celle qu'on vient d'écrire, mais à cinq ou six colonnes, représente une surface réglée ou un nombre fini de rayons.

Dans le plan, la matrice, à quatre colonnes, écrite en dernier lieu, représente les trois droites qui, dans un système linéaire de ∞^3 coniques, appartiennent chacune à une infinité de courbes dégénérées, ou qui coupent les courbes de ce système en des points en involution[2].

---

[1] La base de chaque faisceau se complète par une cubique gauche.

[2] On rencontre ces trois droites dans le problème suivant. Sur une cubique plane générale, les coniques par 4 points fixes de la courbe découpent une série de couples de points dont les cordes concourent sur la cubique et forment un faisceau projectif à celui des coniques; les coniques passant par ces couples de points et par 4 autres points fixes de la cubique, forment un faisceau projectif au premier; mais deux faisceaux projectifs de coniques engendrent, en général, une courbe du 4me ordre. La question se pose : quand deux faisceaux projectifs de coniques donnent-ils une cubique et une droite? Il faut que, sur une certaine droite, les deux faisceaux découpent la même involution et, comme chaque faisceau est défini par 2 coniques, on est ramené à chercher les droites qui coupent 4 coniques en des couples de points en involution.

8. — Prenons maintenant, dans l'espace à trois dimensions, la matrice à n lignes et $n+1$ colonnes,

$$\left\| a_x^n \quad a_x^{n-1} a_y \quad a_x^{n-2} a_y^2 \quad \ldots \quad a_y^n \right\| ;$$

elle s'annule pour une congruence de droites. L'ordre s'obtient en regardant y comme point fixe; alors la matrice représente, en coordonnées x, une courbe gauche dont le degré se détermine par des procédés connus[1] et qui se décompose en lignes droites; le nombre de celles-ci est $\Sigma p_i p_k$, où p_i, p_k reçoivent des valeurs, différentes entre elles, de 1 à n, donc

$$\sum p_i p_k = n \sum_1^{n-1} p + (n-1) \sum_1^{n-1} p + \ldots + 2$$

$$= \frac{n^2(n-1)}{2} + \frac{(n-1)^2(n-2)}{2} + \ldots + \frac{2^2 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}[n^3 + (n-1)^3 + \ldots + 1^3]$$

$$- \frac{1}{2}[n^2 + (n-1)^2 + \ldots + 1^2] = \frac{1}{8} n^2 (n+1)^2 - \frac{1}{12} n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2) .$$

On trouve, comme dans l'exemple de $n=2$ traité plus haut, le total de l'ordre et de la classe en faisant parcourir à x et y deux droites, d'abord sans point commun; x et y sont alors exprimés linéairement en μ et ν, les éléments de la matrice sont tous d'ordre n en μ et ν, et représentent, dans un plan (μ, ν) un nombre de points égal à $n^2 . \frac{1}{2} n(n+1)$; mais chaque point à l'infini[2] des axes μ, ν est compté indûment un certain nombre de fois; comme les colonnes de la matrice contiennent μ aux degrés n, $n-1$, ..., 1, 0, le calcul nécessaire pour trouver la multiplicité du point à l'infini de l'un des axes est le même que celui qui a fait découvrir

[1] M. Stuyvaert, *Cinq études de Géométrie analytique*, Gand, Van Gœthem, 1908, p. 10.

[2] Dans ses articles et ses communications manuscrites, L. Godeaux évite les points à l'infini en rendant homogenes les parametres μ, ν; ainsi on voit peut-être mieux les systèmes de valeurs a défalquer.

l'ordre de la congruence; de même pour l'axe des μ, donc

$$\text{l'ordre} + \text{la classe} = n^2 . \frac{n(n+1)}{2} - 2 \times \text{l'ordre} ,$$

d'où la classe est égale à

$$\frac{1}{2} n^3 (n+1) - \frac{1}{8} (n-1) n (n+1)(3n+2) = \frac{1}{8} n (n+1)(n^2+n+2) .$$

Si la matrice a $n+1$ lignes et colonnes, elle représente un complexe d'ordre et de classe

$$\frac{1}{2} n (n+1) .$$

Si la matrice a $n+2$ lignes et $n+1$ colonnes, elle représente une congruence, intersection de deux complexes pareils, d'où il faut défalquer une congruence annulant une matrice à n lignes, de sorte que la nouvelle congruence est d'ordre

$$\frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 - \frac{1}{24} (n-1) n (n+1)(3n+2) = \frac{1}{24} n (n+1)(n+2)(3n+1)$$

et de classe

$$\frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 - \frac{1}{8} n (n+1)(n^2+n+2) = \frac{1}{8} (n-1) n (n+1)(n+2) .$$

Si la matrice a $n+1$ colonnes et $n-1$ ou $n+3$ lignes, elle représente une surface réglée; l'ordre de cette surface s'obtient par un calcul assez pénible, que nous réserverons pour un travail ultérieur. Si elle a $n-2$ ou $n+4$ lignes, elle représente un nombre fini de rayons.

Dans le plan, la matrice à $n+1$ colonnes et n lignes représente un nombre de droites égal à

$$\frac{1}{8} n (n+1)(n^2+n+2) ,$$

la matrice à $n+1$ colonnes et $n+2$ lignes en représente

$$\frac{1}{8} (n-1) n (n+1)(n+2) .$$

9. — Appliquons encore ceci à l'exemple $n = 3$.

Les droites situées sur les surfaces cubiques d'un faisceau forment une surface réglée, lieu des trisécantes de la courbe ou du système de courbes formant la base du faisceau [1].

Les droites situées sur les surfaces cubiques d'un réseau forment une congruence d'ordre 11 et de classe 21. Les droites situées sur les surfaces cubiques d'un système linéaire triplement infini forment un complexe du sixième ordre [2].

Si un système doublement ou triplement infini de surfaces cubiques passe par une même courbe gauche, les bisécantes ou les unisécantes de cette courbe font respectivement partie de la congruence ou du complexe dont il vient d'être question, mais ces derniers peuvent contenir d'autres droites. Par exemple, l'intersection de deux surfaces cubiques peut se décomposer en une conique et une courbe du septième ordre c_7 [3]; cette dernière appartient à ∞^2 surfaces cubiques se coupant deux à deux suivant des coniques dont les plans passent par un point fixe P de c_7; la congruence des droites de ces surfaces cubiques est d'ordre 11 et de classe 21 et se compose de la congruence (d'ordre 10 et de classe 21) des bisécantes de c_7 et de la congruence (d'ordre 1 et classe 0) des droites issues de P.

Les droites situées chacune sur ∞^1 surfaces cubiques d'un système quadruplement infini, ou, ce qui revient au même, les droites coupant les surfaces de ce système en des ternes de points d'une involution I_3^2 engendrent une congruence d'ordre 25 et de classe 15.

Dans le plan, il y a 21 droites faisant partie de cubiques

---

[1] J.-C. Kluyver (*Kenmerkende getallen der algebraische ruimtekromme, Comptes rendus de l'Acad. des Sciences d'Amsterdam,* 1889) et J. de Vries (*ibid.,* 1904, p. 264; 1905, p. 29) ont établi que cette surface est d'ordre 42.

[2] Si le systeme de surfaces cubiques considéré est celui des premières polaires d'une surface du 4me degré, on a un complexe sextique lié à cette surface biquadratique; chaque rayon de ce complexe est décrit par un point dont le plan polaire enveloppe un cône de troisième classe.

[3] Courbe indiquée par G.-H. Halphen dans sa classification des courbes gauches algébriques (*Journ. de l'Ecole polytechn.,* 1882, p, 164). étudiée par D. Montesano (*Atti Accad. Torino,* 1892); voir aussi M. Stuyvaert, *Cinq études de Géométrie analytique,* Gand, Van Gœthem, 1908, p. 44.

dégénérées d'un réseau. Les droites faisant partie de cubiques dégénérées d'un système linéaire triplement infini enveloppent une courbe de sixième classe; c'est aussi l'enveloppe des droites qui coupent les courbes du système en des ternes de points d'une involution I_3^2; dans le cas où le système est celui des premières polaires d'une biquadratique, c'est l'enveloppe des droites telles que les droites polaires de tous leurs points forment faisceau. Enfin, il y a 15 droites qui coupent les cubiques d'un système linéaire quadruplement infini en des ternes d'une involution I_3^2 ou qui appartiennent chacune à ∞^1 cubiques dégénérées.

10. — Si l'on opère en coordonnées-plans u_i et si $u_x \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$ est l'équation d'un point, les quantités x_1, x_2, x_3, x_4 sont les coefficients de cette équation; de même y_1, y_2, y_3, y_4 sont les coefficients de l'équation d'un autre point. Toute matrice ou tout déterminant ayant la structure étudiée dans les pages précédentes représente les droites satisfaisant aux équations

$$u_x = 0\,, \qquad u_y = 0\,,$$

les coefficients de ces équations étant liés par les relations exprimées par l'évanouissement de la matrice (ou du déterminant).

Corrélativement, toute matrice à deux séries de variables quaternaires u_i et v_i et telle que, s'évanouissant pour deux séries u et v, elle s'annule aussi pour $\lambda u + \mu v$ et $\lambda' u + \mu' v$, représente un système de droites, intersections des couples de plans

$$u_x = 0\,, \qquad v_x = 0\,,$$

qui obéissent à la loi exprimée par l'évanouissement de la matrice, et l'on est ramené à l'observation qui termine le n° 1.

En soi la remarque actuelle n'a pas grande importance, puisque c'est une simple application du principe de dualité; mais elle se prête à des extensions intéressantes. Car, si $u_1, u_2, \ldots u_k$ et $v_1, v_2, \ldots v_k$ sont les coefficients homogènes

des équations de deux surfaces algébriques, des relations entre u_i et v_i telles que, vérifiées pour u et v, elles le soient pour $\lambda u + \mu v$ et $\lambda' u + \mu' v$, représentent des ensembles de courbes gauches, bases de faisceaux de surfaces.

Par exemple, si x, y, z sont des coordonnées cartésiennes rectangulaires, les relations

$$u_1(x^2 + y^2 + z^2) + u_2 x + u_3 y + u_4 z + u_5 = 0\ ,$$
$$v_1(x^2 + y^2 + z^2) + v_2 x + v_3 y + v_4 z + v_5 = 0\ ,$$
$$\left\| \begin{matrix} \alpha_u^2 & \alpha_u \alpha_v & \alpha_v^2 \\ \beta_u^2 & \beta_u \beta_v & \beta_v^2 \end{matrix} \right\| = 0$$

représentent un ensemble quadruplement infini de cercles, puisque le cercle dans l'espace dépend de six constantes et que la matrice ci-dessus lui impose deux conditions.

11. — Si les coefficients des équations $u_x = 0$, $v_x = 0$ de deux plans sont liés par une seule équation algébrique entière,

$$f(u_1\,,\ u_2\,,\ u_3\,,\ u_4\,,\ v_1\,,\ v_2\,,\ v_3\,,\ v_4) = 0$$

telle que, vérifiée par u et v, elle le soit par $\lambda u + \mu v$ et $\lambda' u + \mu' v$ $(\lambda\mu' - \lambda'\mu \gtrless 0)$, on a la représentation d'un complexe, comme nous l'avons fait observer plus haut.

La forme f est fonction des coefficients des quatre formes linéaires binaires

$$u_i X + v_i Y \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

et s'annule, par hypothèse, en même temps que la même fonction des coefficients de ces quatre formes transformées par la substitution linéaire

$$X = \lambda X_1 + \lambda' Y_1\ , \qquad Y = \mu X_1 + \mu' Y_1\ .$$

Or on sait qu'une telle fonction est un invariant, et tout invariant d'un système de formes binaires linéaires est une somme de produits de déterminants formés par les coefficients de ces formes prises deux à deux; donc f est une fonction des coordonnées $u_i v_k - u_k v_i$ de la droite uv.

Ainsi quand il n'y a qu'une seule fonction f, donnée peut-être sous forme de déterminant, on peut toujours l'exprimer en fonction des coordonnées de la droite; on sait comment A. Clebsch a réalisé cette transformation, et l'on a une traduction analytique du fait, géométriquement évident, qu'un complexe a son ordre égal à sa classe. Au contraire, une matrice rectangulaire (non carrée) n'est pas une quantité; il ne peut être question de la voir se transformer en elle-même multipliée par une puissance du déterminant de la substitution linéaire. L'intérêt de la matrice examinée dans les pages précédentes est précisément que les déterminants extraits de cette matrice ne possèdent pas la propriété d'invariance. Ils peuvent la posséder dans des cas particuliers, notamment quand tous les éléments de la matrice sont exprimés en coordonnées pluckériennes.

Par exemple, si une matrice à l lignes de formes en coordonnées p_{ik} compte l, $l+1$, $l+2$ ou $l+3$ colonnes, elle représente, en général, respectivement un complexe, une congruence, une surface réglée, un nombre fini de rayons. Si les éléments d'une ligne ou de deux colonnes sont linéaires en p_{ik}, tandis que les autres éléments sont des constantes, la matrice à l lignes et $l+1$ colonnes représente une congruence linéo-linéaire. Comme autre exemple, citons la matrice à six éléments linéaires en p_{ik} utilisée par E. Kummer pour la congruence de troisième ordre et classe et de genre deux; nous avons consacré, à cette congruence, une étude toute récente[1]. Mais toutes ces variétés ne sont que de simples cas particuliers en comparaison des matrices à deux séries de variables signalées dans le présent travail. Ces dernières ont, comme mode de représentation, une portée bien supérieure, de la même façon que les variétés annulant des matrices admettent à leur tour, comme cas très particuliers, les intersections complètes de variétés vérifiant des équations algébriques.

12. — Il ne reste qu'un pas à faire pour obtenir de nouvelles matrices analogues à celles qui ont fait le sujet des

[1] M. Stuyvaert, *Sur la congruence de droites de troisième ordre et classe de genre deux*. (*Rend. d. Circolo mat., Palermo*, t. XXX, pp. 239-264).

pages précédentes. Nous venons de voir en effet que la notion d'invariant, si on la définit par la propriété de se conserver dans la substitution linéaire, ne s'étend pas aux matrices. Mais les invariants ont encore d'autres caractères; par exemple un invariant égalé à zéro exprime une propriété que ne trouble pas la substitution linéaire, c'est-à-dire le déplacement des repères; et ceci peut se généraliser.

Imaginons donc qu'une droite d'un espace quelconque, déterminée par deux de ses points x et y, jouisse de certaines propriétés indépendantes du choix de ces points. Si cette circonstance s'exprime par un système d'équations dont chacune, prise isolément, équivaut à une propriété pareille, toutes ces relations se traduisent directement en coordonnées de droites, comme nous l'avons rappelé plus haut, et ne donnent rien de neuf. Au contraire, les propriétés s'exprimant par l'évanouissement de matrices rectangulaires, alors que les déterminants extraits de ces matrices ne s'annulent pas pour des propriétés pareilles, peuvent conduire à des résultats inédits.

Précisons ceci sur un exemple. Considérons la forme binaire a_x^5 et le second groupe polaire d'un point variable $(X_1 . X_2)$ relatif à cette forme,

$$(1) \qquad X_1^2 a_1^2 a_x^3 + 2X_1X_2 a_1 a_2 a_x^3 + X_2^2 a_2^2 a_x^3 = 0 \ .$$

Pour que tous ces ternes de points x forment une involution I_3^1, de troisième ordre et de rang un, il faut que l'équation d'un terne arbitraire soit une combinaison linéaire des équations de deux ternes fixes, donc qu'il existe une relation linéaire identique entre les formes $a_1^2 a_x^3$, $a_1 a_2 a_x^3$, $a_2^2 a_x^3$; et cette condition suffit, puisque l'on peut alors remplacer l'une de ces trois formes par une combinaison linéaire des deux autres. Ainsi donc, quand on a

$$(2) \qquad \left\| \begin{matrix} a_1^5 & a_1^4 a_2 & a_1^3 a_2^2 & a_1^2 a_2^3 \\ a_1^4 a_2 & a_1^3 a_2^2 & a_1^2 a_2^3 & a_1 a_2^4 \\ a_1^3 a_2^2 & a_1^2 a_2^3 & a_1 a_2^4 & a_2^5 \end{matrix} \right\| = 0 \ ,$$

les seconds systèmes polaires de tous les points du support par rapport au groupe de cinq points a_x^5 sont les ternes d'une involution I_3^1, *et cette propriété est indépendante des repères*[1].

Supposons à présent que a_x^5 soit une forme quaternaire, que $a_x^5 = 0$ représente donc la surface générale du cinquième ordre. La droite xy la rencontre en cinq points correspondant aux racines de l'équation en k,

$$a_x^5 + 5k a_y a_x^4 + 10k^2 a_y^2 a_x^3 + 10k^3 a_y^3 a_x^2 + 5k^4 a_y^4 a_x + k^5 a_y^5 = 0 .$$

Les conditions pour que ce groupe de cinq points jouisse de la propriété signalée ci-dessus sont indépendantes des points x et y choisis sur la droite, et les relations qui expriment ces conditions

$$(3) \qquad \left\| \begin{matrix} a_x^5 & a_x^4 a_y & a_x^3 a_y^2 & a_x^2 a_y^3 \\ a_x^4 a_y & a_x^3 a_y^2 & a_x^2 a_y^3 & a_x a_y^4 \\ a_x^3 a_y^2 & a_x^2 a_y^3 & a_x a_y^4 & a_y^5 \end{matrix} \right\| = 0 .$$

représentent une congruence de droites.

13. — Il convient de généraliser l'exemple précédent. La matrice (2), suivant qu'on l'envisage dans le sens des lignes ou des colonnes, exprime, quand elle s'annule, que, pour la forme binaire a_x^5, les ternes polaires des points du support forment un système linéaire simplement infini; ou que les équations des couples polaires des mêmes points, au lieu de pouvoir s'écrire au moyen de trois d'entre elles, sont des combinaisons linéaires de deux d'entre elles seulement, donc que ces couples forment un système linéaire simplement infini ou une involution I_2^1 [2].

Si la matrice (2) a tous ses premiers mineurs nuls, on

[1] S'il fallait éviter quelque ambiguïté dans le développement d'un calcul, on remplacerait, dans deux lignes de la matrice (2), les symboles a par les symboles équivalents b, c.

[2] Dans ce cas, 3 points d'un même terne ont toujours même couple polaire et vice-versa. On sait aussi que a_x^5 peut être ramené, en général, à une somme de 3 puissances cinquièmes, donc, par substitution linéaire, à la forme $\alpha x_1^5 + (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)^5 + \beta x_2^5$ où λ_1, λ_2, α, β sont

constate que l'on a aussi

$$\left\|\begin{matrix} a_1^5 & a_1^4 a_2 & a_1^3 a_2^2 & a_1^2 a_2^3 & a_1 a_2^4 \\ a_1^4 a_2 & a_1^3 a_2^2 & a_1^2 a_2^3 & a_1 a_2^4 & a_2^5 \end{matrix}\right\| = 0\ ;$$

ceci exprime que les quaternes polaires de tous les points du support coïncident entre eux, de même que tous les points polaires, ou encore que a_x^5 représente cinq points confondus.

Si l'on part de la forme binaire a_x^4, on doit considérer la condition pour que les couples polaires forment une involution, condition équivalente à l'égalité connue

$$\begin{vmatrix} a_1^4 & a_1^3 a_2 & a_1^2 a_2^2 \\ a_1^3 a_2 & a_1^2 a_2^2 & a_1 a_2^3 \\ a_1^2 a_2^2 & a_1 a_2^3 & a_2^4 \end{vmatrix} = 0$$

laquelle exprime aussi [1] que les quatre points a_x^4 sont harmoniques; ou les conditions

$$\left\|\begin{matrix} a_1^4 & a_1^3 a_2 & a_1^2 a_2^2 & a_1 a_2^3 \\ a_1^3 a_2 & a_1^2 a_2^2 & a_1 a_2^3 & a_2^4 \end{matrix}\right\| = 0$$

qui se réalisent quand les quatre points a_x^4 sont confondus.

Lorsque l'on part de la forme a_x^3 ou a_x^2 on rencontre une seule matrice ou un déterminant qui s'annule quand les points a_x^3 ou a_x^2 sont confondus.

---

différents de 0. Mais alors la matrice (2) devient, en soustrayant la 2e colonne, multipliée par des constantes convenables, des 3 autres colonnes,

$$\left\|\begin{matrix} \alpha & \lambda_1^4 \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^3 \lambda_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^2 \lambda_2^3 & 0 & \beta \end{matrix}\right\| ;$$

or un déterminant extrait de cette matrice se réduit à $\alpha\beta\lambda_1^3\lambda_2^2$ et ne peut s'annuler tant que la forme a_x^5 comprend 3 puissances cinquièmes distinctes. Par contre, si elle se ramène à 2 puissances cinquièmes, ou à $\alpha x_1^5 + \beta x_2^5$, tous les éléments de la 2e ligne sont nuls dans la matrice (2). Donc l'évanouissement de cette matrice exprime que $a_x^5 = 0$ se ramène à une équation binôme.

[1] Voir Salmon-Bazin, *Algèbre supérieure*, p. 173.

Plus généralement, si a_x^{2p+1} est une forme d'ordre impair, la matrice

$$\left\|\begin{matrix} a_1^{2p+1} & a_1^{2p}a_2 & \dots & a_1^p a_2^{p+1} \\ a_1^{2p}a_2 & a_1^{2p-1}a_2^2 & \dots & a_1^{p-1}a_2^{p+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{p+1}a_2^p & a_1^p a_2^{p+1} & \dots & a_2^{2p+1} \end{matrix}\right\|$$

s'annule quand les groupes polaires d'ordre p forment un système linéaire $p-1$ fois infini, donc une involution I_{p+1}^{p-1}; en même temps les groupes polaires d'ordre $p+1$ forment une involution I_p^{p-1}. De même, en prolongeant vers la droite par une nouvelle colonne formée suivant la même loi et en supprimant la dernière ligne, on a une matrice qui s'annule quand les groupes polaires d'ordre $p-1$ ou $p+2$ forment des systèmes $p-2$ fois infinis, donc des involutions I_{p+2}^{p-2} ou I_{p-1}^{p-2}. On continue, de proche en proche, jusqu'à la matrice à 2 lignes et $2p+1$ colonnes qui s'annule quand les $2p+1$ points a_x^{2p+1} sont confondus.

On a des énoncés analogues pour la forme d'ordre pair qui donne un déterminant ou une matrice dans laquelle la différence entre le nombre de lignes et de colonnes est pair.

Les propriétés exprimées par l'évanouissement de toutes ces matrices sont *invariantes*[1].

14. — Nous allons chercher l'ordre et la classe de la congruence de droites à laquelle donne naissance la matrice à $p+1$ lignes et $p+2$ colonnes de formes *quaternaires* en x et y,

$$\left\|\begin{matrix} a_x^{2p+1} & a_x^{2p}a_y & \dots & a_x^p a_y^{p+1} \\ a_x^{2p}a_y & a_x^{2p-1}a_y^2 & \dots & a_x^{p-1}a_y^{p+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_x^{p+1}a_y^p & a_x^p a_y^{p+1} & \dots & a_y^{2p+1} \end{matrix}\right\|.$$

[1] On peut imaginer d'autres propriétés invariantes annulant des matrices, notamment si l'on part de formes algébriques simultanées. Nous y reviendrons dans un travail ultérieur.

L'ordre μ s'obtient en supposant les x constants et les y variables, et en appliquant la formule générale[1] relative à une matrice dont l'élément situé dans la i^{me} ligne et la k^{me} colonne est de degré $n_i + q_k$,

$$\mu = \Sigma n_1 n_2 + \Sigma n^2 + \Sigma n \Sigma q + \Sigma q_1 \Sigma q_2 \, .$$

Ici les quantités n sont égales à 0, 1, 2, ... p, et les quantités q à 0, 1, 2, ... $p+1$, donc on a successivement

$$\Sigma q_1 q_2 = \Sigma n_1 n_2 + (p+1)(1+2+\ldots+p) = \Sigma n_1 n_2 + \frac{1}{2}p(p+1)^2 \, ,$$

$$\mu = 2\Sigma n_1 n_2 + \frac{1}{2}p(p+1)^2 + \frac{1}{6}p(p+1)(2p+1) + \frac{1}{4}p(p+1)^2(p+2) \; ;$$

mais on a vu plus haut (n° 8)

$$\Sigma n_1 n_2 = \frac{1}{24}(p-1)p(p+1)(3p+2) \; ;$$

d'où, après quelques calculs,

$$\mu = \frac{1}{2}p(p+1)^2(p+2) \, .$$

Pour avoir la somme $\mu + \nu$ de l'ordre et de la classe, on fait parcourir aux points x et y deux ponctuelles en ligne droite, définies chacune par un paramètre λ ou λ', d'après la méthode du n° 8. Tous les éléments de la matrice à $p+1$ lignes et $p+2$ colonnes sont d'ordre $2p+1$ en λ et λ', et la matrice s'annule pour

$$\frac{1}{2}(p+1)(p+2)(2p+1)^2$$

systèmes de valeurs, mais il faut défalquer les points à l'infini des axes des λ et des λ', et la multiplicité de chacun de ces points à l'infini donne lieu à un calcul identique à celui qui a fourni l'ordre μ, donc

$$\mu + \nu = \frac{1}{2}(p+1)(p+2)(2p+1)^2 - 2\mu \, ,$$

$$\nu = \frac{1}{2}(p+1)(p+2)(2p+1)^2 - 3\mu \, ,$$

[1] Voir M. STUYVAERT, *Cinq études de Géométrie analytique*, Gand, Van Gœthem, 1908, p. 10.

d'où, en introduisant la valeur de μ, après quelques calculs,

$$\nu = \frac{1}{2}(p+1)(p+2)(p^2+p+1).$$

Pour $p=1$, c'est-à-dire pour la surface du troisième ordre, on trouve $\mu=6$, $\nu=9$; ces nombres sont l'ordre et la classe de la congruence des droites qui touchent la surface en trois points confondus, ou des tangentes inflexionnelles des sections planes.

Pour $p=2$, c'est-à-dire pour la surface du cinquième ordre, on a $\mu=36$, $\nu=42$. Dans ce cas on a encore une autre matrice à deux lignes et cinq colonnes qui s'annulent pour un nombre fini de rayons.

Pour les surfaces d'ordre $2p$, on a un complexe d'ordre $2p+(2p-2)+\ldots+2=p(p+1)$ annulant un déterminant et, dans le cas particulier de $p=2$, le complexe sextique connu des rayons qui rencontrent la surface en quatre points harmoniques. Il faut ensuite, mais ceci est réservé pour un travail ultérieur, étudier la surface réglée annulant une matrice qui compte deux colonnes de plus que de lignes.

15. — On ne doit pas s'exagérer la portée des observations qui précèdent. Une matrice invariante, à deux séries de variables x et y, s'annule pour un système de droites alors que les déterminants extraits de cette matrice ne représentent pas des complexes : il faut en conclure seulement qu'il est plus aisé d'étudier ce système de droites avec deux séries de variables, mais non pas qu'il est impossible de passer à une représentation en coordonnées pluckériennes. En d'autres termes, ces congruences, ces surfaces réglées n'échappent pas à la méthode générale consistant à regarder les quantités p_{ik} ou $x_iy_k - x_ky_i$ comme des coordonnées homogènes d'un point d'une hyperquadrique dans l'espace à cinq dimensions, et à étudier les variétés algébriques situées sur cette hyperquadrique. Car l'évanouissement d'une matrice en x et y signifie que les éléments de ses n colonnes vérifient une même relation linéaire dont les coefficients sont par exemple μ_1, μ_2, ... ; à ces n équations on peut joindre

les cinq suivantes,

$$p_{12} : (x_1 y_2 - x_2 y_1) = p_{13} : (x_1 y_3 - x_3 y_1) = \dots$$

et regarder les μ, les x et les y comme des paramètres ; on a un système de relations qui représente une ou plusieurs variétés algébriques et, d'après les recherches de L. Kronecker, chacune de celles-ci peut être représentée par des équations, en nombre égal ou inférieur à six, ne contenant que les six variables homogènes p_{ik}.

M. Stuyvaert (Gand).

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sur une question élémentaire de maximum.

1. — Pour déterminer élémentairement le maximum de certaines fonctions, on fait usage du théorème :

A. *Le produit de* n *nombres positifs, dont la somme est constante, est maximum* LORSQUE *les nombres sont égaux entre eux.*

Avec la démonstration ordinaire on entend prouver que : *si le produit est maximum, les nombres ne peuvent pas être non égaux.* Le mot LORSQUE du théorème A exprime donc que : *si le produit est maximum, les facteurs sont égaux.* Mais alors le théorème A est faux. Que l'on considère, par exemple, les produits

$$(6 - \sin x)(2 + \sin x) \ , \quad (3 - x^2 + 6x)(22 + x^2 - 6x) \ ,$$
$$(1 + x)(2 + x)(3 - 2x)$$

à facteurs positifs (dans les intervalles 0 à π, $3 - 2\sqrt{3}$ à $3 + 2\sqrt{3}$, -1 à 1,5) et de somme constante, qui passent par un maximum pour

$$x = \frac{\pi}{2} \ , \qquad x = 3 \ , \qquad x = \frac{\sqrt{39} - 3}{6}$$

sans que les facteurs soient égaux.

Le théorème A doit être énoncé exactement sous la forme suivante : *Si* n *nombres positifs variables ont somme* (s) *constante, et si en un point de leur champ de variation ils prennent une même valeur* (s : n), *alors en ce point leur produit est maximum,* comme

cela résulte de la relation, bien connue,

$$u_1 u_2 \ldots u_n \lesseqgtr \left(\frac{u_1 + u_2 + \cdots u_n}{n}\right)^n ,$$

mais il n'est point permis de dire : *si le produit est maximum, les facteurs sont égaux.*

Pour deux facteurs on a : *Si deux nombres positifs variables ont somme constante, alors leur produit est* MAXIMUM *ou* MINIMUM, *selon que la valeur absolue de leur différence est* MINIMUM *ou* MAXIMUM, c'est une conséquence de l'identité

$$4u_1u_2 = (u_1 + u_2)^2 - (u_1 - u_2)^2 .$$

2. — Soit $f(x)$ une fonction de x et a, b, c, m, n, p des constantes. Voici un procédé élémentaire dont on fait usage (au moins pour $f(x)$ fonction linéaire de x) pour déterminer la valeur de x qui rend maximum le produit

$$y = (a + mf)(b + nf)(c + pf) .$$

Soient α, β des constantes positives telles que

$$(1) \qquad m + n\alpha + p\beta = 0 ;$$

on dit alors, en appliquant le théorème A, que $\alpha\beta y$ est maximum (et y aussi) lorsque

$$(2) \qquad a + mf = \alpha(b + nf) = \beta(c + pf) ;$$

d'après (1) et (2), et pour $b + nf$, $c + pf$ non nuls, on obtient l'équation

$$(3) \quad m(b + nf)(c + pf) + n(c + pf)(a + mf) + p(a + mf)(b + nf) = 0 ,$$

qui détermine l'x qui rend maximum y.

Si $f(x)$ est une fonction linéaire de x, le procédé que nous venons d'indiquer, bien qu'établi sur le théorème faux A, donne un résultat exact, car $\frac{dy}{dx}$ est, quel que soit $f(x)$, le produit de $\frac{df}{dx}$ pour le premier membre de l'égalité (3). Mais en général le procédé est faux, comme le montre, par exemple, le produit

$$y = \sin x(r + \sin x)(r - \sin x)$$

qui devient maximum pour $\sin x = \frac{r}{3}\sqrt{3}$ (application du procédé précédent) si $r \lesseqgtr \sqrt{3}$, et pour $\sin x = 1$ si $r > \sqrt{3}$.

Les questions élémentaires de maximum et minimum doivent donc être analysées encore dans leurs fondements.

C. Burali-Forti (Turin).

CHRONIQUE

Commission internationale de l'enseignement mathématique.

Allemagne. — Nous avons déjà donné, dans le numéro précédent (p. 359-361), la liste des rapports qui formeront les quatre premiers volumes des *Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland,* dont 9 fascicules ont déjà parus. Le cinquième volume sera consacré à *l'enseignement primaire.* Il débutera par une *Introduction* de M. F. Klein et contiendra notamment deux études ayant pour objet, l'une l'enseignement de l'Arithmétique, l'autre l'enseignement de la Géométrie, puis un exposé de l'organisation des écoles primaires et primaires supérieures et des séminaires de maîtres.

V. Band. *Die Mathematik an den Volksschulen.* Mit einem Einführungswort von F. Klein.

1. Lietzmann, W., *Stoff und Methode des Rechenunterrichtes auf Grund der Lehrbücher.* [In Vorbereitung].
2. Lietzmann, W., *Stoff und Methode des Raumlehreunterrichtes auf Grund der Lehrbücher.* [In Vorbereitung].
3. Lietzmann, W., *Die Organisation der Volksschulen, gehobenen Volksschulen, Präparandenanstalten, Seminare usw.* in *Preussen.* [In Vorbereitung].

Weitere Hefte bleiben vorbehalten.

Autriche. — La sous-commission autrichienne vient de faire paraître les fascicules 4 et 5 de ses *Berichte über den mathematischen Unterricht in Oesterreich* (Verlag Hölder, Wien). L'un comprend trois rapports consacrés, le premier, à l'enseignement mathématique dans les lycées de jeunes filles, le second, à la préparation pratique des candidats à l'enseignement secondaire supérieur, et le troisième, à l'enseignement mathématique dans les écoles professionnelles (64 p.).

Le fascicule 5 contient le rapport de M. le Prof. Emm. Czuber concernant les *Ecoles techniques supérieures.*

4. Heft. *Der mathematische Unterricht an den Mädchenlyzeen.* Von Dr Th. Konrath.

Die praktische Vorbildung für das höhere Lehramt in Oesterreich. Von Dr Jos. Loos.

Der mathematische Unterricht an den gewerblichen Lehranstalten. Von Schulrat Wilhelm Rulf.

5. Heft. *Der mathematische Unterricht an den technishen Hochschulen,* Von Prof Emm. Czuber (39 p.).

Le rapport de M. Freud sur les manuels de mathématiques est à l'impression.

Russie. — Les rapports de la sous-commission russe seront rédigés en français. Deux fascicules viennent de paraître.

1. *Rapport sur l'enseignement mathématique dans les Universités, les Ecoles techniques supérieures et quelques-unes des Ecoles militaires.*
2. *Rapport sur l'enseignement mathématique dans les Ecoles de Finlande.*

Ce dernier a été établi par une commission instituée par le Sénat impérial de Finlande. Il traite des différents établissements d'instruction publique, depuis les écoles primaires jusqu'à l'Ecole technique supérieure et à l'Université Alexandre à Helsingfors.

Suède. — La sous-commission suédoise vient de publier un quatrième fascicule. Il contient le rapport sur l'enseignement mathématique dans les écoles supérieures de jeunes filles, par Mlle A. Rönström et Dr O. Josephson (23 p.) :

I. *Der mathematische Unterricht an den höheren Mädchenschulen Schwedens,* von Anna Rönström, Direktorin der höh. Mädchenschule in Lund.

II. *Die Mathematik am höheren Lehrerinnenseminar,* von Direktor Dr O. Josephson.

L'*Enseignement mathématique* donnera un aperçu des rapports des sous-commissions nationales. Il publiera, dans son prochain numéro, une première série de courts résumés.

5me Congrès international des mathématiciens.

On sait que, suivant une résolution votée à Rome, en 1908, le prochain Congrès se tiendra en Angleterre, à Cambridge, en août 1912, et que la *Cambridge Philosophical Society* a été chargée d'organiser le Congrès avec l'appui de la *London Mathematical Society.* Le comité local du Congrès vient d'être constitué à Cambridge, sous la présidence de Sir George Darwin. M. le Professeur E. W. Hobson a été désigné comme secrétaire-général du prochain Congrès.

1er Congrès international de l'enseignement technique supérieur.

Bruxelles, septembre 1910.

Le premier Congrès international de l'enseignement technique supérieur s'est tenu à Bruxelles du 9 au 11 septembre 1910, sous le patronage du Gouvernement belge. Les principaux Etats avaient répondu à l'invitation du Comité d'organisation en se faisant représenter par des délégués officiels.

Un certain nombre de questions avaient été annoncées en temps utile pour être mises en discussion au Congrès. Les travaux avaient été repartis sur quatre sections :

Section I : Rapports sur les plans d'études et l'organisation de l'enseignement.

Section II : Rapports sur l'organisation des exercices pratiques, des visites collectives d'usines et des stages industriels.

Section III : Rapports sur l'organisation des missions à l'étranger d'étudiants ou de jeunes ingénieurs. Bourses de voyage. Echange d'élèves.

Section IV : Rapports sur les instituts formant les ingénieurs commerçants et sur les instituts formant des fonctionnaires coloniaux.

Les séances se sont bornées à des discussions générales sans émettre de vœux. Nous aurons sans doute l'occasion de revenir sur les travaux de la première section lorsque les rapports seront imprimés.

Dans sa séance de clôture le Congrès a décidé la création d'un *Bureau permanent international de l'Enseignement technique supérieur* (proposition de M. Delafond, directeur de l'Ecole des Mines de Paris). Le Comité d'organisation du Congrès a été chargé de l'étude des voies et moyens avec le concours des groupements des différents pays.

La Commission internationale de l'enseignement mathématique était représentée par plusieurs de ses membres.

Association britannique pour l'Avancement des Sciences.

Discours d'ouverture de la Section des Sciences mathématiques et physiques.

La *British Association for the Advancement of Science* s'est réunie cette année à *Sheffield*, le 31 août et les jours suivants. La Section des Sciences mathématiques et physiques était présidée par M. E.-W. Hobson, professeur à l'Université de Cambridge.

M. Hobson a prononcé, comme discours d'ouverture, une remar-

quable conférence *sur les tendances modernes en mathématiques,* dont nous résumons brièvement les principaux passages.

Le conférencier commence par le *rôle des mathématiques*, il expose la position relative des mathématiques et des sciences physiques et en conclut qu'il ne faut pas trop éviter les sujets théoriques en mathématiques en faveur des applications, alors même que leur utilité n'est pas immédiatement évidente, car la théorie amène très souvent à des applications totalement imprévues.

En ce qui concerne la *définition des mathématiques*, M. Hobson estime que la recherche d'une définition formelle, complète et délimitant rigoureusement le domaine de cette science, est très complexe et tend à le devenir de plus en plus ; à défaut d'une définition, il donne une description générale des mathématiques pures modernes, comme étant une science qui s'occupe des formes dans le sens le plus général de ce mot, c'est-à-dire embrassant les formes algébriques, géométriques, les relations fonctionnelles, etc.

Au point de vue de la *certitude en mathématiques* M. Hobson rappelle que les vérités mathématiques ont pendant longtemps été considérées comme des vérités absolues ou tout au moins comme le plus haut degré possible de certitude humaine. Il existe et a existé cependant de tout temps des diversités d'opinion entre les mathématiciens, principalement au sujet des principes fondamentaux des mathématiques. Afin de séparer le domaine des mathématiques de celui de la philosophie, une barrière d'axiomes et postulats artificiels avait été dressée, barrière qui devait être franchie par ceux qui veulent remonter aux origines elles-mêmes et dans la délimitation de laquelle on peut trouver une des causes des principales différences d'opinion entre les mathématiciens.

Le *critérium d'une démonstration rigoureuse* occupe ensuite le conférencier. Pendant des siècles, ce furent les éléments de géométrie d'Euclide qui fournirent une démonstration type, mais dans le courant du XIXme siècle, les idées à ce sujet ont subi une transformation radicale ; on a reconnu l'insuffisance et l'arbitraire des axiomes et postulats admis jusqu'alors comme fondamentaux. Des mathématiciens tels que Cauchy, Riemann, Weierstrass et G. Cantor travaillèrent à reconstituer l'analyse mathématique et exprimèrent les limites et les restrictions de validité des théorèmes généraux et des opérations analytiques ordinaires.

Passant aux *méthodes de recherche mathématique,* M. Hobson est d'avis que, variant considérablement d'un mathématicien à un autre, elles ne sont cependant jamais uniquement déductives, mais empruntent toujours quelque chose à la psychologie. Très souvent même, les découvertes mathématiques ne sont mises sous une forme déductive que longtemps après avoir été faites.

Une théorie complète et même la démonstration d'un seul théo-

rème, ne sont pas plus identiques à un assemblage de syllogisme qu'une mélodie n'est identique à la simple juxtaposition des notes musicales employées pour sa composition.

M. Hobson termine par la question de *l'enseignement des mathématiques;* il insiste sur le fait qu'une connaissance parfaite des principes mathématiques est essentielle pour faire des mathématiques un instrument utile à l'ingénieur et au physicien, auxquels il ne suffit pas de connaître des procédés de calcul. Il était à craindre, l'expérience l'a prouvé, que les étudiants ingénieurs et physiciens ne considèrent les mathématiques comme une réunion de formules et règles permettant de résoudre certains problèmes des sciences physiques. Une telle conception devait fatalement rendre l'étude des mathématiques inutile, les élèves étant alors inaptes à appliquer leurs connaissances à des problèmes nouveaux ne rentrant pas dans les problèmes types étudiés.

M. Hobson est opposé aux essais tendant à fixer d'une manière rigide et absolue, l'ordre ou la manière de traiter les divers sujets; il ne veut pas qu'on échappe à la tyrannie d'Euclide pour se mettre sous une autre domination ; il estime que le point de vue éducatif doit avoir la première place, avant l'agrément des examinateurs ou même la précision dans le résultat des examens.

En ce qui concerne le rôle que doivent jouer l'observation et le raisonnement dans l'enseignement, il conclut que « la proportion entre le facteur observation ou intuition et le facteur logique doit varier avec les besoins et les facultés intellectuelles des élèves et qu'une grande liberté de jugement à cet égard doit être laissée au maître ».

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Secondaire Public Français.

Nous enregistrons avec plaisir la fondation d'une *Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Secondaire Public en France*. Cette Association a pour but l'étude des questions intéressant l'enseignement des mathématiques et la défense des intérêts professionnels de ses membres. Elle est ouverte à tous les professeurs en fonctions, en congés ou retraités. Elle se propose d'instituer ou d'encourager des réunions, des discussions, des enquêtes sur l'enseignement des mathématiques. Elle publiera un Bulletin paraissant au moins trois fois par an.

L'Association se réunira en Assemblée générale ordinaire au moins une fois par an, aux vacances de Pâques.

La cotisation annuelle a été fixée à deux francs. L'Association est administrée par un Comité central composé d'un président, de deux vice-présidents, de deux secrétaires et d'un trésorier, et par un Bureau de vingt membres.

Le *Siège social* de l'Association est à la Bibliothèque de l'Enseignement public, 41, rue Gay-Lussac, Paris.

Dans son assemblée du 30 octobre 1910, l'Association a composé son *Comité central* comme suit :

MM. Bonin (Saint-Germain-en-Laye) ;
Chalory (Carnot) ;
Commanay (Compiègne) ;
Delcourt (Bar-le-Duc) ;
Mme Ficquet (Molière) ;
MM. Gillant (Boulogne-sur-Mer) ;
Grévy (Saint-Louis) ;
Huard (Henri IV) ;
Lemaire (Arras) ;
Lesgourgues (Henri IV) ;
MM. Marotte (Charlemagne) ;
Meillecœur (Vendôme) ;
Montel (Buffon) ;
Nienecker (Evreux) ;
Sainte-Laguë (Douai) ;
Mme Salomon (Lamartine) ;
M. Serrier (Louis-le-Grand) ;
Mme Vimeux (Saint-Germain-en-Laye) ;
MM. Vinet (Saintes) ;
Weill (Rollin).

En plus, le délégué des mathématiciens au Conseil supérieur de l'Instruction publique fait partie de droit du Comité central ; ce délégué est actuellement M. Blutel (Saint-Louis).

Le Comité central se réunira sous peu pour procéder à l'élection de son Bureau. Le Bureau provisoire était composé de MM. Blutel, président ; Marotte et Sainte-Laguë, secrétaires.

Voici les premières questions qui vont être mises à l'étude :

I. L'enseignement des mathématiques dans la classe de mathématiques élémentaires.

II. L'enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires de jeunes filles.

Congrès des mathématiciens allemands.

Réunion de Königsberg, septembre 1910.

La Réunion des mathématiciens allemands (*Deutsche Mathematiker-Vereinigung*) a eu lieu cette année à Königsberg, du 18 au 24 septembre, en même temps que le 82e Congrès des naturalistes et médecins allemands. Les sections du Congrès intéressant particulièrement les mathématiciens étaient au nombre de trois : I. *Mathématiques et astronomie* ; II. *Physique* ; X. *Enseignement des sciences mathématiques et physiques.*

La *section mathématique* a tenu quatre séances présidées successivement par MM. Fr. Meyer, Hilbert, v. Mangoldt et Schoenflies. Les communications présentées étaient au nombre de 17. En voici la liste :

R. Fueter (Basel), Die Klassenkörper der komplexen Multiplikation und ihr Einfluss auf die Entwicklung der Zahlentheorie.

D. Hilbert (Göttingen), Ueber diophantische Differentialgleichungen.

A. Haar (Göttingen), Beispiele und Ergänzungen zu dem vorigen Vortrage.
P. Koebe (Göttingen), Ueber die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Bereiche.
E. Müller (Wien), Einige Gruppen von Sätzen über orientierte Kreise in der Ebene.
F. Meyer (Königsberg), Ueber eine Verallgemeinerung des Krümmungsbegriffes.
H. Liebmann (Leipzig), Ueber die elementaren Konstruktionen der nichteuklidischen Geometrie.
L. Bieberbach (Göttingen), Ueber die Bewegungsgruppen der euklidischen Räume.
F. Engel (Greifswald), Eine Verallgemeinerung der infinitesimalen Paralleltransformation.
E. Papperitz (Freiberg), Ueber das Zeichnen im Raume (mit Vorführung kinodiaphragmatischer Projektionsapparate).
A. Schoenflies (Königsberg), Ueber den Begriff der Definition.
A. Witting (Dresden), Mitteilungen über einige Manuskripte Newtons.
F. Meyer (Königsberg), Zur Theorie der Drehungen.
W. Krebs (Grossflottbeck), Neue Entwicklungen der Spektralphotographie der Sonne, bestätigt durch teleskopische Beobachtung mit einem Dreizöller.
O. Toeplitz (Göttingen), Einige Anwendungen der Theorie der unendlich vielen Veränderlichen.
H. Weyl (Göttingen), Ueber Reihenentwicklungen und Integraldarstellungen willkürlicher Funktionen.
A. Sommerfeld (München), Darstellung der Greenschen Funktion für die Schwingungsgleichung mittels der Eigenfunktionen bei einem beliebigen Gebiet.

Deux séances communes avaient été organisées avec la section de *Physique* ; elles étaient présidées par MM. Engel et Volkmann. La première était consacrée à la mémoire de deux illustres professeurs de l'Université de Königsberg, l'astronome Bessel (1784-1846) et le physicien Franz Neumann (1798-1895). MM. A. v. Brunn, O. Eggert et J. Sommer ont parlé de Bessel comme astronome, comme géodésien et comme mathématicien ; puis MM. A. Wangerin et P. Volkmann ont rappelé les travaux de Neumann, l'un pour les mathématiques, l'autre pour la physique.

La seconde séance était destinée à une conférence de M. W. v. Ignatowsky (Berlin) *sur le principe de relativité*.

La *section d'enseignement* comprenait les communications suivantes concernant les mathématiques :

B. Hoffmann (Rawitsch), Die mathematische Erd- und Himmelskunde in Prima.
A. Schülke (Königsberg), Integralrechnung im Unterricht.
Witting (Dresden), Ueber stereometrische Konstruktionen.
P. Zühlke (Grunewald), Ueber den Unterricht in der darstellenden Geometrie. (Mit Demonstrationen an deutschen und österreichischen Schülerzeichnungen).

Séance administrative présidée par M. Engel, président de la *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*. Après avoir rappelé la mémoire des membres décédés depuis la dernière assemblée, — ce sont MM. Lüroth, Weingarten, Weinmeister et Winkler — le président donne un aperçu de l'état des différentes publications entreprises ou encouragées par l'Association :

1° La *liste des mémoires d'Euler*, établie par ordre chronologique par M. Eneström, formera le tome IV des suppléments au *Jahresbericht*. Un premier fascicule est paru ; la seconde et dernière partie est sous presse.

2° *Encyclopédie*. Depuis un an trois fascicules ont été publiées pour l'édition allemande et deux pour l'édition française.

3° *Œuvres de Schröder*. M. Eugène Müller continue la préparation de la publication.

Puis viennent les rapports des différentes commissions :

Commission de statistique de l'enseignement mathématique en Allemagne. On rappelle l'article de M. Schœnflies publie dans le *Jahresbericht* (n° de janvier 1910).

Commission bibliographique. M. F. Müller a publié dans le fascicule juillet-août, une liste d'anciens ouvrages de mathématiques (1482-1550) que l'on trouve dans la Bibliothèque de la Ville, à Francfort s/M.

Commission Euler. Elle est composée de MM. Krazer et Stäckel qui ont été appelés à faire partie du Comité de Rédaction (voir dans ce fascicule, p. 527), la communication faite à Bâle par M. Rudio.

Comité allemand de l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles. M. Klein rapporte. La Commission continue à suivre le mouvement de réforme dans les établissements moyens et supérieurs; on prévoit d'autre part que d'importantes questions concernant l'enseignement primaire vont être mises à l'ordre du jour.

Commission internationale de l'enseignement mathématique. M. Klein donne un aperçu de la marche des travaux de la Commission et en particulier de la Sous-Commission allemande. Celle-ci a déjà publié, comme on sait, neuf monographies. L'ensemble de ces rapports donnera pour la première fois un aperçu complet de l'état de l'enseignement mathématique en Allemagne.

La Société procède ensuite à une revision de ses statuts et à une réélection partielle de son Comité. Dans une réunion du Comité, celui-ci a désigné comme président M. Schur (Strasbourg), du 1er octobre 1910 au 30 septembre 1911. Ajoutons, pour terminer, que l'effectif des membres se monte à 761.

La prochaine réunion aura lieu à *Carlsruhe*, en septembre 1911.

Société mathématique suisse.

Première Réunion ; Bâle, septembre 1910 [1].

La Société mathématique suisse a tenu sa première séance ordinaire à Bâle, le 6 septembre 1910, au Bernoullianum, sous la présidence de M. le prof. R. Fueter (Bâle). Elle siégeait en même temps comme section mathématique de la 93e assemblée annuelle de la Société helvétique des Sciences naturelles. Neuf communications figuraient à l'ordre du jour ; en voici le résumé :

1. — M. Grossmann (Zurich) donne la *solution géométrique d'un problème de photogrammétrie.* Dans le rapport que M. Finsterwalder a fait sur la photogrammétrie, à l'Association des mathématiciens allemands, il démontre qu'un objet est déterminé à son échelle près par quatre photographies. La reconstruction de l'objet paraît cependant irréalisable, car il faut trouver un plan qui coupe quatre paires de droites en huit points situés sur une conique. On montre géométriquement que la double infinité de plans qui coupent trois paires de droites en six points situés sur une conique forme une surface de 5e classe. L'infinité simple des plans qui coupent trois paires de droites et une septième droite en sept points situés sur une conique enveloppe une surface développable de 19e classe. Les plans qui coupent les huit droites en huit points situés sur une conique sont les plans tangents communs à cette développable et à la surface de 5e classe. Il y en a 56, abstraction faite des fausses solutions. M. Finsterwalder a donc raison de penser qu'on ne pourra guère trouver de solution pratique du problème. — Discussion : MM. Kollros et Fueter.

2. — M. Fueter (Bâle) parle de la *classification des nombres algébriques et des idéaux.* On appelle *nombres algébriques* les nombres α qui satisfont à une équation algébrique à coefficients rationnels $f(\alpha) = 0$. Ils forment un ensemble dénombrable. On les répartit en domaines, d'après les principes suivants :

I. Domaines dont tous les nombres se reproduisent par addition, soustraction, multiplication et division. On les appelle *corps*. Les *diviseurs* d'un corps sont les domaines contenus dans le corps et jouissent de la même propriété. On démontre que tous les nombres d'un corps peuvent être représentés comme fonction rationnelle à coefficients rationnels d'un seul nombre nommé quantité primitive.

II. Domaines dont les nombres se reproduisent par addition, soustraction et multiplication. On les appelle *anneaux* ou *ordres*. Les ordres les plus importants sont les *nombres entiers* d'un corps.

---

[1] Voir *L'Ens. math.* du 15 septembre 1910, p. 422-423.

III. Domaines dont les nombres se reproduisent par addition et soustraction. M. Dedekind les appelle des *modules*.

IV. Domaines dont les nombres se reproduisent par multiplication et division. M. Weber les appelle des *groupes de nombres* et M. Fueter des *rayons*. Un rayon contient toujours l'unité.

Pour avoir des exemples de pareils domaines, on se sert surtout des *congruences*, définies aussi pour les nombres fractionnaires. Le module s'appelle le *guide* du domaine. Les deux espèces de domaines les plus importantes sont : 1° les domaines de tous les nombres congrus ; 2° les domaines de tous les nombres congrus aux nombres d'un diviseur d'un corps.

Les idéaux sont des domaines de nombres algébriques que l'on peut aussi bien faire entrer dans la catégorie II que dans la catégorie III. Ils jouent un rôle spécial, car on ne peut les caractériser ni par les propriétés de l'une de ces catégories, ni par celles de l'autre. Deux idéaux sont équivalents lorsque leur quotient est un nombre du corps. Si l'on admet que ce nombre appartient à un rayon, on peut diviser tous les idéaux en *classes de rayons*. Chaque rayon définit ainsi une *classification d'après les rayons*. M. Fueter donne de nombreux exemples. — Discussion : MM. H. Weber (Strasbourg) et Speiser.

3. — M. Prašil (Zurich) parle de l'*emploi des méthodes graphiques dans les problèmes d'hydrautechniques*. Il donne des exemples des services qu'elles peuvent rendre à l'ingénieur.

I. Interprétation graphique des résultats d'une mesure. Exemple : la représentation graphique du débit d'une conduite d'eau mesuré avec le moulinet hydraulique.

II. Représentation graphique d'une formule empirique. Exemple : la formule de Ganguillet-Kuller qui donne la vitesse moyenne de l'eau d'une rivière ou d'un canal. (Voir l'année 1869 de la *Zeitschr. des öster. Ingenieure- u. Architekten-Vereins*).

III. Résolution graphique de problèmes d'hydraulique. Exemples tirés de la *Graphische Theorie der Turbinen und Kreiselpumpen* par M. G. Hermann, et de la *Graphische Lösung von hydraulischen Aufgaben*, par M. Spiess-Faesch. M. Prášil ajoute un exemple de sa propre expérience : la représentation graphique du niveau du liquide dans une chambre d'eau. (Voir *Schw. Bauzeitung*, vol. LII, *Wasserschlossprobleme*).

IV. Résolution graphique de problèmes d'hydraudynamique. Les méthodes graphiques sont les mieux appropriées à l'étude que l'ingénieur doit faire de ces questions ; elles lui donnent une exactitude bien suffisante. M. Prašil signale les contributions que l'on trouve dans Holzmüller, *Ingenieur-Mathematik*, ainsi que dans son étude publiée par la *Schw. Bauzeitung*, vol. LII, *Zur Geometrie der konformen Abbildungen von Schaufelrissen*.

Il établit ensuite les propriétés géométriques suivantes et montre le rôle utile qu'elles jouent dans les résolutions graphiques :

I. L'ensemble des trajectoires orthogonales planes peut être divisé en catégories qui sont caractérisées par la forme de la fonction.

II. Deux familles de trajectoires correspondantes obtenues en donnant aux paramètres des accroissements égaux, divisent le plan en rectangles curvilignes élémentaires ; la fonction caractéristique de la catégorie donne le rapport entre les côtés.

III. Les rayons de courbure sont donnés par des expressions faciles à représenter graphiquement.

IV. Entre les trajectoires de catégories différentes il existe des liens qui se prêtent également aux méthodes graphiques.

Le conférencier montre l'emploi de ces théorèmes à l'aide de deux exemples, en en faisant ressortir les liens avec la théorie du potentiel. — Discussion : MM. Fueter et Grossmann.

4. — M. O. Spiess (Bâle) expose quelques *considérations géométriques*. Supposons qu'un segment de droite se meuve sur une surface réglée en coïncidant constamment avec une génératrice et en ayant toujours son milieu sur la ligne de striction ; ses extrémités décrivent des courbes d'égales longueurs. Nous appellerons le lieu du milieu du segment *directrice* et les courbes engendrées par ses extrémités *courbes conjuguées*. Si l'indicatrice sphérique de la surface réglée et la directrice sont algébriques, les deux courbes conjuguées le sont aussi et réciproquement. On recherche toutes les courbes conjuguées : 1° qui sont sur la même surface ; 2° qui sont congruentes ou symétriques ; 3° qui se réduisent à une seule courbe (analytique monogène). Nous nommerons *courbes Z* les courbes que nous trouvons dans ce dernier cas ; elles possèdent une corde qui sous-entend un arc de longueur constante. Si cet arc est égal à la moitié du périmètre, la courbe Z correspondante limite une surface de Möbius. Lorsque les courbes Z sont planes, elles satisfont une équation fonctionnelle très remarquable.

On peut généraliser ces considérations et faire prendre au segment une double infinité de positions. Les droites sur lesquelles il se trouve forment une congruence isotrope, et les surfaces décrites par ses extrémités, les *surfaces conjuguées*, sont développables l'une sur l'autre. Deux cas sont particulièrement intéressants, lorsque les surfaces conjuguées sont congruentes ou symétriques et lorsqu'elles se réduisent à une seule *surface Z*. On trouve une des surfaces Z, lorsque le lieu du milieu du segment est une surface à un seul côté. — Discussion : MM. Grossmann, Meissner et Fueter.

5. — La communication de M. D. Mirimanoff (Genève) est intitulée *Sur le dernier théorème de Fermat*. En l'absence de son au-

teur, M. le prof. Fehr en donne lecture après quelques mots d'introduction du président. En voici le texte complet :

Supposons que l'équation de Fermat

$$x^p + y^p + z^p = 0 ,$$

p étant un nombre premier supérieur à 2, soit possible en nombres entiers x, y, z premiers à p et soit τ l'un des six rapports

$$\frac{x}{y}, \frac{z}{y}, \frac{x}{z}, \frac{y}{x}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x} .$$

Dans une Note insérée aux *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences de Paris, du 24 janvier 1910, j'ai montré que τ vérifie un système de congruences dont les plus simples fournissent les conditions $q(2) \equiv 0$ (criterium de Wieferich) et $q(3) \equiv 0$, $q(m)$ désignant le quotient de Fermat $\frac{m^{p-1} - 1}{p}$. D'autres conditions se rattachant aussi au criterium de Wieferich ont été données par M. G. Frobenius dans les *Ber. Akad. Berlin* du 24 février. Mais voici un critère un peu différent qu'on obtient à l'aide de considérations analogues. Désignons par $\varphi_{p-1}(t)$ le polynôme

$$t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ldots - \frac{t^{p-1}}{p-1} \quad \text{ou encore} \quad \frac{(1+t)^p - 1 - t^p}{p} .$$

On sait que $\varphi_{p-1}(t)$ s'annule pour $t = \tau$ (propriété déjà utilisée par Legendre) ; la congruence $\varphi_{p-1}(t) \equiv 0$ admet donc les six racines $t = \frac{x}{y}$, ... etc. Mais il y a plus, et c'est là le résultat que je voulais indiquer : cette congruence admet aussi les racines $t = -\tau$ et $t = -\tau^2$. Je tiens encore à faire remarquer que les critères précédemment rappelés expriment des propriétés particulières du polynôme $\varphi_{p-1}(t)$. Les conditions $q(2) \equiv 0$ et $q(3) \equiv 0$ reviennent en effet à celle-ci : la congruence $\varphi_{p-1}(t) \equiv 0$ admet les racines 1 et 2.

Des résultats analogues et la théorie de la méthode dont je me suis servi dans ces recherches paraîtront prochainement dans le *Journ. f. reine u. angew. Mathematik*.

6. — M. Meissner (Zurich) parle d'*une surface jouissant d'un triple degré de liberté dans tout tétraèdre régulier circonscrit*. Une sphère inscrite dans un polyèdre peut toujours tourner autour de son centre. D'autres surfaces ont une propriété analogue. Il existe une surface F *qui peut prendre une triple infinité de positions à l'intérieur d'un tétraèdre régulier circonscrit*. Il faut que tous les tétraèdres réguliers circonscrits soient égaux. Soient ξ, η, ζ les

cosinus directeurs et $p(\xi, \eta, \zeta)$ la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point O sur un plan tangent à F. *La surface* F *doit satisfaire l'équation fonctionnelle :*

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{4} p(\xi_i , \eta_i , \zeta_i) = h \qquad \text{(constante)}$$

ξ_i, η_i et ζ_i étant les cosinus directeurs de quatre droites formant entre elles des angles égaux. M. Meissner montre *que toute fonction du second degré en ξ, η et ζ donne une solution.* Par un changement d'axes de coordonnées, on peut mettre cette fonction sous la forme

$$(2) \qquad p(\xi , \eta , \zeta) = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 .$$

La surface F définie par la condition 2 est une solution de notre problème. Elle est convexe lorsque :

$$A \geqq B \geqq C \geqq \frac{A}{2} > 0 .$$

Elle ressemble à un ellipsoïde à trois axes. Ses plans de coordonnées en sont trois plans de symétrie. Tous ses contours apparents sont des courbes dont tous les triangles équilatéraux circonscrits sont égaux. Il y a deux plans sur lesquels la surface se projette orthogonalement suivant un cercle de rayon B. La surface F est couverte d'une famille de courbes du quatrième ordre ; ces courbes ne se coupent pas ; l'une d'elles dégénère en deux ellipses. La longueur totale des arêtes est la même pour tous les parallélipipèdes rectangles circonscrits à la surface. M. Geiser a fait remarquer à M. Meissner que la surface F est la transformée par polaire réciproque de la surface de Fresnel

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C}$$

qui correspond à l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{\sqrt{A}} + \frac{y^2}{\sqrt{B}} + \frac{z^2}{\sqrt{C}} - 1 = 0 .$$

La surface F est de quatrième classe.

Discussion : MM. Spiess et Fueter.

7. — M. H. Fehr (Genève) parle de *l'état actuel des travaux de la Commission internationale de l'enseignement mathématique et de la sous-commission suisse.* Le compte rendu détaillé publié dans cette *Revue* (n° de septembre, p. 365) nous dispense de résumer ici cet exposé. Bornons-nous à rappeler la liste des rapports,

actuellement en préparation, et concernant les divers types d'établissements de la Suisse :

Enseignement primaire, par M. Stœcklin (Liestal, Bâle).

Ecoles moyennes élémentaires (Mittelschulen), par M. Badertscher (Berne).

Enseignement secondaire supérieur, par M. Brandenberger (Zurich).

Ecoles supérieures de jeunes filles, par M. Gubler (Zurich).

Enseignement technique moyen, par M. Crelier (Bienne).

Ecoles de commerce et d'administration, par M. Morf (Lausanne).

Ecoles normales d'instituteurs et d'institutrices primaires, par M. Scherrer (Küssnacht, Zurich).

Enseignement universitaire, par M. Graf (Berne).

Enseignement technique supérieur, par M. Grossmann (Zurich).

En outre, la sous-commission a estimé qu'il serait utile d'avoir un exposé de l'enseignement mathématique dans les écoles nouvelles dites *Landerziehungsheime*, créées tout d'abord en Allemagne, et dont on trouve plusieurs établissements similaires aujourd'hui en Suisse. Le rapport a été confié à M. Matter (Frauenfeld).

Ces rapports seront publiés avec le concours de la Confédération et des principaux cantons, sous le titre : *L'enseignement mathématique en Suisse, rapports de la sous-commission suisse, publiés sous la direction de* M. H. Fehr.

8. — M. Rudio (Zurich) parle de *la publication des œuvres d'Euler*. Le 6 septembre 1909, la Société helvétique des Sciences naturelles décida, à l'unanimité, de publier les œuvres d'Euler dans la langue originale. En décembre 1909, MM. Rudio, Krazer et Stäckel furent chargés de cette publication. Ils dressèrent le plan de l'œuvre en se basant sur le projet de M. Stäckel ; ils établirent la liste des savants qui éditeront les 44 volumes. Après une étude approfondie, ils ont résolu les questions se rapportant à l'impression, au papier et aux illustrations. M. Weber (de Strasbourg) s'est chargé du premier volume, qui contiendra l'algèbre ; grâce à ses efforts et à ceux de la maison Teubner, ce volume paraîtra à la fin de l'année. La mécanique et la dioptrique paraîtront au commencement de 1911. On peut espérer voir, dans le courant de l'année prochaine, l'apparition de cinq volumes. Après que M. Eneström eût dressé le catalogue complet des œuvres d'Euler, la Commission a reçu de Pétersbourg une liste des manuscrits qui sont en possession de l'Académie. Ces manuscrits, comprenant 165 fascicules, vont être envoyés à Zurich. Une revision provisoire de la liste a montré qu'ils contenaient une foule de travaux inconnus. On y trouve un grand nombre de résumés et de comptes rendus qu'Euler a écrits de sa main et a consacrés, soit à ses propres travaux, soit à des travaux d'autrui ; on ignorait leur exis-

tence. Il y a aussi beaucoup de lettres inconnues. Pour ne pas donner les originaux à l'imprimeur, on les fera photographier en double ; un exemplaire ira à l'imprimerie, l'autre aux archives ; ils pourraient former le commencement d'une sorte de Musée d'Euler, dont on pourrait mettre le siège à la Bibliothèque de l'Université de Bâle. Le premier volume commencera par l'éloge d'Euler par Nicolas Fuss ; cet éloge ne sera pas sous la forme où il fut prononcé à Pétersbourg, mais sous celle où il fut imprimé à Bâle. On insérera, dans ce volume, le portrait d'Euler gravé par Mechel, d'après le tableau d'Handmann (1750). En outre, le premier volume de chaque série contiendra un portrait d'Euler; la mécanique aura une héliogravure d'après la gravure de Weber. On en a envoyé la planche de Pétersbourg à Zurich, ainsi que celle d'une copie sur acier, faite vers le milieu du siècle dernier, de la gravure sur cuivre que Küttner exécuta en 1780, d'après le portrait d'Euler par Darbès. Ces planches sont bien conservées. M. Rudio termine sa communication en priant chacun de l'aider dans ses recherches des lettres inédites d'Euler ; on doit encore en trouver chez les particuliers.

M. Fehr dit que la ville de Genève possède le portrait d'Euler par Darbès [1]. Il provient d'un legs du publiciste genevois Etienne Dumont. Déposé d'abord à la Bibliothèque publique et universitaire, il a été transféré au nouveau Musée d'Art et d'Histoire. M. Fehr montre une photographie de ce tableau, ce qui permet une comparaison intéressante avec la gravure de Küttner et une gravure tirée sur la planche venue de Pétersbourg.

9. — M. Laemmel (Zurich) fait une communication, intitulée, *Mathématique et Biologie,* dans laquelle il signale ceux des grands problèmes que le biologue et le mathématicien croient pouvoir aborder avec succès. Les méthodes dont ils se servent reposent sur la théorie des probabilités ; elles utilisent principalement les différentes formations de la valeur moyenne, la « *Standard-Deviation* », et le théorème de Bernoulli. L'un des principaux buts de la Biologie mathématique est d'établir une loi générale de l'hérédité.

La prochaine réunion aura lieu à Soleure, en septembre 1911.

Société suisse des professeurs de mathématiques.

Réunion de Baden, 9 octobre 1910.

La Société suisse des professeurs de mathématiques a tenu sa 12me réunion à Baden, le 9 octobre 1910, sous la présidence de M. C. Brandenberger (Zurich), président, et M. C. Egli (Lucerne),

[1] Voir l'*Ens. math.* du 15 janv. 1910, p. 55-56.

vice-président. La séance du matin, qui a débuté par une allocution du président, a été entièrement consacrée à un exposé des principaux points des rapports concernant l'enseignement mathématique dans les Ecoles moyennes de la Suisse. Il s'agissait surtout de permettre aux rapporteurs d'obtenir des renseignements complémentaires et d'entendre les vœux de leurs collègues. La plupart des membres de la Sous-commission suisse assistaient à la séance.

Dans son *Introduction*, M. H. Fehr, président de la Sous-commission, a donné un aperçu général des travaux dans les principaux pays ; puis on a entendu les exposés de MM.

C. Brandenberger, pour *les Gymnases et les Ecoles réales*,

E. Gubler, pour *les Ecoles supérieures de jeunes filles*,

F. Scherrer, pour *les Ecoles normales primaires*,

L. Crelier, pour *les Ecoles techniques moyennes*.

La discussion a eu lieu au début de la seconde séance, qui comprenait en outre, après une courte partie administrative, une communication de M.

F. Scherrer, sur une *recherche élémentaire du centre de gravité d'un segment parabolique*.

La séance s'est terminée par une communication de M. Grossmann, sur la *Société mathématique suisse*, récemment fondée, et qui, dans l'esprit du Comité d'initiative, ne fera nullement double emploi avec la Société des professeurs de mathématiques. Tandis que celle-ci s'occupe de préférence de questions d'enseignement, la première poursuivra un but purement scientifique. Les deux Comités prévoient du reste la possibilité de réunions communes.

A l'occasion de cette réunion MM. May et Jaccottet avaient organisé une *exposition de travaux manuels* exécutés par les élèves du Collège et du Gymnase scientifique de Lausanne. M. May a insisté sur le rôle utile, au point de vue des mathématiques, des travaux manuels, à condition que dans leur enseignement on tienne toujours compte des liens étroits avec la Géométrie et le Dessin.

Etats-Unis. — Thèses de doctorat.

Nous donnons ci-après la liste des vingt-trois thèses de doctorat (sur 178 thèses de sciences) acceptées par les universités américaines, pendant l'année 1909-1910 ; c'est le chiffre le plus élevé qui ait été atteint ces dernières années (21 en 1905).

Le nom de l'université est indiqué entre parenthèses, après le nom de l'auteur.

J. Babb (Pennsylvania) : The second category of the groups of order 2^m which contain selfconjugate sub-groups of order 2^{m-1}. — Miss E. R. Bennett (Illinois) : Primitive groups with a determi-

nation of the primitive groups of degree 20. — H. B. CURTIS (Cornell) : Hyperabelian functions expressible by theta series. — F. F. DECKER (Syracuse) : On the order of a restricted system of equations. — G. C. EVANS (Harvard) : Volterra's integral equation of the second kind with discontinuous kernel. — A. B. FRIZELL (Kansas) : Foundations of arithmetic. — F. T. H'DOUBLER (Wisconsin) : On certain functional equations. — T. H. HILDEBRANDT (Chicago) : A contribution to the foundations of Frechet's calcul fonctionnel. — F. L. HITCHCOCK (Harvard) : Vector functions of a point. — J. E. HODGSON (Johns Hopkins) : Orthocentric properties of the plane directed n-line. — J. K. LAMOND (Yale) : Improper multiple integrals depending on a parameter. — H. F. MACNEISH (Chicago) : Linear polars of the k-hedron in n-space. — E. J. MILES (Chicago) : The absolute minimum of a definite integral in a special field. — H. H. MITCHELL (Princeton) : The sub-groups of the linear group $LF(3, p^n)$. — U. G. MITCHELL (Princeton) : Geometry and collineation groups of the plane $PG(2, 2^2)$. — Mrs. H. B. OWENS (Cornell) : Conjugate line congruences of the third order defined by a family of quadrics. — Mrs. A. J. PELL (Chicago) : Biorthogonal systems of functions with applications to the theory of integral equations. — R. S. POND (Kansas) : Collineations in space of four dimensions. — J. E. ROWE (Johns Hopkins) : A complete system of invariants for the plane rational quartic curve, and other facts in regard to rational curves. — H. A. RUGER (Columbia) : The place of analysis in the curve of efficiency. — E. W. SHELDON (Yale) : Critical revision of de Haan's tables of definite integrals, two volumes. — L. L. SILVERMAN (Missouri) : On various definitions of the sum of a divergent series. — H. W. STAGER (California) : On numbers which contain no factors of the form $p(kp + 1)$.

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Allemagne. — *Fondation Wolfskehl à Gœttingue.* Sur l'invitation de la Commission, M. H.-A. LORENTZ, de Leyde, a fait une série de conférences du 24 au 29 octobre. Elles avaient pour objet l'évolution de notre conception de l'éther (*Ueber die Entwicklung unserer Vorstellung von Aether*).

Centenaire de l'Université de Berlin. — A l'occasion des fêtes du Centenaire, le grade de docteur honoraire a été conféré à MM. E. PICARD et H. POINCARÉ, professeurs à la Faculté des Sciences de Paris et membres de l'Institut.

M. O. BOLZA est nommé professeur honoraire de l'Université de Fribourg-en-Brisgau.

M. W. KUTTA est nommé professeur ordinaire de mathématiques à l'Ecole technique supérieure d'Aix-la-Chapelle.

M. Näbauer est nommé professeur ordinaire de Géodésie à l'Ecole technique supérieure de Braunschweig.

M. H. Mohrmann a été admis en qualité de privat-docent à l'Ecole technique supérieure de Carlsruhe.

Angleterre. — M. E.-W. Hobson, professeur à l'Université de Cambridge, a été nommé docteur honoraire de l'Université de Sheffield, à l'occasion de la réunion que la *British Association* a tenue dans cette ville (v. plus haut p. 516).

Autriche. — Ont été admis en qualité de privat-docents : M. Fanta, pour les mathématiques et le calcul des Assurances, à l'Ecole technique supérieure de Brünn, et M. Rothe, pour les mathématiques, à l'Ecole technique supérieure de Vienne.

Etats-Unis. — MM. C.-H. Ashton, v. A. Mitchell, A. Pitcher, J.-N. Van der Vicco et M.-B. White sont nommés professeurs extraordinaires à l'Université de Kansas.

M. A. Emch, professeur à l'Ecole réale de Bâle, et J.-B. Shaw sont nommés professeurs extraordinaires de l'Université de l'Illinois.

France. — M. J. Jouguet, ingénieur en chef des mines, est nommé titulaire de la chaire d'Analyse, de Géométrie descriptive et de Topographie à l'Ecole nationale des mines à Paris en remplacement de M. Pelletan, décédé.

Hongrie. — *Prix Bolyai.* L'Académie hongroise des Sciences vient de distribuer pour la seconde fois le prix quinquennal international de mathématiques qu'elle a fondé, en 1902, pour perpétuer le souvenir de l'illustre savant. Le prix a été attribué à David Hilbert, professeur à l'Université de Gœttingue, dont les travaux ont exercé une influence remarquable sur le développement des sciences mathématiques.

La Commission du prix était composée de MM. J. König et G. Rados, de l'Académie hongroise et de deux membres étrangers, MM. Mittag-Leffler (Stockholm) et H. Poincaré (Paris) ; ce dernier avait été désigné comme rapporteur.

Ainsi que nous l'avions annoncé en son temps, le prix consiste en une Médaille et en une somme de dix mille couronnes. Il avait été attribué pour la première fois en 1905, M. H. Poincaré.

Nécrologie.

Maurice Lévy. — La Science française vient de faire une perte sensible en la personne de M. Maurice Lévy, qui s'était acquis une réputation de savant de premier ordre par ses remarquables travaux dans les domaines les plus variés des mathématiques pures et appliquées. Mathématicien de grande valeur, il a fourni d'im-

portantes contributions à la Géométrie infinitésimale, à l'Analyse et aux diverses branches de la Mécanique, notamment à la Cinématique, à l'Hydraulique, à l'Hydraudynamique et à la théorie de l'Elasticité. Rappelons ici son beau *Traité de Statique graphique*, dont une 3ᵐᵉ édition est en cours de publication.

Né en 1838, Maurice Lévy passa successivement par l'Ecole polytechnique et l'Ecole des Ponts et Chaussées. Il entra au Service des Ponts et Chaussées en 1872 et devint inspecteur général en 1894. Sa carrière dans l'enseignement fut également très brillante. De 1862 à 1883, il a été répétiteur de Mécanique à l'Ecole polytechnique; depuis 1875, il occupa la chaire de Mécanique appliquée à l'Ecole centrale des Arts et Manufactures et, en 1885, il succéda à Serret, à celle de Mécanique analytique et céleste au Collège de France, où il avait longtemps suppléé Joseph Bertrand dans la chaire de Physique générale et mathématique.

Maurice Lévy était membre de l'Académie des Sciences, section mécanique, depuis 1883.

J. Lüroth. — Nous apprenons avec regret la mort de M. Jacob Lüroth, professeur à l'Université de Fribourg-en-Brisgau, décédé le 14 septembre. Né à Mannheim le 18 février 1844, Lüroth fit ses études à Bonn, Heidelberg, Berlin et Giessen. En 1869, il fut nommé professeur ordinaire à l'Ecole technique supérieure de Carlsruhe, où il resta douze ans; il fut appelé ensuite à Munich, en 1880, puis à Fribourg-en-Brisgau, en 1883.

M. W. Thomé, professeur à l'Université de Greifswald, est décédé le 1ᵉʳ octobre à l'âge de 69 ans.

NOTES ET DOCUMENTS

Cours universitaires.

Semestre d'hiver 1910-1911 (suite).

ANGLETERRE

Oxford; *Lecture List for Michaelmas Term*. 1910 (Course begin Oct. 18). — Professor W. Essen : Analytic Theory of Plane Curves; Synthetic Theory of Plane Curves. — Professor E. B. Elliott : Sequences and Series; Elementary Theory of Numbers. — Professor A. E. H. Love : Analytical Statics; Harmonic Analysis. — Professor H. H. Turner : Elementary Mathematical Astronomy. — H. C. Plummer : Pratical Work. — J. E. Campbell : Differen-

tial Equations. — H. C. Thompson : Integral Calculus. — H. T. Gerrans : Tridimensional Rigid Dynamics. — A. L. Dixon : Hydrostatics. — A. L. Pedder : Problems in Pure Mathematics. — C. E. Haselfoot : Theory of Equations. — A. L. Dixon : Inversion, Max. and Min., &c. — P. J. Kirkby : Projective Geometry. — C. H. Sampson : Plane Analytical Geometry. — A. E. Jolliffe : Solid Geometry. — J. W. Russell : Differential Calculus. — E. H. Hayes : Elementary Mechanics.

AUTRICHE

Czernowitz ; *Universität.* — Plemelj : Funktionentheorie, 5 ; Seminar, 2 ; Proseminar, 2. — Hahn : Diff. u. Integralrechn., 4 ; Uebgn., 2 ; Theoretische Arithmetik, 2 — Radakovic : Seminar für mathem. Physik.

Graz ; *Universität.* — Dantscher R. v. Kollesberg : Integralrechnung (Fortsetzung), Funktionentheorie, 5 ; Mathem. Seminar, 2. — Daublebsky v. Sterneck : Diff. u. Integralrechn., 5 ; Mathem. Seminar, 2. — Streissler : Darst. Geometrie, 3. — Wassmuth : Das Prinzip der Relativität, 1 ; Seminar für mathem. Physik, 3. — Hillebrand : Elemente der theor. Astronomie, 4 ; Astron. Chronologie, 1. — Benndorf : Meteorologie, 3 ; Uebungen im physikalischen Rechnen, 2.

Innsbruck ; *Universität.* — Gmeiner : Bestimmte einfache und mehrfache Integrale, 3 ; Anw. der Infinitesimalrechnung auf die Geometrie, 2 ; Mathem. Seminar, 2. — Zindler : Analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes in Verbindung mit Uebungen des mathematischen Seminars, 6 ; Mathem. Seminar für Anfänger, 1. — Menger : Darst. Geometrie, 2. — Prey : Mechanik des Himmels, 4.

Prag ; *Universität.* — Pick : Diff. u. Integralrechnung, 3 ; Funktionen komplexer Variablen, 2 ; Mathem. Seminar, 2. — Grünwald : Liniengeometrie, 3 ; Unendliche Reihen 2. — Weinek : Sphär. Astronomie, 3. — Oppenheim : Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, 3.

Wien ; *Universität.* — G. v. Escherich : Bestimmte Integrale und Funktionentheorie, 5 ; Proseminar, 1 ; Seminar, 2. — Mertens : Algebra, 5 ; Uebgn. im mathem. Seminar, 2 ; Uebgn. im mathem. Proseminar, 1. — Wirtinger : Diff. und Integralrechnuug, 5 ; Uebgn., 1 ; Mathem. Seminar, 2 ; Mathem. Proseminar, 1. — Kohn : Einleitung in die synthetische Geometrie 4 ; Uebgn., 1 ; Kurven und Flächen dritter Ordnung, 2. — Tauber : Versicherungsmathematik, 4. — Blaschke : Einführung in die mathem. Statistik, 1, 3. — Hanni : Einführung in die Vektorenrechnung, 2. — Schrutka : Integralrechnung (mit bes. Berücksichtigung der naturwiss. Anwendungen), 2. — Tietze : Ausgewählte Kapitel der Elementargeometrie (Lösbarkeit von Konstructionsaufgaben), 2. — Hepperger : Sphär. Astronomie, 4 ; Bahnbestimmung der Meteore, 1.

BULGARIE

Sofia ; *Université.* — E. Ivanov : Equations différentielles, 3 h ; Exerc., 2 h. ; Théorie des fonctions, 3 h. ; Exerc., 1 h. — A. Tinterov : Introduction aux mathématiques supérieures I, 4 h. ; Exerc., 2 h. ; II partie, Calcul différentiel, 2 h. ; Exerc. 2 h. — V. Sourek : Géométrie analytique I, 2 h. ; Exerc., 4 h. ; Géométrie descriptive, 2 h. ; Exerc., 2 h. ; Géométrie supé-

rieure, 1 h. — Sp. Ganev : Algèbre sup., 2 h. ; Mécanique analytique, 5 h. ; Exerc., 2 h. — M. Batchevarov : Astronomie sphérique et pratique, 4 h. ; Astronomie théorique, 3 h ; Exerc. d'astronomie, 4 h.

FRANCE

Paris ; *Faculté des Sciences.* Premier semestre (à partir du 3 nov.) — Géométrie sup. 2 h., M. G. Darboux traitera des Principes généraux de la Géométrie infinit. ; il étudiera en particulier la théorie mathématique des Cartes géographiques. — Des travaux pratiques afférents au Certificat de Géométrie supérieure seront dirigés par M. Roubaudi, chef des Travaux graphiques, les jeudis à 2 heures. — Calcul différentiel et Calcul intégral, 1 h., M. Goursat, professeur, traitera des opérations du Calcul différentiel et du Calcul intégral. Eléments de la Théorie des Fonctions analytiques. — Théorie des Fonctions, 1 h., M. Emile Borel, professeur, traitera des Fonctions entières. — Mécanique rationnelle, 2 h., M. Cl. Guichard, chargé du cours, traitera des lois générales de l'Equilibre et du Mouvement. A partir du 1er janvier, l'enseignement sera donné par M. Paul Appell, professeur de mécanique rationnelle. — Mathématiques générales, 2 h., M. Cartan, chargé du cours, et M. Blutel (voir aux conférences) exposeront la première partie du cours de Mathématiques générales. — Astronomie mathématique et Mécanique céleste, 2 h., M. H. Poincaré, professeur, traitera des Hypothèses cosmogoniques. — Physique mathématique et Calcul des probabilités, 2 h., M. Boussinesq, professeur, exposera les principes généraux de la Théorie mécanique de la lumière. — Mécanique physique et expérimentale, 2 h., M. G. Kœnigs, professeur, traitera de la Théorie générale des Mécanismes. Les travaux pratiques auront lieu sous la direction de M. le professeur Kœnigs, le mardi, à 4 heures. — Physique céleste, 2 h., M. P. Puiseux, professeur adjoint, chargé du cours, traitera de la configuration et de la structure des planètes et des comètes. — Aviation (fondation de M. Basil Zaharoff), 2 h., M. Marchis, professeur, traitera, le mardi, de l'Aéronautique en général et, le vendredi, il étudiera l'appareil moto-propulseur (moteur et hélice) des Navires aériens. — Physique, 2 h., M. Bouty, professeur, Electromagnétisme, Electrolyse, Décharges électriques. — Physique générale, 2 h., Mme Pierre Curie, professeur, Radioactivité. Notions sur les grandeurs de la physique. (Grandeurs scalaires, grandeurs dirigées).

Conférences. — N... : Calcul différentiel intégral, 2 h. — Cl. Guichard, maître de conférences : Géométrie supérieure, 1 h. ; Mécanique rationnelle, 2 h. — Cartan : Travaux pratiques de Mathématiques générales, 1 h. — Blutel, chargé de conférences, fera des conférences sur l'Algèbre, en vue du Certificat de Mathématiques préparatoires à l'étude des Sciences physiques, 2 h. — Servant, chef des travaux, chargé de conférences de Mécanique physique, étudiera les principes de la statique graphique et de la résistance des matériaux, 1 heure.

Ecole normale supérieure. — J. Tannery : Calcul différentiel et intégral. — E. Borel : Théorie des fonctions. — J. Hadamard : Mathématiques.

Faculté des Sciences. Second semestre (à partir du 1er mars). — Analyse supérieure, E. Picard : Equations fonctionnelles tant en Analyse pure qu'en Physique mathématique. — Calcul différentiel et Calcul intégral, Goursat : Equations différentielles ; Equations aux dérivées partielles. — Mécanique

rationnelle, Appell : Lois générales du Mouvement des systèmes ; Mécanique analytique ; Hydrostatique et Hydrodynamique. — Mathématiques générales, Cartan : Analyse et mécanique. — Astronomie physique, Andoyer : Programme du Certificat d'astronomie approfondie. — Physique mathématique, Boussinesq : Entraînement des ondes par les corps en mouvement ; Dispersion ; Double réfraction circulaire ; Absorption ; Polychroïsme. — Mécanique physique et expérimentale, Kœnigs : Théorie générale des mécanismes.

Collège de France. — Cours publics à partir du 1er décembre 1910. — Mécanique analytique et mécanique céleste, J. Hamadard : Fonctions quasi périodiques ; leurs applications mécaniques, 2 h. — Mathématiques, C Jordan, suppléant M. Humbert : La théorie des nombres entiers algébriques et spécialement des nombres quadratiques. — Physique générale et mathématique, M. Brillouin ; Elasticité des solides isotropes et anisotropes ; quelques problèmes mixtes d'élasticité. — Cours de la fondation Claude Peccot.

BIBLIOGRAPHIE

Annuaire du Bureau des Longitudes pour l'année 1911. — 1 vol. in-16 de 750 p. ; franco, 1 fr. 85 ; Gauthier-Villars, Paris.

L'Annuaire du Bureau des Longitudes pour l'année 1911, si précieux par le nombre de documents qu'il contient, vient de paraître. Cet excellent Recueil renferme cette année, après les documents astronomiques, des Tableaux relatifs à la Métrologie, aux Monnaies, à la Géographie, à la Statistique et à la Météorologie.

Cet ouvrage ne se trouvera pas seulement sur la table du technicien, du physicien, du mathématicien ; chacun voudra le consulter pour avoir sous les yeux la liste des constantes usuelles, et aussi pour lire les intéressantes Notices de cette année : celle de M. Poincaré sur la *XVIme Conférence de l'Association géodésique internationale*, et de M. Bigourdan sur l'*Eclipse de Soleil du 17 avril 1912*.

D. Behrendsen u. Dr E. Götting. — **Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen.** Ausgabe für höhere Mädchenlehranstalten. — Un vol. rel. in-8o, 310 p. et 296 fig. ; 3 Mk ; B.-G. Teubner, Leipzig.

Ce manuel, qui se rattache à la réforme de l'enseignement mathématique inaugurée par Félix Klein, est vraiment remarquable en ce sens qu'il ne craint pas d'exposer avec simplicité et clarté des questions jugées généralement comme étant au-dessus de l'intelligence féminine. A de rares exceptions près, les traités de géométrie destinés aux jeunes filles sont le plus souvent un extrait dilué et édulcoré des Éléments d'Euclide ; les nombreux dessins de festons et de dentelles qu'ils renferment les font ressembler bien plus à un guide des travaux à l'aiguille qu'à un manuel de géométrie. Dans

l'ouvrage de MM. Behrendsen-Götting nous ne trouvons rien de semblable. L'enseignement, judicieusement gradué, s'élève des vérités les plus élémentaires aux notions plus difficiles de puissances, de racines et d'imaginaires ; et ce résultat a pu être obtenu grâce à une heureuse fusion de la géométrie, de l'algèbre et de la géométrie analytique.

Une première partie, qui sert d'introduction, familiarise les élèves avec les notions de droite, d'angles, de figures planes et solides.

La deuxième partie est consacrée à la planimétrie, tandis que la troisième, la plus originale à notre avis, expose les propriétés des nombres algébriques, celles des équations du premier et du second degré, et fait intervenir pour leur interprétation géométrique l'emploi des coordonnées.

Dans une quatrième et dernière partie, le volume des corps géométriques les plus usuels peut être, grâce aux connaissances acquises, calculé d'une façon simple et rapide

Dans tout le cours de l'ouvrage, chaque nouveau paragraphe est accompagné d'exercices nombreux et intelligemment choisis.

Nous regrettons cependant que cet excellent manuel ne renferme aucun aperçu sur les fonctions trigonométriques, car ainsi complété il permettrait aux jeunes filles de comprendre les formules élémentaires de physique et de mécanique et d'aborder des lectures qu'il leur est difficile de faire sans cela.

Quoiqu'il en soit, il serait à désirer que nous possédions en langue française un ouvrage de ce genre, car il rendrait de précieux services, vu le temps restreint que les jeunes filles peuvent consacrer à l'étude des mathématiques.

Arnold Reymond (Lausanne).

Pierre Duhem. — **Etudes sur Léonard de Vinci,** ceux qu'il a lus, ceux qui l'ont lu. Seconde série. — 1 vol. in-8° ; 12 fr., A. Hermann & fils, Paris.

Le savant auteur continue ici ses recherches relatives aux travaux et aux doctrines du grand peintre, en comparant les manuscrits de Léonard aux œuvres de ses devanciers et en faisant par cette confrontation, le triage entre les idées expérimentales du Vinci et celles qui lui ont été suggérées par la tradition. A l'aide de cette méthode, M. Duhem met en lumière le texte et la pensée de l'écrivain ; le plaçant ainsi dans son milieu historique, il reconstitue la longue chaîne des raisonnements et des déductions qui depuis les principes d'Aristote, s'est déroulée jusqu'à nous et dont Léonard est un des plus puissants anneaux. Alors, placé dans son vrai cadre, tel passage obscur, telle pensée aujourd'hui rebattue apparaît lumineuse et nouvelle, elle s'illumine au reflet des événements contemporains comme ces cristaux terreux qui irradient une lueur dès qu'on les soumet au rayonnement ultra-violet. On comprend ce que cette méthode exige d'érudition et de sagacité, et le lecteur, en face des 400 et quelques pages de l'ouvrage, devine l'abondance et la variété des matériaux dont la quintessence lui est présentée.

La plus grande partie de cette deuxième série d'études est consacrée à *Nicolas de Cues et Léonard de Vinci.* « L'époque de leur naissance », dit M. Duhem, « les a placés dans le temps, comme deux jalons plantés sur la route qui relie le moyen âge à l'âge moderne ; la vie de Nicolas de Cues (1401-1464) s'écoule avec les dernières années du moyen âge ; la vie de Léonard de Vinci (1452-1519) occupe le début de l'âge moderne ; l'une commence

alors que l'autre finit, le grand artiste semble être né pour recueillir le flambeau de la tradition que le cardinal allemand avait reçu de la Scolastique et que ses mains mourantes laissaient échapper.

« Ce précieux dépôt de la tradition intellectuelle a réellement été transmis de Nicolas de Cues à Léonard de Vinci ; celui-ci a lu les ouvrages de celui-là, il en a médité les enseignements, il en a tiré les premiers germes de quelques-unes de ses pensées les plus originales ».

Pour établir cette vérité, M. Duhem retrace la vie du cardinal allemand et indique les éditions de ses œuvres qui, du vivant de Léonard, furent imprimées à trois différentes reprises et que ce dernier a sûrement eues en main, puisqu'elles traitaient des sujets favoris de sa pensée.

Mais la juxtaposition des textes respectifs des deux auteurs fournit une preuve irréfutable de l'influence de l'un sur l'autre.

Qu'il s'agisse de philosophie pure ou de physique du globe et de mécanique, Nicolas de Cues, qui lui-même a puisé à d'anciennes sources, réagit sur l'esprit du Vinci d'une façon assez immédiate pour que M. Duhem ait pu trouver sous les phrases effacées des célèbres manuscrits, les traces de conceptions identiques. Un des axiomes fondamentaux de Nicolas de Cues est, *Tout est dans tout*, axiome qui ne lui est pas personnel, mais provient d'écrivains antérieurs, en particulier de Raymond Lulle. Ce dernier qualifie de « matière fine et claire » la matière première dont sont constitués les corps naturels. D'après Nicolas, cette matière première engendre quatre éléments principaux. « Ces quatre éléments », écrit M. Duhem, « se mélangent à leur tour pour former ce que Raymond Lulle nomme des composés simples, des éléments minéraux ou encore *nos* éléments, tandis que Nicolas de Cues les appelle des mixtes généraux; ceux-là sont les corps les plus simples qui puissent subsister dans la Nature. La chimie du cardinal allemand est exactement la même que la chimie du *Doctor Illuminatus*, leur commune théorie est dominée par cet aphorisme : *Quodlibet in quolibet*.

Comment ne pas reconnaître un résumé de cette théorie dans cette courte note du Vinci : « Anaxagore. Toute chose vient de toute chose, et toute chose se fait de toute chose, et toute chose retourne en toute chose, parce que ce qui existe parmi les éléments est fait de ces mêmes éléments. »

Plus loin, dans un des dialogues de Nicolas du Cues, il est question de la puissance et des attributs du Créateur ; les interlocuteurs adoptent l'image du verrier façonnant le vase, comme celle qui correspond le mieux à l'acte du Créateur dans la genèse de la forme. Le verrier peut modifier la forme d'un vase ou en reconstituer un nouveau avec les débris d'un ancien, s'il les ramène par la chaleur à la matière première « il leur ôte », dit Nicolas, « la forme actuelle en laquelle ils étaient figés ; et lorsque la matière est redevenue fluide, qu'elle a repris la possibilité universelle, il emploie cette matière à faire un nouveau vase » Et voici la pensée que cette lecture aurait suggérée à Léonard : « Comparaison. — Un vase brisé peut être restauré en sa forme s'il est cru, mais non s'il est cuit. »

Il ne s'agit pas dans cette confrontation de textes de quelques passages où la coïncidence fortuite a pu être provoquée par la lecture d'ouvrages communs ou par les observations ou les images que la nature replace patiemment sous les yeux des philosophes. D'un bout à l'autre de l'ouvrage de M. Duhem, ces réminiscences se répètent et c'est leur abondance et leur précision qui établit l'affirmation de l'auteur. Léonard prolonge la doctrine de Nicolas, il en reprend les idées directrices, les modifie en se les assimi-

lant et les corrige par l'expérience ; il arrive même que son esprit, cependant si vigilant, laisse passer une conception erronnée et que, victime de la tradition, il accepte un principe que la postérité réfutera. En voici un exemple frappant, tiré d'un dialogue de Nicolas de Cues, dialogue entre l'Idiot et l'Orateur. Celui-ci explique comment on peut trouver la vitesse d'un navire.

« L'Orateur. — Il suffit de laisser tomber un fruit dans l'eau du haut de la proue du navire et de noter la quantité d'eau qui s'écoule de la clepsydre jusqu'au moment où le fruit arrive à la poupe, la comparaison des poids d'eau écoulés en deux circonstances permettra de comparer les vitesses du navire en ces deux circonstances. »

« L'Idiot. — Assurément, on peut se servir de ce procédé et d'un autre encore. Il suffit de tirer un trait avec une baliste et de noter, au moyen de la clepsydre, la vitesse plus ou moins grande avec laquelle le navire s'approche de ce trait. » On sait depuis Gassendi, que ce procédé est faux, de par la théorie des mouvements relatifs.

Voici maintenant la réflexion de Léonard :

Du mouvement du mobile. — La flèche tirée de la proue du navire contre le lieu vers lequel le navire se meut ne quittera pas l'endroit d'où elle est chassée, si le mouvement du navire est égal au mouvement de la dite flèche. » Et plus loin, Léonard décrit un sulcomètre, appareil qu'il propose pour la mesure des vitesses d'un navire, basé également sur ce même faux principe de dynamique.

La conclusion de cette étude pleine de faits et d'idées est que Léonard était de son siècle et de son pays. « Les livres qu'il lisait », dit l'auteur, « étaient aussi ceux que ses contemporains, que ses compatriotes étudiaient. Son exemple nous montre qu'en Italie du Nord, à l'aurore du XVIe siècle, on méditait les enseignements de maître Albert de Saxe et du cardinal Nicolas de Cues. Or, en ces années-là, le jeune Nicolas Copernic parcourait les universités de Bologne, de Padoue, de Ferrare, de Rome, recueillant avidement les enseignements des maîtres italiens ; à ces enseignements se mêlaient les échos de ceux qu'au XIVe siècle Albertutius avait donnés à Paris, de ceux qu'au XVe siècle, le cardinal allemand exposait en des traités d'une si audacieuse originalité. Ces deux génies, que Léonard a si profondément médités, ont contribué pour une grande part à la révolution copernicaine ».

Les études de M. Duhem n'atteignent cependant pas la vérité historique du premier coup, et les opinions de l'auteur doivent se modifier à mesure que des lectures inédites font surgir de l'inconnu de nouveaux faits et de nouveaux rapports entre les écrivains du passé. Les travaux historiques ne sont jamais achevés et une étude ne peut être définitive, en face de l'amoncellement des matériaux que le temps a accumulés dans les bibliothèques ou surtout du défaut de ceux qu'il a détruits. Mais cette oscillation asymptotique de M. Duhem autour de la vérité qu'il soupçonne et qu'il poursuit avec énergie, illustre parfaitement la marche de la science, elle-même balancée entre les théories et les hypothèses, d'une amplitude qui diminue d'un siècle à l'autre.

C'est dans une deuxième étude relative à *Léonard de Vinci et les origines de la Géologie*, que M. Duhem corrige une opinion qu'il avait soutenue dans l'article : *Albert de Saxe et Léonard de Vinci*, paru dans la première série des Etudes en 1906. Alors, l'auteur pensait que Léonard, en observateur sagace, était arrivé spontanément à la vraie théorie des fossiles. De nou-

velles lectures rectifient cette idée. L'enseignement des maîtres de la Scolastique a conduit peu à peu Léonard sur le chemin qui aboutit à son affirmation, qui est la base de la Géologie moderne, puisque, par l'entremise de Cardan, l'explication des fossiles a passé à Bernard Palissy, considéré longtemps comme le fondateur de la Géologie.

Avant d'établir les mérites de Léonard, M. Duhem profite de la circonstance pour esquisser une histoire de la Géologie dans les temps anciens et rappeler ce que cette science doit aux grands noms d'Aristote, de Théophraste, d'Hérodote, d'Albert de Saxe et d'autres encore.

Jusqu'à Léonard, l'origine des fossiles est attribuée à deux causes, deux théories appuyées par des autorités équivalentes et entre lesquelles personne n'ose ou ne peut trancher. Les fossiles sont des épaves apportées par les eaux de la mer, lors de ses débordements diluviens, soutiennent les uns, tandis que d'autres admettent que les coquilles proviennent d'animaux qui ont vécu là où on retrouve leurs demeures calcaires. Il y a même une troisième doctrine, car les astrologues italiens prétendent que les tests marins sont tout simplement des jeux de la nature.

Léonard réfute, par des observations sur le terrain, la première et la troisième de ces affirmations, en démontrant l'incompatibilité avec les faits ou leur absurdité, et ses pensées sur les mouvements des terres et des mers constituent le socle indestructible sur lequel s'élèvera la Géologie moderne.

Les deux autres études du volume concernent *Léonard* et ses opinions sur *les deux infinis* d'abord, puis sur la *pluralité des mondes*, énigmes redoutables dont nos esprits s'occupent encore et dont la solution a été cherchée avec passion par les anciens et les savants du moyen âge.

Le travail d'érudition de M. Duhem est immense, les détails abondent, soit dans le texte, soit dans les notes de pages, enrichis d'une bibliographie aussi complète que le permet l'état de la critique moderne; l'ampleur du style et la variété des images accroissent l'intérêt de la lecture.

Enfin l'ouvrage contient en appendice un certain nombre de notes complétant des articles antérieurs ou ébauchant pour la plupart des recherches qui deviendront un jour, nous l'espérons bien, quelque magistrale étude sur le grand Léonard, dont M. Duhem est le biographe le plus autorisé.

Alph. Bernoud (Genève).

L. Defossez. — **Les cartes géographiques et leurs projections usuelles.** — 1 vol. in-16 de VII-118 p., avec 23 fig. et 2 planches; 2 fr. 75; Gauthier-Villars, Paris.

L'auteur se propose de faire un exposé des différents systèmes de projections employés en cartographie en n'utilisant que les mathématiques élémentaires. Après une Introduction, dans laquelle il étudie les propriétés générales des cartes géographiques, il examine successivement les différents systèmes que l'on groupe sous le nom de projections azimutales, projections cylindriques, ainsi que les projections employées pour les mappemondes.

L'ouvrage s'adresse surtout aux praticiens, mais en raison de l'intérêt que présente la question des cartes géographiques dans l'enseignement, ce petit volume est de nature à rendre service aux professeurs des écoles secondaires supérieures, lycées, gymnases ou écoles réales Ils y trouveront des applications permettant de faire ressortir les liens étroits qui unissent les mathématiques au dessin et à la géographie.

C.-A. Laisant. — **L'Enseignement du Calcul.** Conseils aux Instituteurs. — 1 vol. in-16, 56 p. ; 60 cent. ; Hachette, Paris.

L'auteur de l'*Initiation mathématique* a été amené à développer la question de l'enseignement du Calcul en s'adressant plus particulièrement aux maîtres des écoles primaires. Mais son volume sera également lu avec plaisir par tous ceux qui s'intéressent aux progrès de l'enseignement élémentaire. Mieux que toute analyse, l'intéressant *Avant-Propos* nous fait connaître l'esprit dans lequel cet ouvrage a été conçu ; nous le reproduisons entièrement ci-après :

« Ce tout petit livre ne fait double emploi avec aucun traité d'arithmétique, ni avec l'*Initiation mathématique*, bien qu'il soit inspiré par les mêmes idées pédagogiques que ce dernier ouvrage. Ce sont les nombreuses correspondances échangées avec des membres de l'enseignement primaire, qui m'ont décidé à le publier. On m'a fait observer que les moyens d'éducation intellectuelle dont je recommande l'emploi ne sont pas toujours d'une application très facile pour les professionnels de l'enseignement

« Je me suis placé, en effet, « en dehors de tout programme ». Et les instituteurs sont enserrés dans des programmes auxquels ils doivent se conformer dans une certaine mesure. J'ai combattu et je combattrai toujours le système des classes trop nombreuses ; et malheureusement beaucoup de nos écoles obligent encore certains maîtres à avoir sous leur direction un effectif d'élèves beaucoup trop considérable. Sont-ce là des raisons pour désespérer, pour déclarer qu'il n'y a rien à faire ? Loin de là. Ne pouvant faire aussi bien qu'on le voudrait, il faut du moins faire le mieux possible. Il faut surtout ne jamais oublier que l'intelligence de l'enfant offre d'inépuisables ressources et que même dans des conditions défectueuses, il y a toujours un bon parti à en tirer, si on est un éducateur consciencieux et avisé.

« Une observation encore. J'ai affirmé et je ne cesserai d'affirmer que le premier enseignement, s'appliquant aux tout jeunes enfants, jusqu'à la onzième ou douzième année, devrait être inspiré par un esprit très différent de celui qui suivra ; la première période serait celle de l'initiation ; la suivante celle de « l'étude », et cela parce que la psychologie du petit enfant est très spéciale, notamment très rebelle aux formules dogmatiques. Or, les instituteurs ont à instruire des enfants jusqu'à treize ans et quelquefois plus, à côté de bambins ne sachant pas encore lire. Ils sont contraints de préparer des candidats à l'absurde certificat d'études, placé comme un obstacle à tout enseignement humain et rationnel. Malgré toute leur bonne volonté, initiation et étude viennent donc un peu se confondre, se mêler ; dès lors, il n'est pas inutile, même au point de vue des élèves plus âgés, que les éducateurs professionnels puissent s'inspirer de quelques idées générales, simples, faciles à saisir, et qui, dans l'application, ont fait leurs preuves. C'est ainsi qu'ils parviendront aux meilleurs résultats au prix de la moindre fatigue ; c'est ainsi qu'ils formeront, non pas de petits perroquets, arrivant à réciter leurs leçons grâce à une véritable torture de leur mémoire, mais des enfants bien équilibrés ; ils ne seront pas bourrés de connaissances factices, ils comprendront ce qu'ils ont appris ; ils n'apprendront jamais sans comprendre.

« En moyenne, l'enfant est très apte à recevoir les premières notions mathématiques. Il s'y intéresse, cela l'amuse, les exceptions sont très rares. Il faut seulement pour cela que l'enseignement leur soit apporté sous une

forme intelligente, et qu'on n'abrutisse pas les élèves, s'imaginant les instruire.

« Je sais quelle est, du moins en France, la bonne volonté de la majorité de nos instituteurs publics. J'ai voulu mettre entre leurs mains un outil qui leur permettra de faire de bonne besogne. Ils n'y manqueront pas, car ils occupent le premier rang parmi ces « amis de l'enfance » auxquels j'ai dédié mon *Initiation mathématique.* »

Ernest Lebon. — **Emile Picard. Biographie. Bibliographie analytique des écrits.** (Collection des *Savants du jour.*) — 1 vol. in-8° de VIII-80 p., papier de Hollande, avec un portrait en héliogravure; 7 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

M. Lebon continue sa belle collection des *Savants du jour.* En signalant les deux premiers volumes, consacrés à MM. H. Poincaré et G. Darboux, nous avons fait ressortir la forme intéressante sous laquelle l'auteur présente successivement la biographie et la bibliographie. Ce nouveau volume nous fait connaître M. Emile Picard, qui préside actuellement l'Académie des Sciences de Paris. L'ouvrage a été présenté à l'Académie dans la séance du 20 juin par M. G. Darboux, secrétaire perpétuel. « Comme les volumes précédents, dit-il, celui-ci se recommande par une abondance dans les informations, une sûreté dans les renseignements de toute nature qui feront de la Collection de M. E. Lebon le guide le plus précieux pour les futurs historiens de la Science. »

K. Liewald. — **Die Anschaulichkeit in geometrischen Anfangsunterricht.** — Une broch. in-8°, 33 p. avec 17 fig.; 80 pf.; B. G. Teubner, Leipzig.

Aucune connaissance, a dit Kant, ne peut chronologiquement naître dans l'esprit avant l'expérience. M. Liewald déplore que cette vérité soit presque complètement méconnue lorsqu'il s'agit de l'enseignement des mathématiques. La représentation concrète des vérités mathématiques est nécessaire à la plupart des élèves qui, faute de cela, se rebutent et se découragent. Le professeur usera donc largement à la planche noire de craies de diverses couleurs pour représenter les figures planes et leurs propriétés. Il invitera ses élèves à dessiner correctement sur papier quadrillé et même à fabriquer avec du carton les figures qu'ils étudient. De même, en ce qui concerne les déplacements des lignes ou des corps dans l'espace, le professeur, pour les illustrer, fera constamment appel aux phénomènes naturels connus de ses élèves et construira au besoin des appareils appropriés. Il faudrait se garder toutefois, nous dit M. Liewald, de transformer la géométrie en une science expérimentale. La méthode intuitive peut être un auxiliaire précieux, mais elle ne doit en aucun cas atténuer dans l'esprit de l'écolier le caractère de rigueur qui est propre aux mathématiques.

Les remarques judicieuses de M. Liewald seront lues avec intérêt et profit par tous ceux que préoccupe la question de l'enseignement mathématique.

Arnold Reymond (Lausanne).

Eug. Lutz. — **Analytische Geometrie der Ebene.** Elementares Lehrbuch für höh. Lehranstalten. — 1 vol. cart. in-8°, X-301 p., 132 fig.; 9 M.; G. Braun, Carlsruhe.

L'auteur s'est proposé de faire un traité de *Géométrie analytique à deux dimensions* qui forme un intermédiaire entre les cours des gymnases et

écoles réales et ceux des universités. C'est une introduction à l'étude approfondie de la Géométrie analytique. Elle comprend l'étude des propriétés concernant le point, la droite, les courbes du second ordre examinées d'abord séparément, puis par leur équation générale et leurs propriétés communes. Les déterminants sont introduits dès le début pour ce qui est nécessaire dans un exposé élémentaire.

Ecrit avec beaucoup de clarté, ce traité rendra service non seulement aux élèves des gymnases et aux jeunes étudiants, mais encore aux professeurs de l'enseignement secondaire qui y trouveront de nombreux exercices.

R.-E. Steel. — **Practical Electricity and Magnetism.** — A first year's course. — 1 vol. in-16, 175 p., avec 61 fig.; 2 s.; Bell and Sons, Londres.

L'idée de compléter les cours de physique et de chimie de l'enseignement secondaire par des exercices de laboratoire n'est certes pas nouvelle. Les travaux d'Abraham en France, de Noak et Grimsehl en Allemagne sont là pour le démontrer.

Le petit volume dont nous avons à parler ici représente une des contributions de l'Angleterre à ce sujet. Il fait pendant à trois volûmes de Sinclair, traitant des autres parties de la physique, qui en sont déjà à leur 4e et 2e édition.

Le but poursuivi est de mettre l'élève à même, soit de répéter les expériences fondamentales du cours, soit de procéder à des mesures; le texte est assez détaillé et assez précis pour que l'élève puisse être mis en face du matériel nécessaire, puis abandonné à lui-même.

L'ouvrage est divisé en 12 chapitres comprenant 114 expériences; chaque chapitre est précédé d'une courte introduction théorique et suivi d'exercices de calcul ou de revision.

L'électricité statique, sans être négligée, est réduite à la place modeste qui convient à cette partie de la science, ordinairement trop développée dans les cours secondaires au détriment de l'électricité dynamique.

Dans tout le cours de l'ouvrage, les explications théoriques sont conformes aux idées modernes sur l'électricité, en ce qu'elles ont de définitivement acquis.

E. Steinmann (Genève).

H. Weber u. J. Wellstein. — **Encyklopädie der Elementarmathematik.** Ein Handbuch für Lehrer u. Studierende, in drei Bänden. Erster Band : *Elementare Algebra u. Analysis*, bearbeitet von Heinrich Weber. — 1 vol. in 8°, relié, 531 p.; 10 M.; B. G. Teubner.

Nous avons analysé la première édition de ce traité, qui, en peu d'années, atteint déjà sa 3me édition. Qu'il nous suffise de signaler les principales additions, dont l'une a déjà été faite pour la 2me édition; il s'agit d'un chapitre sur les éléments du calcul différentiel et intégral.

Les progrès qui ont été réalisés dans la théorie des ensembles et la tendance que l'on a maintenant à en donner les notions au début de l'Algèbre supérieure ont engagé M. Weber à remanier le premier chapitre, pour y réunir les notions de la théorie des ensembles et les nombres naturels.

Il n'est guère besoin de recommander à nouveau cet ouvrage qui a trouvé un succès bien mérité auprès des professeurs de l'enseignement secondaire supérieur et des étudiants en mathématiques.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Publications périodiques :

American Mathematical Monthly (The), published under the joint auspices of the University of Chicago and the University of Illinois, edited by B. F. Finkel, E. Slaught & G. A. Miller. — Vol. XVII, 1910.

Bollettino di Bibliografia e Storia delle Science matematiche, pubblicato per cura di Gino Loria. Anno XII. 1910. — Rosenberg & Sellier, Torino.

Communications de la Société mathématique de Kharkow, Tome XII, N° 1. — D. Sintsof : Sur les éléments singuliers du connexe, III. — I. Tamarkine : Application de la méthode des fonctions fondamentales à l'étude de l'équation différentielle des verges élastiques. — A. Grouzinzeff : Les électrons dans l'optique.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié par H. Vuibert. 35e année, 1910-1911. -- Librairie Vuibert, Paris.

Mathematics Teacher (The). A Magazine devoted to the interests of Teachers of Mathematics, published quarterly by the Association of Teachers of Mathematics for the Middle States and Maryland. Editor : W. H. Metzler, Syracuse, N. Y. — Vol. II. 1909-1910

Nieuw Archief voor Wiskunde. Revue publiée par la Société scientifique d'Amsterdam et dirigée par J.-C. Kluyver, D.-J. Korteweg et P.-H. Schoute. 2e série, X, 1910. — Delsman & Nolthenius, Amsterdam.

Nyt Tidsskrift for Matematik. Revue dirigée par C. Juel et V. Trier. Série A, 21e année ; série B, 21e année ; 1910. — Jul. Gjellerup, Copenhague.

Pädagogisches Archiv. Monatsschrift für Erziehung, Unterricht u. Wissenschaft, herausgegeben von J. Ruska. 52. Jahrg. 1910. — Quelle u. Meyer, Leipzig.

Periodico di Matematica per l'Insegnamento secondario. Diretto dal Prof. G. Lazzeri. Série 3, vol. VII. — Raffaelo Giusti, Livorno.

Prace Matematyczno-Fizycne, dirigé par S. Dickstein. Tome XX, Varsovie.

Revue de l'Enseignement des Sciences (La). 4e année, 1910. — Librairie Le Soudier, Paris.

Revue de Mathématiques spéciales, dirigée par E. Humbert et G. Papelier. 21e année, 1910-1911. — Librairie Vuibert, Paris.

La Revue du Mois, dirigée par E. Borel. 5e année. — F. Alcan, Paris.
10 octobre 1910. — E. Borel : La Mécanique rationnelle et les Physiciens, à propos de deux livres récents (*L'initiation à la Mécanique*, de Ch.-Ed. Guillaume, et le *Cours de Mécanique rationnelle et expérimentale*, de H. Bouasse).

Revue générale des Sciences pures et appliquées, fondée par L. Olivier. — Librairie Armand Colin, Paris.

30 septembre 1910. — G. Bourrey : La formation des Ingénieurs et l'Enseignement technique supérieur.

2. Livres nouveaux :

Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlasst durch die Internationale Mathematische Unterrichts-Kommission. Herausgegeben von F. Klein. — 5 Bände, in einzeln käuflichen Heften. gr. 8. Steif geh. ; B. G. Teubner, Leipzig. — Bd. I. 1. Lietzmann, *Stoff und Methode im mathematischen Unterricht der norddeutschen höheren Schulen*. M. 2. — 2. Lietzmann, *die Organisation des mathematischen Unterrichts an den höheren Knabenschulen in Preussen*. M. 5. — Bd. II. 1. Wieleitner, *der mathem. Unterricht in Bayern*. M. 2.40. — 2. Witting, *der mathematische Unterricht in Sachsen*. M. 2.20. — 3. Geck, *der mathematische Unterricht in Württemberg*. M. 2.60. — 4. Cramer, *der mathematische Unterricht in Baden*. M. 1.60. — 5. Schnell, *der mathematische Unterricht in Hessen*. M. 1.60. — Bd. III. 2. Timerding, *die Mathematik i. d. physik. Lehrbüchern*. M. 2.80. — Bd. IV. 1. Grünbaum, *der mathematische Unterricht an den Fachschulen der Maschinenindustrie*, M. 2.60.

Annuaire du Bureau des Longitudes pour l'an 1911. Avec des notices scientifiques. — 1 vol. in-16 de 750 p. : 1 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

P. Appell et S. Dautheville. — **Précis de mécanique rationnelle**, Introduction à l'étude de la physique et de la mécanique appliquée à l'usage des candidats aux certificats de licence et des élèves des écoles techniques supérieures. — 1 Vol. in-8° VI-716 p., avec 220 fig. ; 25 fr. : Gauthier-Villars, Paris.

W. M. Baker and A. A. Bourne. — **The Students Arithmetic.** — 1 vol. in-8°, 328 p. et L p. ; 2 s. 6 d. ; G. Bell & Sons, London.

Haton de la Goupillière. — **Etude géométrique et dynamique des roulettes planes ou sphériques.** — 1 fasc. in-4°, 107 p. ; Gauthier-Villars. Paris.

G. Herting. — **Von Strecke, Quadrat und Würfel zum bestimmten Integral.** — Zum Gebrauche in den oberen Klassen unserer Mittelschulen und beim Selbstunterrichte. — 1 vol. in-8°, 135 p. ; Druck von Ph. Pfeiffer, Augsburg.

B. Mayor. — **Statique graphique des systèmes de l'espace.** — 1 Vol. in-8° IV-208 p., avec 16 fig. et un atlas de 7 planches ; 8 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

J. B. Messerschmitt. — **Der Sternenhimmel.** — 1 vol. (*Bücher der Naturwissenschaft* herausgegeben von Sigm. Günther) ; 195 p., relié ; 1 M ; Ph. Reclam jun., Leipzig.

P. Monteil. — **Leçons sur les séries de polynômes à une variable complexe.** — 1 Vol. in-8° VIII-128 p., avec 2 fig. ; 3 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Edition française dirigée par J. Molk. — *Tome I*, vol. 2, fasc. 2 : *Propriétés générales des corps et des variétés algébriques ;* exposé d'après l'article allemand de G. Landsberg, par J. Hadamard et J. Kurschak. — Teubner, Leipzig et Gauthier-Villars, Paris.

TABLE DES MATIÈRES

ARTICLES GÉNÉRAUX

Méthodologie et Notes diverses.

Organisation de l'enseignement.

Philosophie et Histoire.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

CHRONIQUE

Congrès internationaux et sociétés savantes.

Articles divers.

Nécrologie.

NOTES ET DOCUMENTS

BIBLIOGRAPHIE

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. *Sommaire ou annonce des principaux périodiques.*

2, Publications non périodiques.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

Cette table comprend les auteurs d'articles généraux ou d'articles de chronique, de lettres ou notes insérées dans la correspondance ou de comptes rendus bibliographiques.
Les numéros qui suivent chaque nom renvoient aux pages du volume.